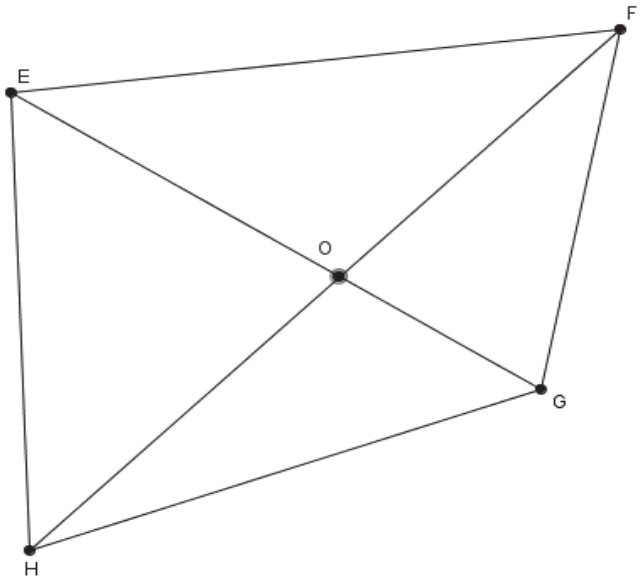
أولمبياد الخامس

تمرين 1

x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعا

بين أن : $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9$

تمرين 2



$EFGH$ رباعي محدب قطراه

$[EG]$ و $[FH]$ يتقاطعان

في النقطة O كماهو مبين

في الشكل جانبه

P : محيط الرباعي $EFGH$

بين أن : $\frac{1}{2}P < EG+FH < P$

تمرين 3

احسب $\dfrac{\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{5\times 6}+....+\frac{1}{99\times 100}}{\frac{1}{51\times 100}+\frac{1}{52\times 99}+\frac{1}{53\times 98}+...+\frac{1}{99\times 52}+\frac{1}{100\times 51}}$

تمرين 4

أنشئ قطعة طولها $\sqrt{10}$ (تبرير الإنشاء)

حل أولمبياد الخامس

تمرين 1

نحدد إشارة الفرق $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-9$:

لدينا :

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-9=\frac{x}{x}+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{y}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+\frac{z}{z}-9$$
$$=1+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+1+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+1-9$$
$$=\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}-6$$
$$=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}-2+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}-2$$
$$=\frac{x^2+y^2-2xy}{xy}+\frac{y^2+z^2-2zy}{zy}+\frac{x^2+z^2-2xz}{xz}$$
$$=\frac{(x-y)^2}{xy}+\frac{(z-y)^2}{zy}+\frac{(x-z)^2}{xz}$$

نعلم أن $(x-z)^2\geq 0$ و $(x-y)^2\geq 0$ و $(z-y)^2\geq 0$

بما أن $x>0$ و $y>0$ و $z>0$ فإن : $xy>0$ و $zy>0$ و $xz>0$

إذن : $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-9=\frac{(x-y)^2}{xy}+\frac{(z-y)^2}{zy}+\frac{(x-z)^2}{xz}\geq 0$

وبالتالي : $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9$

تمرين 2

محيط الرباعي $EFGH$ هو :

$$P=EF+FG+GH+HE$$

في المثلثين EFG و EHG لدينا : $EG<EF+FG$ و $EG<EH+HG$

نجمع المتفاوتيتين طرف بطرف : $EG+EG<EF+FG+EH+HG$

أي : $2EG<P$

إذن : $EG<\frac{P}{2}$ (1)

في المثلثين EHF و HGF لدينا : $FH<EF+EH$ و $FH<GF+HG$

نجمع المتفاوتيتين طرف بطرف : $FH+FH<EF+EH+GF+HG$

أي : $2FH<P$

إذن : $FH<\frac{P}{2}$ (2)

من 1 و 2 نستنتج أن : $EG+FH<P$ (3)

في المثلثات EFO و FOG و HGO و EOH لدينا : $EF<EO+OF$

و $FG<OF+OG$ و $HG<OG+OH$ و $EH<OH+OE$

نجمع المتفاوتات طرف بطرف: $EF+FG+HG+EH<EO+OF+OF+OG+OG+OH+OH+OE$

أي : $P<2(EO+OG)+2(OF+OH)$ أي : $P<2EG+2FH$

أي : $P<2(EG+FH)$ أي : $\frac{P}{2}<EG+FH$ (4)

من 3 و 4 نستنتج أن : $\frac{1}{2}P<EG+FH<P$

تمرين 3

نضع : $X=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{5\times6}+...+\frac{1}{99\times100}$

و $Y=\frac{1}{51\times100}+\frac{1}{52\times99}+\frac{1}{53\times98}+...+\frac{1}{99\times52}+\frac{1}{100\times51}$

لدينا : $X=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{5\times6}+...+\frac{1}{99\times100}$

يعني : $X=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+...+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)$

يعني : $X=\left(1+\left(\frac{1}{2}-2\times\frac{1}{2}\right)\right)+\left(\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{4}-2\times\frac{1}{4}\right)\right)+\left(\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{6}-2\times\frac{1}{6}\right)\right)+...+\left(\frac{1}{99}+\left(\frac{1}{100}-2\times\frac{1}{100}\right)\right)$

يعني : $X=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}...+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}...+\frac{1}{100}\right)$

يعني : $X=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}...+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}...+\frac{1}{50}\right)$

يعني : $X=\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\frac{1}{53}...+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}$

يعني : $X+X=\left(\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\frac{1}{53}...+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}\right)+\left(\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\frac{1}{53}...+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}\right)$

يعني : $2X=\left(\frac{1}{51}+\frac{1}{100}\right)+\left(\frac{1}{52}+\frac{1}{99}\right)+\left(\frac{1}{53}+\frac{1}{98}\right)+...+\left(\frac{1}{99}+\frac{1}{52}\right)+\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{51}\right)$

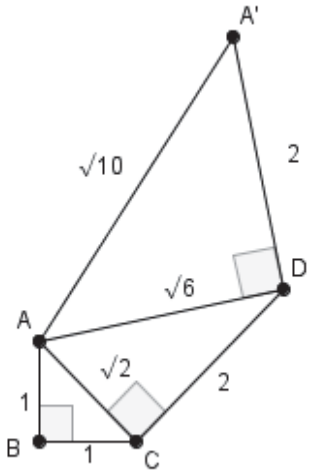
يعني : $2X=\frac{151}{51\times100}+\frac{151}{52\times99}+\frac{151}{53\times98}+...+\frac{151}{99\times52}+\frac{151}{100\times51}$

يعني : $2X=151\left(\frac{1}{51\times100}+\frac{1}{52\times99}+\frac{1}{53\times98}+...+\frac{1}{99\times52}+\frac{1}{100\times51}\right)$

يعني : $2X=151Y$

وبالتالي : $\frac{X}{Y}=\frac{151}{2}$

تمرين 4



المرحلة الأولى :

ننشئ المثلث ABC قائم الزاوية في B بحيث :

$AB=BC=1$

حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة إذن :

$AC^2=AB^2+BC^2$

يعني : $AC^2=1^2+1^2=1+1=2$ ومنه : $AC=\sqrt{2}$

المرحلة الثانية :

ننشئ النقطة D بحيث المثلث ADC قائم الزاوية في

C بحيث : $DC=2$

حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة إذن : $AD^2=AC^2+DC^2$

يعني : $AD^2=\left(\sqrt{2}\right)^2+2^2=2+4=6$ ومنه : $AD=\sqrt{6}$

المرحلة الثالثة :

ننشئ النقطة A' بحيث المثلث ADA' قائم الزاوية في D بحيث : $DA'=2$

حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة إذن : $AA'^2=DA'^2+AD^2$

يعني : $AA'^2=2^2+\left(\sqrt{6}\right)^2=4+6=10$

ومنه : $AA'=\sqrt{10}$