

مسألة 1: جد كل أزواج الأعداد الصحيحة (n, p) حيث p عدد أولي و $p^2 = n^3 + 1$.

مسألة 2: بين أنه من أجل كل ثلاث أعداد حقيقية a, b, c لدينا:

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 0$$

مسألة 3: جد أكبر قيمة للعبارة $ab + bc + 2ac$ بحيث a, b, c أعداد حقيقية موجبة مجموعها 1.

مسألة 4: بعد عيد ميلادها في سنة 2003 اكتشفت منى أن عمرها في تلك السنة (أي في سنة 2003) كان يساوي مجموع أرقام السنة التي ولدت فيها.
- جد في أي سنة ولدت.

مسألة 5: الرباعي $ABCD$ قطراه متعامدان ومتقاطعان في النقطة P , نعلم أن $AP = PB = 1$ والطول BC ضعف الطول AB ونصف الطول CD . أحسب طول القطر BD .

مسألة 6: يملك نزيه كتابا، صفحاته مرقمة بحيث الورقة الأولى تحمل العددين 1 و 2، الورقة الثانية تحمل العددين 3 و 4، الورقة الثالثة تحمل العددين 5 و 6، وهكذا. تمزقت إحدى الأوراق، فعندما عد نزيه مجموع الأعداد من الأوراق الباقية وجد الناتج يساوي 2025.
- جد عدد الصفحات التي يمكن أن تكون في الكتاب قبل تمزق الورقة يوجد الكثير من الإمكانيات يطلب إيجاد واحدة منها.

مسألة 7: x و y عددان طبيعيان. جد x و y بحيث:

$$\frac{x^2 + y^2}{x + y} = 10$$

مسألة 8: نرقم رؤوس مكعب بالأرقام من 1 إلى 8 ونكتب فوق كل حرف من حروفه الإثنا عشر مجموع الرقمين من رأسيه. هل يمكن أن تكون الأرقام فوق الأحرف جميعها مختلفة مثلثي مثلثي؟

مسألة 9: ليكن m و n عددين طبيعيين حيث:

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{2024 \times 2025} = \frac{m}{n}$$

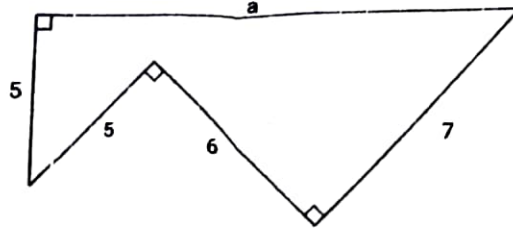
و $\frac{m}{n}$ غير قابل للاختزال.
- جد $m + n$.

مسألة 10:

حلل الى ابسط شكل ممكن العبارة: $a^6 - 1$.

مسألة 11: $ABCD$ رباعي بحيث $AB = BC = CD$, $\angle ABC = 70^\circ$ و $\angle BCD = 170^\circ$. ماهو قياس الزاوية $\angle BAD$ ؟

مسألة 12: جد قيمة الطول a المفقود في الشكل التالي:



يمنع استعمال الآلة الحاسبة و المنقلة
الوقت: 4 ساعات

مسألة 1: لدينا

$$p^2 = (n+1)(n^2 - n + 1)$$

منه الاحتمالات الممكنة هي

$$p^2 = 1 \cdot p^2, p^2 \cdot 1, p \cdot p$$

بدراسة الحالات الحالة الأولى تعطي $n = 0$ ، وهو حل مرفوض لأن p أولي. الحالة الثانية تعطي $n \in \{0, 1\}$ ، وهو حل مرفوض كذلك لنفس السبب. الحالة الممكنة الوحيدة هي لما

$$n+1 = p = n^2 - n + 1$$

ما يعني أن $n^2 - 2n = 0$ ، وبما أن $n \neq 0$ ، نستنتج الحل الوحيد هو $\boxed{n=2, p=3}$

مسألة 2: لدينا $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$ ، بنشر العبارة والقسمه على 2 نجد المطلوب

مسألة 3: بما أن $a+b+c=1$ فإن $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) = 1$ وبالتالي $ab+bc+2ca = \frac{1-(a-b)^2-b^2}{2}$ وبما أن اصغر قيمة ممكنة لـ $b^2 + (c-a)^2$ هي 0 فقط لما $b=0$ و $c=a=\frac{1}{2}$ فإن اكبر قيمة ممكنة لـ $ab+bc+2ca$ هي لما $b=0, c=a=\frac{1}{2}$ اي $\frac{1}{2}$

مسألة 4: لنكتب سنة ميلادها ك مجموع $a_0 + 10a_1 + 100a_2 + 1000a_3$ حيث a_0, a_1, a_2, a_3 هي أرقام سنة ميلادها. لدينا $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 2003 - a_0 - 10a_1 - 100a_2 - 1000a_3$ لذلك $2a_0 + 11a_1 + 101a_2 + 1001a_3 = 2003$. لنفترض أن $a_3 \geq 3$ ، بالتالي $1001a_3 \geq 3003$ وهو أمر مستحيل، إذا كان $a_3 = 2$ فإن $2a_0 + 11a_1 + 101a_2 + 2002 = 2003$ وهو أمر مستحيل أيضًا لأن $2a_0 + 11a_1 + 101a_2 \geq 0$ ، إذا كان $a_3 = 1$ فإن $2a_0 + 11a_1 + 101a_2 = 2003$ وهو أمر مستحيل لأن القيمة القصوى لـ $2a_0 + 11a_1 + 101a_2$ هي $2(9) + 11(9) + 101(9) < 2003$ ، لذا $a_3 = 1$ و $2a_0 + 11a_1 + 101a_2 = 1002$. لنفترض أن $a_2 \leq 8$ ، بالتالي $2a_0 + 11a_1 + 101a_2 = 1002$ وهو أمر مستحيل، لذا $a_2 = 9$ و $2a_0 + 11a_1 = 93$. لنفترض أن $a_1 \leq 6$ ، بالتالي $2a_0 \geq 93 - 11(6) > 18$ وهو أمر مستحيل، إذا كان $a_1 = 8$ و $a_1 = 8$ و $2a_0 = 5$ وهو أمر مستحيل، إذا كان $a_1 = 9$ فإن $2a_0 = -6$ وهو أمر مستحيل، لذا $a_1 = 7$ و $a_0 = 8$. بما أن $1 + 9 + 7 + 8 = 25 + 2003 - 1978$ ، نستنتج أنها وُلدت في 1978.

مسألة 5: بواسطة نظرية فيثاغورس، نحصل على $AB = \sqrt{2}$ ، لذا $BC = 2\sqrt{2}$ و $DC = 4\sqrt{2}$ ، مرة أخرى بواسطة نظرية فيثاغورس نحصل على $PC = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 1} = \sqrt{7}$ و $DP = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 - 7} = 5$ ، لذا $BD = PD + BP = 6$

مسألة 6: لكن n عدد الأوراق و m ترتيب الورقة المفقودة (بحيث تحتوي الورقة المفقودة على الأعداد $2m - 1$ و $2m$)، لدينا $m \leq n$ و $(2m - 1 + 2m) = 2025$ و $(1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2n - 1 + 2n) - (2m - 1 + 2m) = 2025$ ، لذلك $\frac{2n(2n+1)}{2} = 2025 + (2m - 1 + 2m) = 2024 + 4m$ ، مما يعطي $2n^2 + n - 4m = 2024$ ، وبالتالي $m = \frac{2n^2 + n}{4} - 506$ ، مما يعطي أن n قابل للقسمة على 4 (لأنه إذا كان n فردياً فإن $2n^2 + n$ فردي، لذا n يكون زوجياً). هذا يعطي أن $2n^2$ قابل للقسمة على 4، لذا n قابل للقسمة على 4. إذا كانت $n \leq 28$ فإن $m < 0$ ، إذا كانت $n \geq 36$ فإن $m > n$ ، ومنه $n = 32$ و $m = 14$. ملاحظة: لا يلزم على الطلاب إثبات أن الحل وحيد، إعطاء قيمة ل n وإثبات صحتها يكفي.

مسألة 7: : لنفترض بدون فقدان للعمومية أن $x \geq y$ ، لدينا $x^2 + y^2 = 10(x + y)$ ، ولذا $(x^2 - 10x + 25) + (y^2 - 10y + 25) = 50$ ، ومنه $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 50$. الطرق الوحيدة لكاتبه 50 كمجموع ل مربعات هي $1^2 + 7^2 = 50$ و $5^2 + 5^2 = 50$ ، لذا جميع الحلول ل (x, y) هي $(0, 10)$ ، $(10, 10)$ ، $(4, 12)$ ، $(-2, 4)$ ، $(-2, 6)$ ، $(6, 12)$. (نستبعد حالة $x = y = 0$ لأن $x + y \neq 0$).

مسألة 8: ثبت بالتناقض المطلوب. لنفترض أنها ممكنة. لاحظ أن القيمة الدنيا لمجموع نقاط على حافة هو $1 + 2 = 3$ ، والقيمة الكبرى هي $7 + 8 = 15$ ، لذا هناك $15 - 3 + 1 = 13$ قيمة ممكنة لمجموع النقاط على كل حافة. نظراً لوجود 12 حافة على المكعب، فهناك بالضبط قيمة واحدة ممكنة لمجموع نقاط على حافة لم يتم استخدامها. لاحظ أن مجموع كل الحواف هو $3(1 + 2 + \dots + 8) = 108$ و مجموع كل القيم الممكنة هو $3 + 4 + \dots + 15 = 117$ ، لذا لا يوجد حافة بقيمة $117 - 108 = 9$. لذا هناك حواف بقيمة 12، 13، 14، 15. من الواضح ان الحافة بمجموع 15 يجب أن تحتوي على 7 و 8 على نقاطها. بالمثل، $14 = 6 + 8$ ، لذا، 6 و 7 لا يشتركان في حافة واحدة. لذا يجب أن يتم تشكيل 13 بواسطة 5 و 8. الآن، $12 = 4 + 8$ أو $5 + 7$. نظراً لأن 8 لديها بالفعل 3 حواف متصلة بها، فإن $12 = 4 + 8$ يتم رفضها. أيضاً، نظراً لعدم مشترك 5 و 7 في حافة واحدة، فإن 12 لا يمكن تشكيلها. لذا لدينا تناقض، وهو أمر مستحيل.

مسألة 9: لدينا $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{2024 \times 2025} = \frac{2-1}{1 \times 2} + \frac{3-2}{2 \times 3} + \dots + \frac{2025-2024}{2024 \times 2025} = \frac{1}{2025}$ ، لذا $m+n = 2024+2025 = 4049$ ، $1 + (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) + (-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}) + \dots + (-\frac{1}{2024} + \frac{1}{2024}) - \frac{1}{2025} = \frac{2024}{2025}$

مسألة 10:

$$a^6 - 1 = (a^3 - 1)(a^3 + 1) = (a - 1)(a^2 + a + 1)(a + 1)(a^2 - a + 1)$$

مسألة 11: لكن E نقطة تقاطع القطعة (CD) و (BA) ، ولكن F نقطة تقاطع القطعة CA و BD . نظراً لأن $\angle DCB = 170^\circ$ و $\angle ABC = 70^\circ$ ، فنحصل على $\angle ECB = 10^\circ$ و $\angle EBC = 110^\circ$ ، وبالتالي $\angle CEB = 60^\circ$. من ناحية أخرى، لدينا $CB = CD = BA$ ، لذا $\angle BCA = 55^\circ$ و $\angle CBD = 5^\circ$ ، مما يعطي $\angle CFB = 60^\circ = \angle CEB$ ، وبالتالي $ECFC$ هو معين رباعي، مما يعطي $\angle FAE = \angle CAB = \angle FCB = \angle FEB = 60^\circ - 180^\circ$ ، وبالتالي $\angle CEF = \angle CBF = \angle CDF$ ، لذا $AF = EF = DF$ ، وبالتالي $2\angle FAD = 60^\circ$ مما يعطي $\angle FAD = 30^\circ$ و $\angle BAD = 85^\circ$.