الوظيفة المنزلية رقم 05 في مادة الرياضيات

سلمت يوم: تعاد يوم :

التمرين الأول: (13 نقطة)

f ، g و h الدوال العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ ، $\mathbb{R}-\{-2\}$ و $\mathbb{R}$ (على التوالي) بـ:

$$f(x)=x^2-6x+7 \qquad g(x)=3-\frac{1}{x+2} \qquad h(x)=|1-2x|$$

(C_f)،(C_g) و (C_h) منحنياتها البيانية (على التوالي) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، (P) هو القطع المكافئ الممثل للدالة $x\mapsto x^2$ و (H) هو القطع الزائد الممثل للدالة $x\mapsto \frac{1}{x}$.

I. 1) عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)=(x+a)^2+b$.

2) ادرس اتجاه تغير f على $\mathbb{R}$ ، ثمّ شكل جدول تغيراتها .

3) بيّن أن (C_f) هو صورة (P) بانسحاب يطلب تعيين شعاعه $\vec{u}$ ، ثمّ أنشئ (C_f) .

4) m عدد حقيقي ، حل بيانيا المعادلتين : $(1):\ f(x)=-2$ $\qquad(2):\ f(x)=m$ ، تأكّد جبريا من حلول المعادلة (1) .

II. 1) ادرس اتجاه تغير g على كل من المجالين $]-\infty;-2[$ و $]-2;+\infty[$ ، ثمّ شكل جدول تغيراتها .

2) اشرح كيفية إنشاء (C_g) انطلاقا من (H)، ثمّ ارسم (C_g) .

3) عيّن بيانيا إحداثيتي مركز تناظر (C_g) .

III. 1) اكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة .

2) عيّن اتجاه تغير h على $\mathbb{R}$ ، ثمّ شكل جدول تغيراتها .

3) أنشئ (C_h).

4) حل بيانيا المتراجحة $h(x)-3\leq 0$.

التمرين الثاني: (07 نقاط)

I. x عدد حقيقي ، $A(x)$ و $B(x)$ عبارتان جبريتان معرفتان كما يلي:

$$A(x)=\cos\left(\frac{17\pi}{2}\right)-\sin(\pi+x)+\cos(11\pi+x)$$

$$B(x)=\cos(-x)+\sin(7\pi-x)-\sin(3\pi)$$

1) بيّن أنّ: $A(x)=\sin x-\cos x$ و $B(x)=\cos x+\sin x$.

2) احسب $\cos x$ و $\sin x$ علما أنّ:

$$\begin{cases} A(x)=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \\ B(x)=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \\ x\in\left]\dfrac{\pi}{2};\pi\right[\end{cases}$$

II. عين الجواب الصحيح في كل حالة من الحالات الآتية مع التبرير:

	الجواب (1)	الجواب (2)	الجواب (3)
a) القيس الرئيسي للزاوية $\frac{697\pi}{3}$ هــــو:	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$
b) $\cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$ يســـــــــاوي:	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$
c) إذا كان $\cos x = \frac{1}{3}$ و $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ فـإن:	$\sin x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$	$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{3}$	$\sin x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$
d) القيمة المبسطة للعبارة $A(x) = \sin\frac{5\pi}{6}\times\sin\frac{19\pi}{6}+\cos\frac{11\pi}{6}\times\cos\frac{17\pi}{6}$ هــــي:	-1	1	$\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}$

تمنياتي لكم بالتوفيق

الإجابة النموذجية للوظيفة المنزلية رقم 05

حل التمرين الاول:

I. $f(x)=x^2-6x+7 \quad ;D_f=\mathbb{R}$

1) تعيين العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)=(x+a)^2+b$:

لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا :

$$(x+a)^2+b=x^2+2ax+a^2+b$$

بالمطابقة مع عبارة الدالة f المعطاة نجد:

$\begin{cases}2a=-6\\ a^2+b=7\end{cases}$ ومنه: $\begin{cases}a=-3\\ (-3)^2+b=7\end{cases}$ إذن: $\begin{cases}a=-3\\ b=-2\end{cases}$

عندئذ: $f(x)=(x-3)^2-2$

2) دراسة اتجاه تغير f على $\mathbb{R}$:

أ) على المجال $]-\infty;3]$: ليكن x_1 و x_2 عددين حقيقيين من $]-\infty;3]$ بحيث $x_1<x_2\le 3$

بإضافة (-3) نجد: $x_1-3<x_2-3\le 0$ (الطرفان سالبان)

بالتربيع نجد: $(x_1-3)^2>(x_2-3)^2$

بإضافة (-2) نجد: $(x_1-3)^2-2>(x_2-3)^2-2$

أي: $f(x_1)>f(x_2)$

إذن: f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;3]$.

ب) على المجال $[3;+\infty[$: بطريقة مماثلة نجد أن f متزايدة تماما على المجال $[3;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	↘	-2	↗

3) تبيان أن (C_f) هو صورة (P) بانسحاب شعاعه $\vec{u}$:

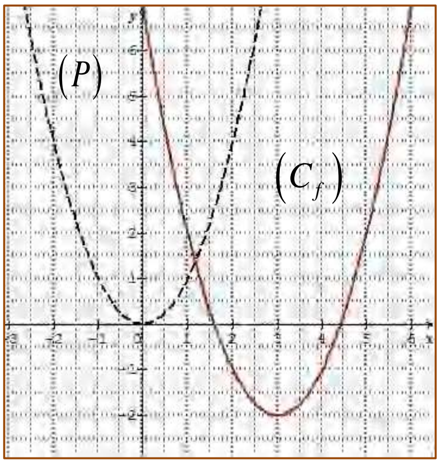
لتكن $M'(X;Y)$ نقطة من (C_f) ولتكن $M(x;y)$ نقطة من القطع المكافئ (P) ومنه $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix}x-X\\ y-Y\end{pmatrix}$ ،

لدينا: $(C_f): y=(x-3)^2-2$ ومنه $y+2=(x-3)^2$

بوضع: $\begin{cases}X=x-3\\ Y=y+2\end{cases}$ نجد أن: $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix}3\\ -2\end{pmatrix}$

إذن : (C_f) هو صورة (P) بانسحاب شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\ -2\end{pmatrix}$.

إنشاء (C_f):



4) حل بيانيا المعادلتين :

$f(x)=-2 \quad :(1)$ حلول المعادلة (1) بيانيا هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y=-2$

من البيان نجد أن للمعادلة (1) حل مضاعف يساوي 3

التحقق من حلول المعادلة (1) جبريا: (1) تكافئ $(x-3)^2-2=-2$

هذا معناه أن: $(x-3)(x-3)=0$

المعادلة الأخيرة تقبل حلا مضاعفا هو 3 إذن: $S=\{3;3\}$

$f(x)=m \quad :(2)$ حلول المعادلة (2) بيانيا هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم الموازي لمحور الفواصل ذي المعادلة $y=m$

من البيان نجد أن حلول المعادلة (2) تتغير حسب قيم العدد الحقيقي m و عليه تكون لدينا المناقشة التالية:

قيم m	حلول المعادلة (2)
$m\in]-\infty;-2[$	لا توجد حلول
$m=-2$	يوجد حل مضاعف يساوي 3
$m\in]-2;+\infty[$	يوجد حلان

II. $g(x)=3-\dfrac{1}{x+2} \quad ;D_g=\mathbb{R}-\{-2\}$

1) دراسة اتجاه تغير g على D_g:

على المجال $]-\infty;-2[$:

ليكن x_1 و x_2 عددين حقيقيين من $]-\infty;-2[$ بحيث $x_1<x_2<-2$

بإضافة 2 نجد: $x_1+2<x_2+2<0$ (الطرفان سالبان تماما)

بالقلب نجد: $\dfrac{1}{x_1+2}>\dfrac{1}{x_2+2}$

بالضرب في (-1) نجد: $-\dfrac{1}{x_1+2}<-\dfrac{1}{x_2+2}$

بإضافة 3 نجد: $3-\frac{1}{x_1+2}<3-\frac{1}{x_2+2}$

أي: $g(x_1)<g(x_2)$

إذن: g متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-2[$.

بطريقة مماثلة نثبت أن g متزايدة تماما على المجال $]-2;+\infty[$.

جدول تغيرات g :

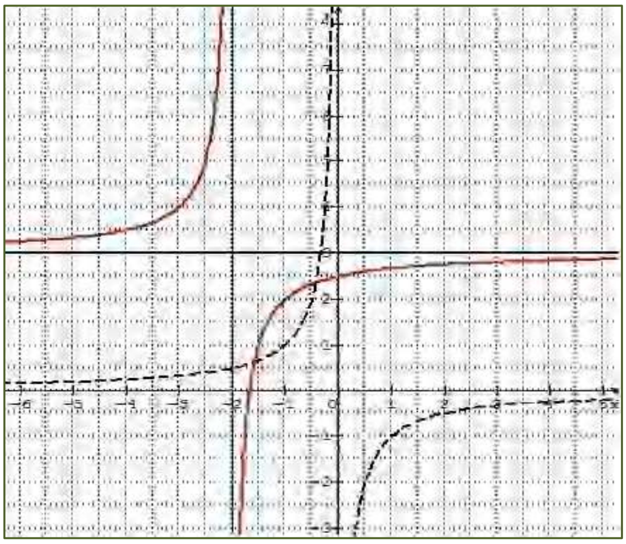
x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$g(x)$		↗	‖	↗	

2) شرح كيفية إنشاء (C_g) انطلاقا من (H):

نرسم (H') نظير القطع الزائد (H) بالنسبة إلى محور الفواصل

، (C_g) هو صورة (H') بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$.

إنشاء (C_g) :



4) تعيين مركز تناظر المنحني (C_g) بيانيا:

(C_g) متناظر بالنسبة إلى النقطة $A(-2;3)$.

III. $h(x)=|1-2x| \quad ;D_h=\mathbb{R}$

1) كتابة $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة :

$$h(x)=|1-2x|=\begin{cases}1-2x & ;1-2x\geq 0\\ 2x-1 & ;1-2x<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1-2x & ;x\leq \frac{1}{2}\\ 2x-1 & ;x>\frac{1}{2}\end{cases}$$

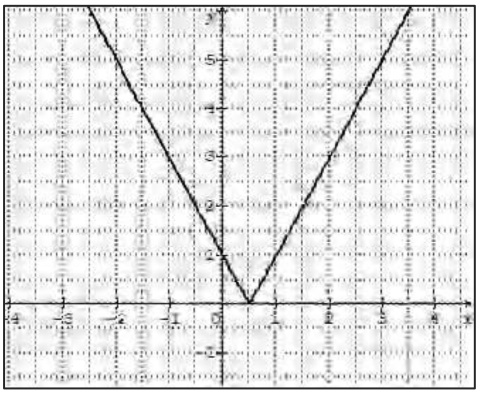
2) تعيين اتجاه تغير h على $\mathbb{R}$:

h متناقصة تماما على المجال $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ (لأن $-2<0$) ومتزايدة تماما على المجال $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ (لأن $2>0$) .

جدول تغيرات الدالة h :

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$h(x)$		↘	0	↗	

3) إنشاء (C_h):



4) حل بيانيا المتراجحة $h(x)-3\leq 0$:

حلول المتراجحة $h(x)\leq 3$ بيانيا هي فواصل نقط (C_h) الواقعة تحت المستقيم ذي المعادلة $y=3$ مع فواصل النقط المشتركة بينهما .

إذن : $S=[-1;2]$.

حل التمرين الثاني:

I. 1) تبيان أنّ: $A(x)=\sin x-\cos x$

و $B(x)=\cos x+\sin x$:

$$A(x)=\cos\left(\frac{17\pi}{2}\right)-\sin(\pi+x)+\cos(11\pi+x)$$

$$=\cos\left(8\pi+\frac{\pi}{2}\right)-(-\sin x)+\cos(10\pi+\pi+x)$$

$$=\cos\frac{\pi}{2}+\sin x-\cos x$$

إذن: $A(x)=\sin x-\cos x$ وهو المطلوب .

$$B(x)=\cos(-x)+\sin(7\pi-x)-\sin(3\pi)$$

$$=\cos x+\sin(6\pi+\pi-x)-\sin(2\pi+\pi)$$

$$=\cos x+\sin x-\sin\pi$$

إذن: $B(x)=\cos x+\sin x$ وهو المطلوب .

2) حساب $\cos x$ و $\sin x$:

لدينا:

$$A(x)\times B(x)=(\sin x-\cos x)(\cos x+\sin x)$$

$$=\sin^2 x-\cos^2 x$$

$$=1-2\cos^2 x$$

ومنه : $\cos^2 x=\frac{1-A(x)\times B(x)}{2}$

حسب المعطيات نجد أن: $\cos^2 x=\frac{1}{4}$

وبالتالي : $\cos x=-\frac{1}{2}$ أو $\cos x=\frac{1}{2}$

بما أن $x\in\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$ فإن $\cos x\leq 0$ إذن: $\cos x=-\frac{1}{2}$.

بالتعويض في العبارة $A(x)$ نجد أن: $\sin x=A(x)+\cos x=\frac{\sqrt{3}+1}{2}-\frac{1}{2}$ إذن: $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

II. تعيين الجواب الصحيح في كل حالة مع التعليل:

	الجواب الصحيح	التعليل
(a	1	$\frac{697\pi}{3}=\frac{696\pi+\pi}{3}=232\pi+\frac{\pi}{3}$
(b	2	$\cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{-8\pi+\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$
(c	3	نعلم أنه لكل x من $\mathbb{R}$: $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ ومنه $\left(\frac{1}{3}\right)^2+\sin^2 x=1$ وبالتالي $\sin^2 x=\frac{8}{9}$ ، وبما أن $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ فإن: $\sin x=\frac{2\sqrt{2}}{3}$
(d	1	$A(x)=\sin\frac{5\pi}{6}\times\sin\frac{19\pi}{6}+\cos\frac{11\pi}{6}\times\cos\frac{17\pi}{6}$ $=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\times\sin\left(3\pi+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)\times\cos\left(3\pi-\frac{\pi}{6}\right)$ $=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $=-1$