

أولمبياد الثاني

تمرين 1

x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعاً بحيث : $x + y + z = 3$
بين أن : $\frac{\sqrt{x}}{y+z} + \frac{\sqrt{y}}{x+z} + \frac{\sqrt{z}}{x+y} \geq \frac{3}{2}$

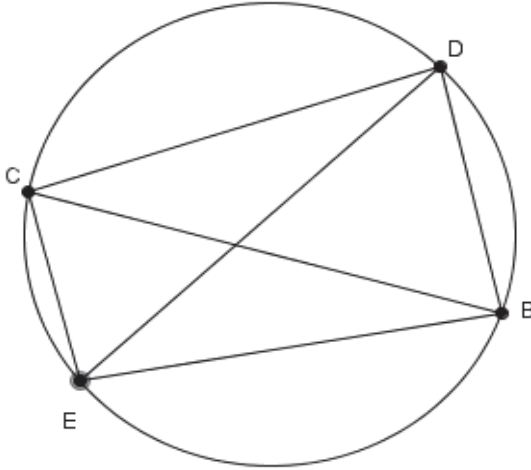
تمرين 2

EFG مثلث متساوي الساقين في E و A نقطة من $[FG]$
و $[FD]$ الإرتفاع الموافق للضلع $[EG]$
و النقطتان B و C هما المسقطان العموديان للنقطة A على (EF) و (EG) على التوالي
بين أن : $FD = AB + AC$

تمرين 3

x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعاً بحيث : $x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x}$
بين أن : $xyz = 1$

تمرين 4



$ECDB$ رباعي محاط بدائرة
(أنظر الشكل جانبه)
بين أن : $EC \times DB + DC \times EB = BC \times ED$

حل أولمبياد الثاني

تمرين 1

لدينا : $(\sqrt{x}-1)^2 \geq 0$

يعني : $(\sqrt{x}-1)^2 \times (-\sqrt{x}-2) \leq 0 \times (-\sqrt{x}-2)$ ($-\sqrt{x}-2 \leq 0$)

يعني : $(x-2\sqrt{x}+1) \times (-\sqrt{x}-2) \leq 0$

يعني : $-x\sqrt{x}-2x+2x+4\sqrt{x}-\sqrt{x}-2 \leq 0$

يعني : $-x\sqrt{x}+3\sqrt{x}-2 \leq 0$

يعني : $\sqrt{x}(3-x) \leq 2$

يعني : $\frac{1}{\sqrt{x}(3-x)} \geq \frac{1}{2}$ ($3-x=y+z > 0$)

يعني : $(\sqrt{x})^2 \times \frac{1}{\sqrt{x}(3-x)} \geq (\sqrt{x})^2 \times \frac{1}{2}$

إذن : $\frac{\sqrt{x}}{y+z} \geq \frac{x}{2}$ (1)

بنفس الطريقة نبين أن : $\frac{\sqrt{y}}{x+z} \geq \frac{y}{2}$ (2)

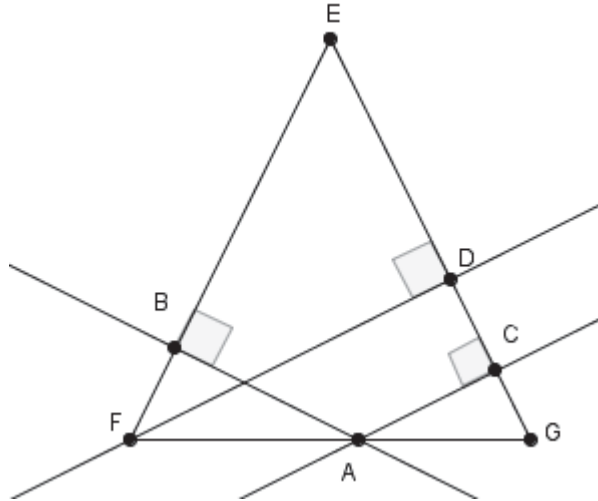
و $\frac{\sqrt{z}}{x+y} \geq \frac{z}{2}$ (3)

نجمع المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف : $\frac{\sqrt{x}}{y+z} + \frac{\sqrt{y}}{x+z} + \frac{\sqrt{z}}{x+y} \geq \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2}$

أي : $\frac{\sqrt{x}}{y+z} + \frac{\sqrt{y}}{x+z} + \frac{\sqrt{z}}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{2}$

وبالتالي : $\frac{\sqrt{x}}{y+z} + \frac{\sqrt{y}}{x+z} + \frac{\sqrt{z}}{x+y} \geq \frac{3}{2}$

تمرين 2



لدينا : $S_{EFG} = S_{EFA} + S_{EAG}$

(S_{EFG} : مساحة مثلث EFG ، ، S_{EFA} : مساحة مثلث EFA ، ، S_{EAG} : مساحة مثلث EAG)

$$\frac{EG \times FD}{2} = \frac{AB \times EF}{2} + \frac{AC \times EG}{2} \quad \text{يعني :}$$

$$\frac{EG \times FD}{2} = \frac{AB \times EF + AC \times EG}{2} \quad \text{يعني :}$$

($EF = EG$ لأن المثلث EFG متساوي الساقين في E) $\frac{EG \times FD}{2} = \frac{AB \times EG + AC \times EG}{2}$ يعني :

$$\frac{EG \times FD}{2} = \frac{EG (AB + AC)}{2} \quad \text{يعني :}$$

$$\frac{\cancel{EG}}{\cancel{EG}} \times \frac{\cancel{EG} \times FD}{\cancel{EG}} = \frac{\cancel{EG}}{\cancel{EG}} \times \frac{\cancel{EG} (AB + AC)}{\cancel{EG}} \quad \text{يعني :}$$

$$FD = AB + AC \quad \text{إذن :}$$

تمرين 3

$$x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} \quad \text{لدينا :}$$

$$x - y = \frac{1}{z} - \frac{1}{y} \quad \text{يعني :} \quad x - y = \frac{y - z}{zy} \quad \text{يعني :} \quad zy = \frac{y - z}{x - y}$$

$$(1) \quad xyz = \frac{x(y - z)}{x - y} \quad \text{إذن :}$$

$$y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x} \quad \text{لدينا :}$$

$$y - z = \frac{1}{x} - \frac{1}{z} \quad \text{يعني :} \quad y - z = \frac{z - x}{xz} \quad \text{يعني :} \quad xz = \frac{z - x}{y - z}$$

إذن : $xyz = \frac{y(z-x)}{y-z}$ (2)

لدينا : $x + \frac{1}{y} = z + \frac{1}{x}$

يعني : $z - x = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$ يعني : $z - x = \frac{x-y}{xy}$

إذن : $xy = \frac{x-y}{z-x}$ (3)

نضرب المتساويتان 1 و 2 طرف بطرف :

$$(xyz) \times (xyz) = \frac{x(\cancel{y-z})}{x-y} \times \frac{y(z-x)}{\cancel{y-z}}$$

ومنه : $(xyz)^2 = \frac{xy(z-x)}{x-y}$ (4)

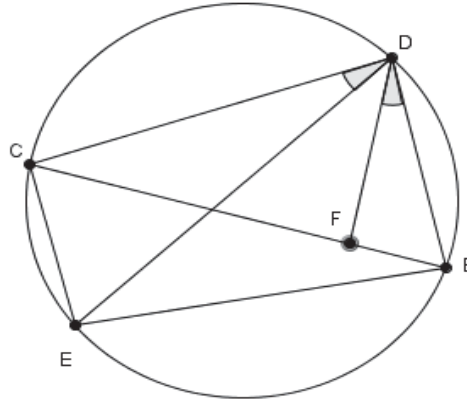
من 3 و 4 نستنتج أن : $(xyz)^2 = \frac{\left(\frac{x-y}{z-x}\right)(z-x)}{x-y}$

أي : $(xyz)^2 = \frac{\cancel{x-y}}{\cancel{z-x}} \times \frac{\cancel{z-x}}{\cancel{x-y}} = 1$

بما أن $x > 0$ و $y > 0$ و $z > 0$ أعداد حقيقية موجبة فإن : $xyz > 0$

وبالتالي : $xyz = 1$

تمرين 4



نضع النقطة F على [BC] بحيث : $\hat{CDE} = \hat{BDF}$ (1)

بما أن $\hat{DEC}$ و $\hat{DBF}$ زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس

فإن : $\hat{DBF} = \hat{DEC}$ (2)

من 1 و 2 نستنتج أن المثلثان CED و DBF متشابهان

$$\frac{DB}{DE} = \frac{BF}{CE} \text{ أي}$$

$$(3) \quad DB \times CE = BF \times DE \text{ ومنه}$$

$$\hat{CDE} = \hat{BDF} : \text{ لدينا}$$

$$\hat{CDE} + \hat{EDF} = \hat{BDF} + \hat{EDF} : \text{ يعني}$$

$$(4) \quad \hat{CDF} = \hat{EDB} : \text{ إذن}$$

بما أن $\hat{DCE}$ و $\hat{BDF}$ زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس

$$(5) \quad \hat{DCF} = \hat{DEB} : \text{ فإن}$$

من 4 و 5 نستنتج أن المثلثان DFC و DBE متشابهان

$$\text{أي : } \frac{DC}{DE} = \frac{CF}{BE}$$

$$(6) \quad DC \times BE = CF \times DE : \text{ ومنه}$$

$$DB \times CE + DC \times BE = BF \times DE + CF \times DE : \text{ نجمع المتساويتين 6 و 3 طرف بطرف}$$

$$\text{أي : } DB \times CE + DC \times BE = DE(BF + CF)$$

$$\text{وبالتالي : } EC \times DB + DC \times EB = BC \times ED$$