

## أولمبياد الواحد والعشرون

### تمرين 1

$x > 1$  و  $y > 1$  و  $z > 1$  أعداد حقيقية بحيث :

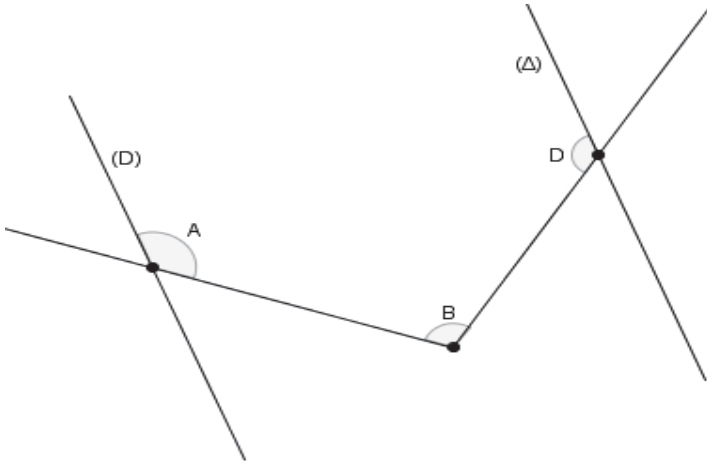
$$\text{بين أن : } xyz + \frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} > y + x + z + \frac{1}{xyz}$$

### تمرين 2

نعتبر الشكل جانبه بحيث :

$$(D) \parallel (\Delta)$$

بين أن :  $A + B + D = 360^\circ$



### تمرين 3

$x$  و  $y$  و  $z$  هي أطوال أضلاع مثلث

$$\text{بين أن : } (x + z - y)^2 < 4xz$$

### تمرين 4

$x$  عدد حقيقي غير منعدم بحيث :  $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$

$$\text{أحسب : } \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

## حل أولمبياد الواحد والعشرون

### تمرين 1

بما أن  $y > 1$  فإن  $-y < -1$

ومنه  $-\frac{1}{y} > -1$

لدينا  $-\frac{1}{y} > -1$  و  $x > 1$  يعني :  $x + \left(-\frac{1}{y}\right) > 1 + (-1)$

إذن :  $x - \frac{1}{y} > 0$  ( 1 )

بنفس الطريقة نبين أن :  $y - \frac{1}{z} > 0$  ( 2 )

و  $z - \frac{1}{x} > 0$  ( 3 )

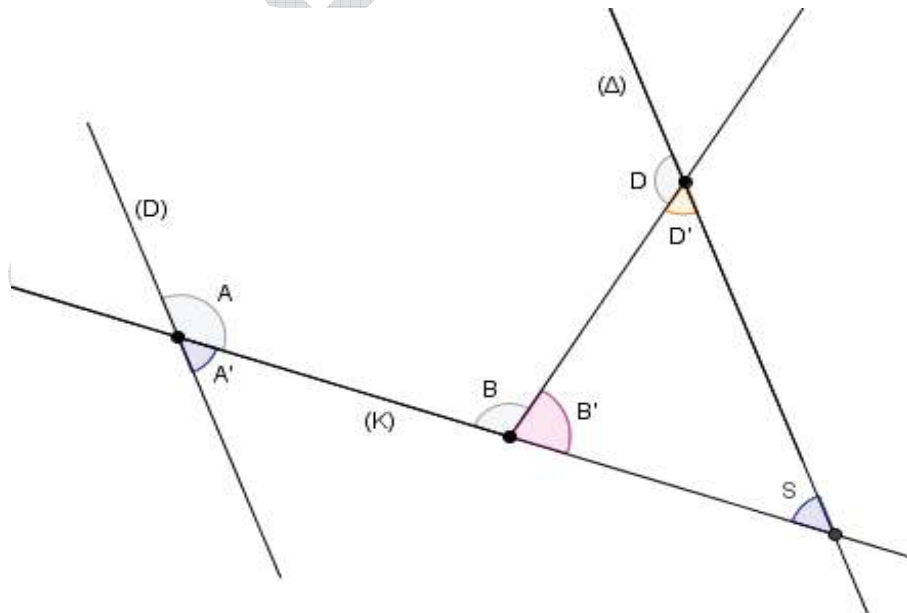
نضرب المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف :  $\left(x - \frac{1}{y}\right)\left(y - \frac{1}{z}\right)\left(z - \frac{1}{x}\right) > 0$

أي :  $\left(xy - \frac{x}{z} - 1 + \frac{1}{yz}\right)\left(z - \frac{1}{x}\right) > 0$  أي :  $xyz - y - x + \frac{1}{z} - z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{xyz} > 0$

أي :  $xyz + \frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \left(y + x + z + \frac{1}{xyz}\right) > 0$

وبالتالي :  $xyz + \frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} > y + x + z + \frac{1}{xyz}$

### تمرين 2



بمأن

$(\Delta) // (D)$  و  $(K)$  قاطع لهما

فإن  $S = A'$

لدينا :  $S = A' = 180^\circ - A$

و  $B' = 180^\circ - B$

و  $D' = 180^\circ - D$

ونعلم أن مجموع زوايا مثلث تساوي  $180^\circ$

يعني :  $S + B' + D' = 180^\circ$

يعني :  $180^\circ - A + 180^\circ - B + 180^\circ - D = 180^\circ$

يعني :  $A + B + D = 180^\circ + 180^\circ + 180^\circ - 180^\circ$

وبالتالي :  $A + B + D = 360^\circ$

### تمرين 3

لنحدد إشارة الفرق  $(x + z - y)^2 - 4xz$  :

$$(x + z - y)^2 - 4xz = ((x + z) - y)^2 - 4xz$$

$$= (x + z)^2 - 2 \times (x + z) \times y + y^2 - 4xz$$

$$= x^2 + 2xz + z^2 - 2xy + 2yz + y^2 - 4xz$$

$$= x^2 + z^2 + y^2 - 2(xy + yz + xz)$$

لدينا :  $x$  و  $y$  و  $z$  هي أطوال أضلاع مثلث

يعني :  $x + y > z$  (متفاوتة مثلثية)

يعني :  $z \times (x + y) > z \times z$  ( $z > 0$ )

إذن :  $xz + yz > z^2$  (1)

وبنفس الطريقة نبين أن :  $yz + xy > y^2$  (2)

و  $xy + xz > x^2$  (3)

نجمع المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف :

$$xz + yz + yz + xy + xy + xz > z^2 + y^2 + x^2$$

أي :  $2(xy + yz + xz) > x^2 + y^2 + z^2$

$$\text{أي : } (x+z-y)^2 - 4xz = x^2 + z^2 + y^2 - 2(xy + yz + xz) \leq 0$$

$$\text{وبالتالي : } (x+z-y)^2 < 4xz$$

#### تمرين 4

$$\text{نضع : } y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\text{يعني : } y^2 = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = x + 2 + \frac{1}{x}$$

$$\text{يعني : } y^2 - 2 = x + \frac{1}{x}$$

$$\text{يعني : } (y^2 - 2)^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$$

$$\text{يعني : } (y^2 - 2)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 7 + 2 = 9$$

$$\text{يعني : } (y^2 - 2)^2 - 9 = 0$$

$$\text{يعني : } (y^2 - 2 + 3)(y^2 - 2 - 3) = 0$$

$$\text{يعني : } (y^2 + 1)(y^2 - 5) = 0$$

$$\text{يعني : } y^2 - 5 = 0 \text{ أو } y^2 + 1 = 0$$

$$\text{يعني : } y^2 = -1 \text{ المعادلة ليس لها حل}$$

$$\text{أو } (y - \sqrt{5})(y + \sqrt{5}) = 0$$

$$\text{يعني : } y + \sqrt{5} = 0 \text{ أو } y - \sqrt{5} = 0$$

$$\text{يعني : } y = -\sqrt{5} \text{ أو } y = \sqrt{5}$$

$$\text{ونعلم أن } y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} > 0$$

$$\text{وبالتالي : } y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{5}$$