مستوى: سنة أولى جدع مشترك علوم — الفصل الأول

الميدان : الدوال (عموميات) — مذكرة

- **الكفاءات المستهدفة:** تحديد دالة (متغيرها، مجموعة تعريفها، مجموعة قيمها)

تعيين صورة عدد أو سابقة عدد وفق دالة معرفة بواسطة منحنى أو دستور.

الربط بين دستور وجدول قيم وتمثيل بياني.

توظيف الحاسبة البيانية لإعطاء التمثيل البياني لدالة معطاة على مجال بواسطة دستور.

وصف سلوك دالة معرفة بمنحن باستعمال التعبير الرياضي المناسب.

استنتاج جدول تغيرات دالة انطلاقا من تمثيلها البياني.

إرفاق جدول تغيرات معطى بتمثيل بياني ممكن.

استعمال الحاسبة البيانية لإيجاد القيم الحدية لدالة على مجال.

التعرّف على شفعية دالة انطلاقا من تمثيلها البياني أو بالاعتماد على التعبير الجبري للخاصية.

✍ **الوسائل التعليمية:** الكتاب المدرسي، المنهاج، الوثيقة المرفقة

الموضوع: عموميات على الدوال — 15ساعات

نشاط

20دقيقة

$ABCD$ مستطيل حيث: $AB = 4cm$ و $BC = xcm$ ، نسمي $S(x)$ مساحة هذا المستطيل.

1.احسب $S(x)$ بدلالة x .

2.أكمل الجدول التالي:

x	2	5	7	$\frac{15}{2}$	8	9	10
$S(x)$							

/1 مفهوم الدالة

1ساعة و 15 دقيقة

تعريف

D جزء من $\mathbb{R}$. نعرّف دالة f على D عندما نرفق بكلّ عدد حقيقي x من D عددا حقيقيا وحيدا، نرمز إليه بالرمز $f(x)$

تعابير واصطلاحات

- نرمز عادة إلى الدوال بالرموز f ، g ، h ، ...
- D جزء من $\mathbb{R}$ و f دالة معرفة على D:
  - D هي مجموعة تعريف الدالة.
  - إذا كان x عنصرا من D ، نسمي العدد الحقيقي $f(x)$ صورة x بالدالة f .
  - إذا كان العدد الحقيقي y صورة العدد الحقيقي x بالدالة f ، نقول إنّ x سابقة للعدد y بالدالة f .
  - للتعبير عن الدالة f ، نكتب:

$$f : D \to R$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

في هذه الكتابة، x يمثل المتغيّر و y مرتبط بالمتغيّر x.

تعليق: التميز بين الرمزين f و $f(x)$ باعتبار $f(x)$ عددا و f الدالة التي ترفق بالعدد x العدد $f(x)$

أمثلة:

دالة معرفة بدستور

العبارة: " f هي الدالة المعرفة على المجال $[-2\,;\,2]$ بالشكل: $f(x)=x^2+2x+1$ " تعني:

- مجموعة تعريف الدالة f هي المجال $[-2\,;\,2]$.
- بكلّ عدد حقيقي x من المجال $[-2\,;\,2]$ نرفق العدد x^2+2x+1: هكذا نرفق بالعدد -2 العدد $(-2)^2+2(-2)+1=1$
- ونكتب $f(-2)=1$ ونقول أيضا أنّ 1 هو صورة -2 بالدالة f.

ولدينا كذلك $f(0)=1$.

أي أنّ العددين -2 و 0 لهما نفس الصورة بالدالة f.

ملاحظة: لا يمكن أن يكون لعدد حقيقي عدّة صور لكن، يمكن أن يكون لعدد حقيقي عدّة سوابق.

2/. مجموعة تعريف دالة

1ساعة و 15 دقيقة

طريقة:

عند تعيين مجموعة تعريف دالة، نتمعن في الدستور المعرف للدالة:

- الدستور يتضمن مقاما يظهر فيه المتغيّر x، يجب رفض قيم x التي تعدم المقام.
- الدستور يتضمن جذرا تربيعيا يظهر تحته المتغير x، يجب رفض قيم x التي تجعل العبارة تحت الجذر سالبة تماما.

تطبيق:

الدوال التالية معرفة كلما كان حساب الصورة ممكنا على R، عيّن مجموعة التعريف لكلّ منها:

1. $f: x \mapsto \dfrac{2x+1}{x(x+1)}$ 2. $g: x \mapsto \sqrt{x+1}$ 3. $h: x \mapsto \sqrt{x}+\dfrac{1}{x}$

حلّ:

1. العبارة $f(x)=\dfrac{2x+1}{x(x+1)}$ تكون معرفة عندما يكون مقامها $x(x+1)$ غير معدوم.

لكن، $x(x+1)\neq 0$ يكافئ $x\neq 0$ و $x\neq -1$.

وبالتالي تكون مجموعة تعريف f هي $D_f=R-\{-1\,;\,0\}$.

ونكتب أيضا $D_f=]-\infty\,;\,-1[\cup]0\,;\,+\infty[$.

2. العبارة $g(x)=\sqrt{x+1}$ تكون معرفة عندما يكون المقدار الموجود تحت الجذر موجبا.

لكن، $x+1\geq 0$ يكافئ $x\geq -1$.

وبلتالي تكون مجموعة تعريف g هي $D_g=[-1\,;\,+\infty[$.

3. العبارة $h(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}$ تكون معرفة عندما يكون المقدار الموجود تحت الجذر موجبا ويكون المقام x غير معدوم.

تكون إذن، العبارة $h(x)$ معرفة عندما يكون $x\geq 0$ و $x\neq 0$.

منه مجموعة تعريف h: $D_h=]0\,;\,+\infty[$

تعاليق:

يوجد نوعان من القيم الممنوعة، أي القيم التي يكون من أجلها حساب الصورة غير ممكن:

- القيم التي تعدم المقامات.
- القيم التي تجعل المقادير تحت الجذر سالبة.

تقويم:

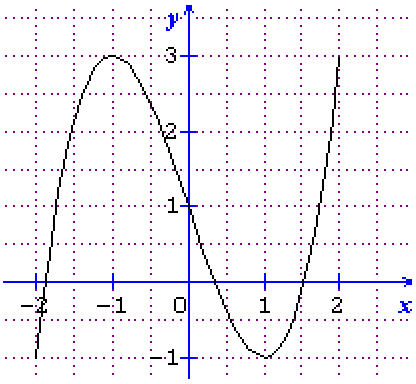
تمرين 11-12 صحفة 73

1ساعة ونصف

أ-بواسطة منحنى بياني:

مثال:

لتكن الدالة المعرفة بمنحناها الممثل في المعلم الموالي:



الدالة معرفة على $[-2;2]$

صورة 1 هي: -1

سابقة -1 هي: 1 و -2

ب-بواسطة دستور:

طريقة:

لحساب صورة عنصر a من مجموعة تعريف دالة، نُعوّض في عبارة الدالة المتغير x بالقيمة a.

لتعيين السوابق الممكنة لعنصر b، نحلّ المعادلة $f(x)=b$ ولا نحتفظ إلا بالحلول التي تنتمي إلى مجموعة تعريف الدالة.

مثال:

بفرض f الدالة المعرفة لكلّ عدد حقيقي يختلف عن -2 بالشكل: $f(x)=\dfrac{x}{x+2}$

1. احسب صورة العدد 2.

2.احسب، في حالة وجودها، سابقة (أو سوابق) العدد 3.

تقويم:

تمرين 24صحفة 74

بفرض: $x \mapsto f(x)=2x^2+5x-3$

1) ما هي صور -3، 5، 0، $\sqrt{2}$ ؟

2) ما هي السوابق الممكنة للعدد -3؟

تمرين 27صحفة 74

لتكن f الدالة المعرفة على R بالشكل:

$f(x)=-2x+3$

1. ما هي صورة $-\dfrac{1}{3}$ ؟ $0,25$ ؟

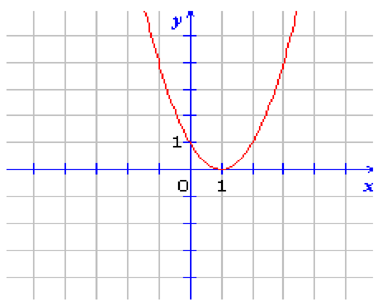
2.ما هي السوابق الممكنة للأعداد:

0، $-\dfrac{4}{3}$، 3 ؟

3.هل لكلّ عدد حقيقي سابقة بالدالة f ؟

تمرين 28صحفة 75

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ والممثلة كما يلي:



1) ما هي صور -1، 0، 1، 3 ؟

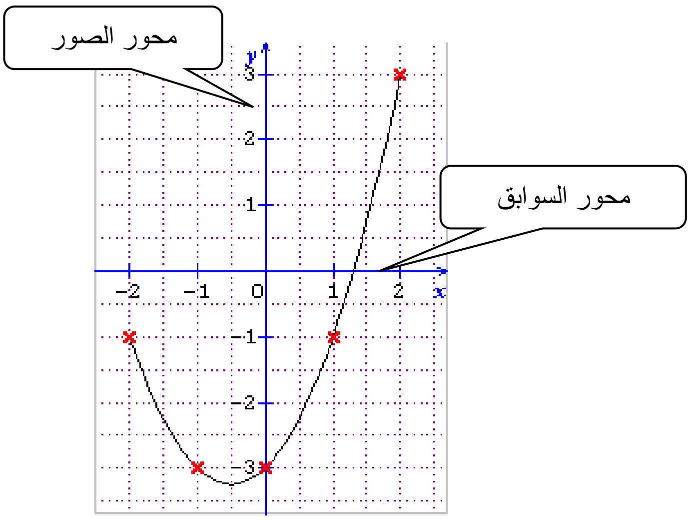
2) ما هي السوابق الممكنة للأعداد 1، 0، -1؟

تعريف

المستوي منسوب إلى معلم $(O;I,J)$. f دالة معرفة على جزء D من $\mathbb{R}$.
التمثيل البياني (أو المنحنى الممثل) للدالة في المعلم $(O;I,J)$ هو مجموعة النقط $M(x;y)$ حيث:
$x \in D$ و $y = f(x)$
إذا رمزنا إلى منحنى الدالة f بالرمز (C_f)، نقول أنّ $y = f(x)$ هي معادلة (C_f) في المعلم $(O;I,J)$.

مثال

لتكن الدالة f المعرفة على $[-2;2]$ بالشكل $f(x) = x^2 + x - 3$
يمكن رسم المنحنى الممثل للدالة f في المعلم $(O;I,J)$ بعدّة طرق:



باستعمال جدول لبعض قيم الدالة:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	-3	-3	-1	3

نعلّم النقاط الموافقة في المعلم ونصل بينها باليد.

تنبيه

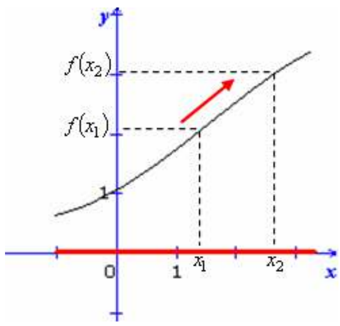
إنّ إعطاء مجموعة من القيم لا يكفي للحصول على المنحنى الممثل للدالة. هناك العديد من الكيفيات للمرور من نقطة إلى أخرى. فمن الضروري إذن أن تعطى معلومات أخرى حول سلوك الدالة.

5/. تغيرات دالة على مجال معين

3ساعات

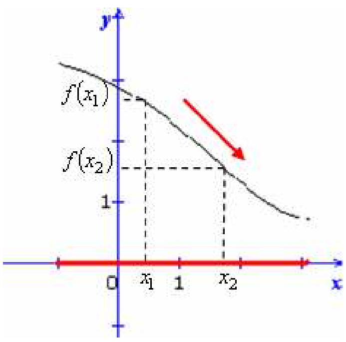
تعريف

f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$.
- f **متزايدة تماما** على I يعني: من أجل كلّ x_1 و x_2 من I، إذا كان $x_1 < x_2$ فإنّ: $f(x_1) < f(x_2)$
- f **متناقصة تماما** على I يعني: من أجل كلّ x_1 و x_2 من I، إذا كان $x_1 > x_2$ فإنّ: $f(x_1) > f(x_2)$
- f **ثابتة** على I يعني: من أجل كلّ x_1 و x_2 من I، $f(x_1) = f(x_2)$



دالة متزايدة تماما

$f(x_1)$ و $f(x_2)$ في نفس ترتيب x_1 و x_2.
الدالة تحفظ الترتيب.



دالة متناقصة تماما

$f(x_1)$ و $f(x_2)$ ليسا في نفس ترتيب x_1 و x_2
الدالة تعكس الترتيب.

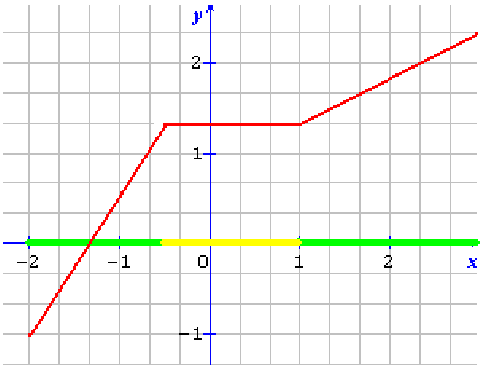
ملاحظة:

نعرّف كذلك اتجاه تغيّر دالة كالآتي:

- f متزايدة على I يعني: من أجل كلّ x_1 و x_2 من I، إذا كان $x_1 < x_2$ فإنّ $f(x_1) \le f(x_2)$
- f متناقصة على I يعني: من أجل كلّ x_1 و x_2 من I، إذا كان $x_1 < x_2$ فإنّ $f(x_1) \ge f(x_2)$

مثال

الدالة المعرفة بالبيان المقابل متزايدة تماما على كلّ من المجالين $[-2\ ;-0{,}5]$، $[1\ ;3]$ وثابتة على $[-0{,}5\ ;1]$.



نقول أيضا إنّها متزايدة على المجال $[-2\ ;3]$.

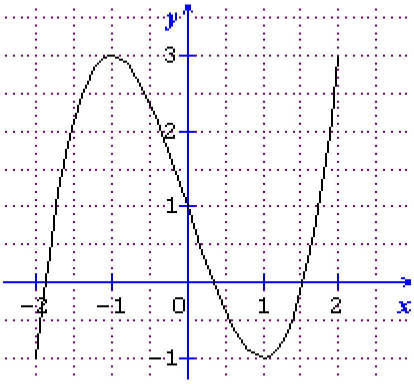
ملاحظة:

- نعني بدراسة **اتجاه تغيّر** دالة، تعيين المجالات التي تكون فيها هذه الدالة متزايدة تماما أو متناقصة تماما أو ثابتة.

تلخّص نتائج هذه الدراسة في جدول يسمّى **جدول التغيرات.**

مثال

الدالة الممثلة بالمنحنى المقابل معرفة على المجال $[-2\,;2]$،
هي متزايدة تماما على المجالين $[-2\,;-1]$ و $[1\,;2]$
ومتناقصة تماما على المجال $[-1\,;1]$.



- **جدول التغيرات**

x	-2		-1		1		2
$f(x)$	-1	↗	3	↘	-1	↗	3

تقويم:

تمرين 35صحفة 76

تمرين 36صحفة 76

تمرين 37صحفة 76

تمرين تطبيقي: (تحضير منزلي)

الجدول التالي يمثل تغيّرات الدالة f على المجال

x	-3		-2		1		4
$f(x)$	5	↘	0	↗	2	↘	-1

-ارسم تمثيلا بيانيا للدالة f مستعينا بجدول التغيرات للدالة f .

تعليق:

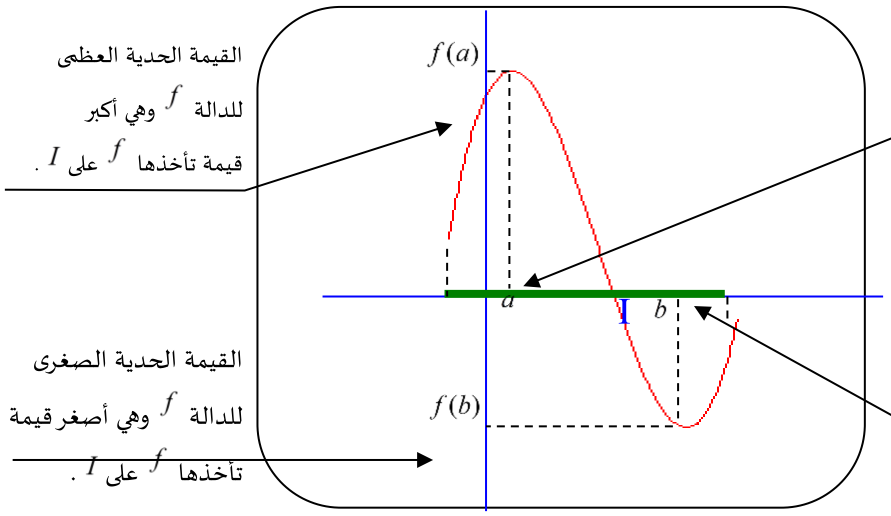
يلفت نظر التلميذ الى أن دالة متزايدة تحافظ على الترتيب، في حين أن الدالة المتناقصة تعكس الترتيب، و انطلاقا من هذه الملاحظة تعطى التعاريف المناسبة

1ساعة و نصف

تعريف

f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$.

- **القيمة الحدية العظمى** للدالة f على I هي أكبر صورة $f(x)$ تبلغها f من أجل عدد a من I.
  من أجل كلّ x من I، $f(x) \leq f(a)$
- **القيمة الحدية الصغرى** للدالة f على I هي أصغر صورة $f(x)$ تبلغها f من أجل عدد b من I.
  من أجل كلّ x من I، $f(x) \geq f(b)$



ملاحظة:

يمكن أن تبلغ دالة قيمتها الحدية ألعظمى أو الصغرى على مجال عند أكثر من عنصر واحد من المجال.

والقيمة الحدية تكون دائما عددا حقيقيا (بمعنى إنّ $+\infty$ أو $-\infty$ لا يمكن أن يكونا قيمة حدّية).

تقويم:

تمرين 39صحفة 76

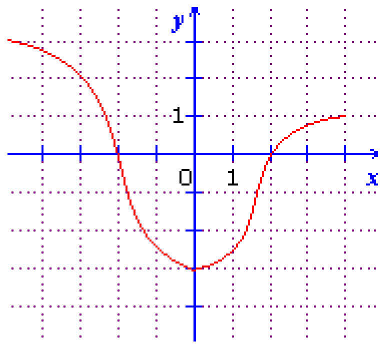
المنحنى الآتي يمثل دالة f معرفة على $[-5;4]$.

صف تغيرات الدالة f بإتمام العبارات الآتية:

" f متناقصة على المجال ...".

" f متزايدة على المجال ...".

" f تقبل قيمة حدية صغرى على المجال $[-5;4]$ عند ...، تساوي ...".



طريقة:

لتعيين اتجاه تغيّر دالة على مجال I ، يمكن أن نفرض أنّ $a < b$ و نقارن بين $f(a)$ و $f(b)$ عبر سلسلة من الاستنتاجات المتوالية معتمدين في ذلك على الفرض الذي انطلقنا منه.

تطبيق:

بفرض الدالة f المعرفة على R بالشكل: $f(x)=(x+2)^2-3$

1. بيّن أنّ f متزايدة تماما على المجال $[-1\,;+\infty[$. ما هو اتجاه تغيّرها على المجال $]-\infty\,;-1]$ ؟

2. شكّل جدول تغيرات f . ما هي القيمة الحدية القصوى للدّالة f ؟

الحلّ

1. ليكن a و b عددين حقيقيين من $[-1\,;+\infty[$ حيث $a < b$.

لدينا $-1 \le a < b$، لنقارن $f(a)$ و $f(b)$ حيث:

$f(a)=(a+1)^2-3$ و $f(b)=(b+1)^2-3$

بما أنّ $-1 \le a < b$، فإنّ $0 \le a+1 < b+1$.

ونجد $(a+1)^2 < (b+1)^2$، لأنّ العددين الموجبين مرتبان في نفس ترتيب مربعيهما.

وبإضافة -3 إلى طرفي المتباينة، نتحصل على:

$(a+1)^2-3 < (b+1)^2-3$

إذن، من أجل كلّ a و b من $[-1\,;+\infty[$ حيث $a < b$، $f(a) < f(b)$.

نستنتج أنّ f متزايدة تماما على المجال $[-1\,;+\infty[$.

- إذا كان a و b من $]-\infty\,;-1]$ حيث $a < b$، فيكون

$a < b \le -1$

منه $a+1 < b+1 \le 0$.

لكن العددين السالبين يرتبان في عكس ترتيب مربعيهما، وبالتالي $(a+1)^2 > (b+1)^2$.

وبإضافة -3 إلى طرفي المتباينة، نتحصل على:

$(a+1)^2-3 \quad (b+1)^2-3$

إذن، من أجل كلّ a و b من $]-\infty\,;-1]$ حيث $a < b$، $f(a) > f(b)$.

نستنتج أنّ f متناقصة تماما على المجال $]-\infty\,;-1]$.

2. **جدول تغيرات** f :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		↘	-3	↗	

ونقرأ على الجدول أنّ f تبلغ **قيمتها الحدية الصغرى** وهي (-3) عند القيمة (-1).

تعاليق

نطبق خواص المتباينات.

لاحظ أنّنا نطبق بعض المبرهنات الواردة في درس الترتيب.

لاحظ أنّ الخطوات التي اتبعناها في المجال $[-1\,;+\infty[$ هي نفسها المتّبعة في المجال $]-\infty\,;-1]$.

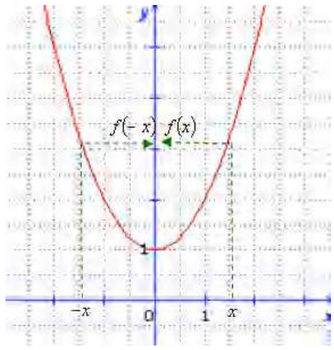
حاول ان تتعرّف على نمط البرهان الذي استعملناه في هذا الحلّ

2ساعة

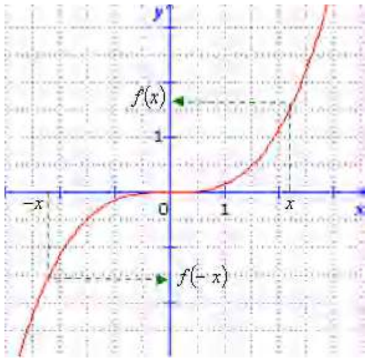
تعريف

D جزء من $\mathbb{R}$، f دالة معرّفة على D.

- نقول إنّ f دالة **زوجية** إذا كان D متناظرا بالنسبة إلى 0 وكان لكلّ x من D، $f(-x)=f(x)$
- نقول إنّ f دالة **فردية** إذا كان D متناظرا بالنسبة إلى 0 وكان لكلّ x من D، $f(-x)=-f(x)$.



بيان الدالة الزوجية في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد يكون متناظرا بالنسبة إلى محور التراتيب.



بيان الدالة فردية في المستوي المنسوب إلى معلم يكون متناظرا بالنسبة إلى مبدأ المعلم.

تعليق: يعطى تعريف كل من الدالتين الفردية و الزوجية انطلاقا من تناظر منحنى دالة بالنسبة الى مبدأ المعلم أو محور التراتيب

أمثلة

1. الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x)=2x^2+1$ دالة زوجية، لأنّ :

مجموعة تعريفها $\mathbb{R}$ متناظرة بالنسبة إلى 0 (بمعنى، لكلّ x من R، $-x\in R$)

ولكلّ x من $\mathbb{R}$، $f(-x)=2(-x)^2+1=2x^2+1=f(x)$.

2. الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة $g(x)=-\frac{2}{x}$ فردية، لأنّ:

مجموعة تعريفها $\mathbb{R}^*$ متناظرة بالنسبة إلى 0 ولكلّ x من $\mathbb{R}^*$، $g(-x)=-\frac{2}{(-x)}=-\left(-\frac{2}{x}\right)=-g(x)$.

3. الدالة h المعرفة على $[0\,;+\infty[$ بالعبارة $f(x)=2x^2+1$ ليست زوجية ولا فردية، لأنّ المجال $[0\,;+\infty[$ غير متناظر بالنسبة إلى 0.

4. الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $u(x)=x+3$ ليست زوجية ولا فردية، لأنّه بالرغم من أنّ مجموعة تعريفها $\mathbb{R}$ متناظرة بالنسبة إلى 0،

لكن $u(-x)=-x+3$ لا يساوي $u(x)$ ولا يساوي $-u(x)$.

ملاحظة:

للبرهان على أنّ f ليست دالة زوجية (أو دالة فردية)، يكفي إيجاد عنصر a من مجموعة تعريفها حيث $f(-a)\neq f(a)$ (أو $f(-a)\neq -f(a)$). ويعتبر التمثيل البياني للدّالّة وسيلة للتحقّق من شفعية الدالة.

تقويم:

تمرين 50صحفة 78

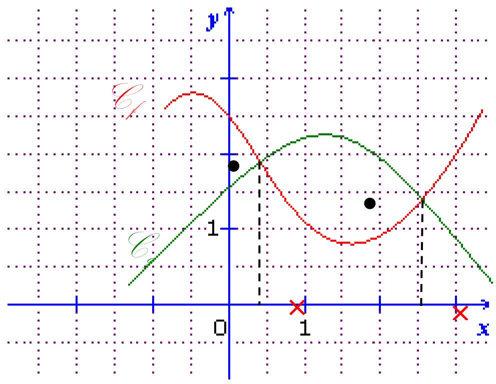
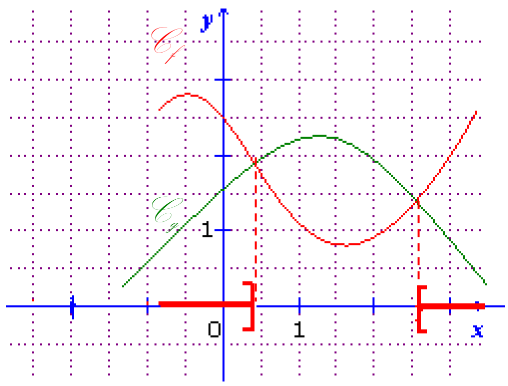
أدرس شفعية الدوال الآتية المعرفة على $\mathbb{R}^*$:

$f:x\mapsto -\dfrac{1}{x^2}$ ؛ $g:x\mapsto x+\dfrac{1}{x}$ $h:x\mapsto x+\dfrac{1}{x^2}$ ؛ $t:x\mapsto x^2+\dfrac{1}{x^2}$

8/. حلّ معادلات ومتراجحات بيانيا

1ساعة و نصف

f و g دالتان معرفتان على مجموعة D، و(C_f) و(C_g) منحنياهما في معلم للمستوي.

• حلّ المعادلة $f(x)=g(x)$ بيانيا يعني: تعيين فواصل النقط المشتركة للمنحنيين (C_f) و (C_g).	• حلّ المتراجحة $f(x)>g(x)$ بيانيا يعني: تعيين فواصل نقط المنحني (C_f) الواقعة فوق المنحني (C_g).
	

أمثلة:

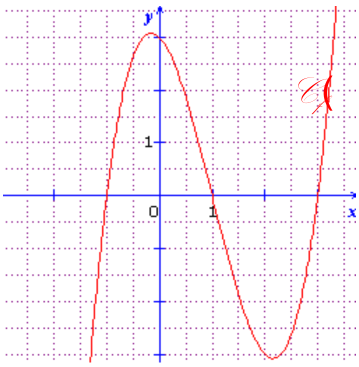
1. نعرّف الدالة f بالمنحني (C_f) المقابل.

حلّ المعادلة $f(x)=0$ بيانيا يؤول إلى تعيين فواصل نقط تقاطع المنحني C_f مع محور الفواصل.

المنحني (C_f) يقطع ثلاث مرات محور الفواصل.

حلول المعادلة $f(x)=0$ هي فواصل هذه النقط:

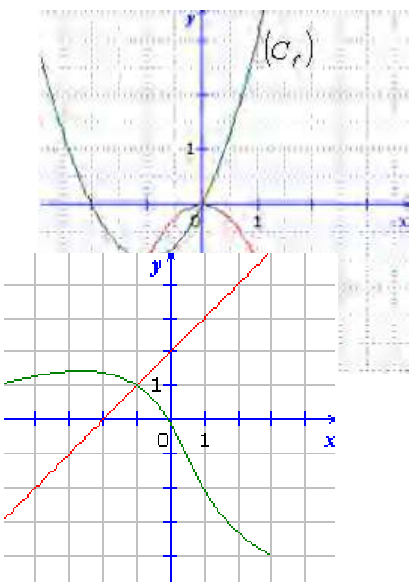
$S=\{-1\,;1\,;3\}$



2. f ، g دالتان معرفتان بالمنحنيين (C_f) و (C_g) (الشكل المقابل).

حلّ المتراجحة $f(x)\geq g(x)$ بيانيا يؤول إلى تعيين فواصل نقط المنحني (C_f) الواقعة فوق المنحني (C_g) وفواصل النقط المشتركة.

$S=]-\infty;-1]\cup[0;+\infty[$



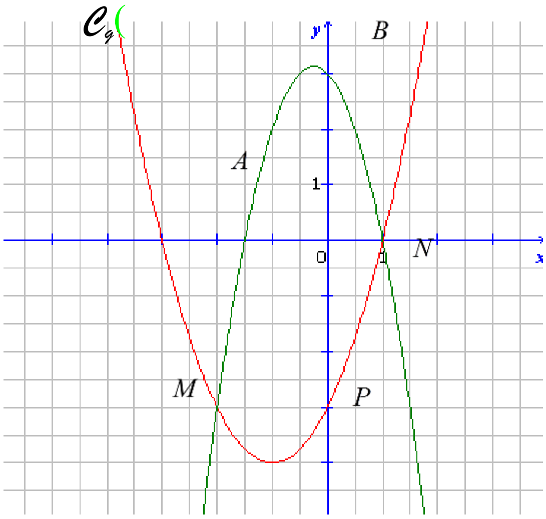
تقويم:

تمرين 33صفحة 75

f و g دالتان معرفتان على المجال $[-5\,;3]$ بتمثيلهما البيانيين.

حلّ بيانيا: $f(x)=g(x)$ $f(x)\geq g(x)$

تطبيق: **صفحة 66** (تحضير منزلي)



لتكن الدالتان f و g الممثلتان كما في الشكل المقابل.
باستعمال المعلومات الواردة في الشكل، أجب على الأسئلة التالية:

1. عيّن مجموعة التعريف لكلّ من f و g.
2. ما هي صورة 0 بكلّ من f و g ؟
3. ما هي سوابق 0 بكلّ من f و g ؟
4. ما هي القيمة الحدية الصغرى للدالة f ومن أجل أي قيمة للمتغير x نتحصّل عليها؟
5. أعط جدول تغيرات f على المجال $[-3\,;1]$.
6. حلّ المعادلة $f(x)=g(x)$