مستوى: سنة أولى جدع مشترك علوم — الفصل الأول

الميدان : الأعداد و الحساب — مذكرة

الكفاءات المستهدفة: التعرف على أنواع المجالات
كتابة عبارة تشتمل رمز القيمة المطلقة على شكل عبارة مكافئة لها بدون رمز القيمة المطلقة.
التعبير عن جزء متصل من **R** بإحدى الصيغ الأربعة: بمجال أو بحصر أو بمسافة أو باستعمال القيمة المطلقة.
✍ الوسائل التعليمية: الكتاب المدرسي، المنهاج ،الوثيقة المرفقة

الموضوع: المجالات و القيمة المطلقة — 8ساعات

I. المجالات — 2ساعة

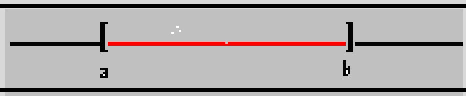
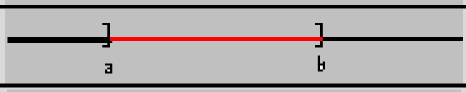
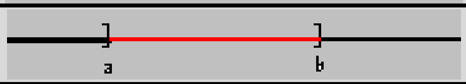
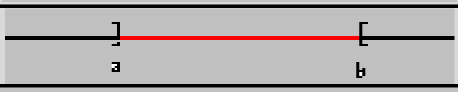
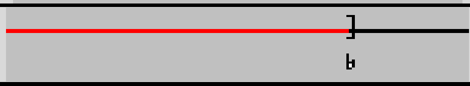
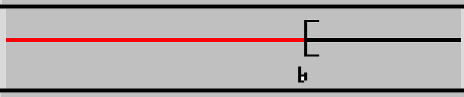
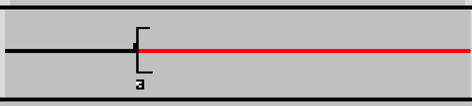
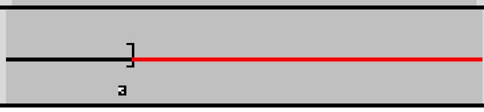
تعريف — 10دقائق

a و b عددان حقيقيان حيث $a \leq b$.
نسمي مجالا مغلقا حدّاه a و b، مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث $a \leq x \leq b$ ،
ونرمز إليه بالرّمز $[a\,;b]$.

1. تمثيل مجال

يمثّل المجال $[a\,;b]$ هندسيا بالشّكل الآتي حيث A و B نقطتان فاصلتاهما a و b على التّرتيب.

2. أنواع المجالات — 30دقيقة

المجال الذي يُرمز إليه ...	هو مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث ...	يُمثّل على المستقيم العددي بالشكل ...
$[a\,;b]$	$a \leq x \leq b$	
$[a\,;b[$	$a \leq x < b$	
$]a\,;b]$	$a < x \leq b$	
$]a\,;b[$	$< x < a\ \ b$	
$]-\infty\,;b]$	$x \leq b$	
$]-\infty\,;b[$	$x < b$	
$[a\,;+\infty[$	$x \geq a$	
$]a\;;\;+\infty[$	$x > a$	

ملاحظات : في المجال المغلق $[a\,;b]$ ، العارضتان موجّهتان نحو الدّاخل.
$]a\,;b[$ هو مجال مفتوح. العارضتان موجّهتان نحو الخارج.
الحدّان a و b ينتميان إلى المجال $[a\,;b]$ ولا ينتميان إلى المجال $]a\,;b[$.
الرمزان $-\infty$ و $+\infty$ (يقرآن: ناقص لانهاية ، زائد لانهاية) لا يمثلان عددين حقيقيين وبالتالي تكون العارضتان مفتوحتين عندهما.

التقويم: 30دقيقة

تمرين 33 صفحة44

. عيّن المجالات الموافقة للأعداد الحقيقية:

1) الأكبر من أو المساوية -2 .

2) المحصورة تماما بين 4 و7.

3) الأصغر تماما من 1.

4) السالبة تماما .

تمرين 39 صفحة44

أكتب على شكل مجالات مجموعات الأعداد الحقيقية المعرفة بالمتباينات الآتية:

1. $2 \le x \le 6$ 3. $x \le -2{,}5$

2. $-4 \le x \le 3$ 4. $x > \sqrt{3}$

3/.تقاطع وإتحاد مجالين 20دقيقة

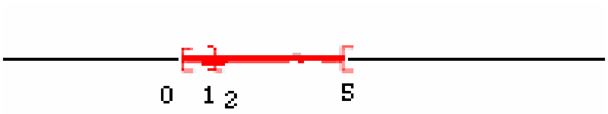
تعريف

- تقاطع مجالين I و J هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تنتمي إلى I و J ، ونرمز إليه بالرّمز $I \cap J$.
- إتحاد مجالين I و J هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تنتمي إلى I أو J ، ونرمز إليه بالرّمز $I \cup J$.

أمثلة

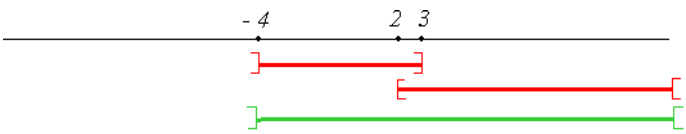
- $[0;2] \cap]1;5]$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث $0 \le x \le 2$ و $1 < x \le 5$.

$$[0;2] \cap]1;5] =]1;2]$$



- $]-4;3] \cup [2;+\infty[$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث $-4 < x \le 3$ و $x \ge 2$

$$]-4;3] \cup [2;+\infty[=]-4;+\infty[$$



التقويم: 30دقيقة

تمرين 37 صفحة45

عيّن المجالات الآتية

1) $[0;2] \cap]1;6]$

2) $[-2;2] \cap]-2;+\infty[$

3) $[-1;3] \cap]3;+\infty[$

4) $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right] \cap \left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

تمرين 41 صفحة45

اكتب على شكل مجالات المجموعات الآتية:

R^* ؛ R^+ ؛ R^- ؛ R

تعليق:
تعالج أنشطة ادماجية توظف تقاطع و اتحاد مجالين

4./عناصر المجال ⏱ 10دقيقية

يتميّز المجال $[a;b]$ بالعناصر الآتية:

- مركزه ، وهو العدد الحقيقي $c=\dfrac{a+b}{2}$
- طوله ، وهو العدد الحقيقي الموجب $b-a$
- نصف قطره ، وهو العدد الحقيقي الموجب $r=\dfrac{b-a}{2}$

II. القيمة المطلقة ⏱ 6ساعات

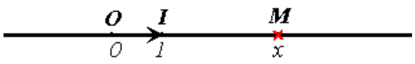
1./القيمة المطلقة لعدد حقيقي ⏱ 30دقيقية

تعريف:

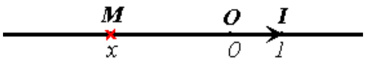
x عدد حقيقي، M نقطة من مستقيم مزوّد بمعلم (O,I) فاصلتها x. القيمة المطلقة للعدد x هي المسافة OM ، ونرمز إليها بالرّمز $|x|$.

ونكتب $|x|=OM$.

- $x\geq 0$



$|x|=OM=x$



$|x|=OM=-x$

📖 **نعليق:**
$(-x)$ ليس عددا سالبا دوما

نتائج:

- بما أنّ المسافة موجبة فإنّ $|x|\geq 0$ من أجل كلّ عدد حقيقي x.
- من أجل كلّ عدد حقيقي x: $\begin{cases} |x|=x \;;\; x\in[0\;;+\infty[\\ |x|=-x \;;\; x\in]-\infty\;;0] \end{cases}$

أمثلة

- من أجل $x=\sqrt{3}$ ، العدد x موجب، وبالتالي $|\sqrt{3}|=\sqrt{3}$.
- من أجل $x=1-\sqrt{2}$ ، العدد x سالب،
  وبالتالي $|1-\sqrt{2}|=-(1-\sqrt{2})=\sqrt{2}-1$
- $|0|=0$

خواص

بفرض x و y عددين حقيقيين، لدينا:

$$|-x|=|x|$$

$$\sqrt{x^2}=|x|$$

$$|xy|=|x|\times|y|$$

$$\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|} \text{ مع } y\neq 0$$

$$|x+y|\leq|x|+|y| \quad \textbf{(المتباينة المثلثية)}$$

🔔 ملاحظة المتباينة المثلثية تصبح $|x+y|=|x|+|y|$ عندما يكون العددان x و y من نفس الإشارة.

أمثلة

- العدد ومعاكسه لهما نفس القيمة المطلقة: $|2|=|-2|=2$.
- $\sqrt{(1-2\sqrt{3})^2}=|1-2\sqrt{3}|=2\sqrt{3}-1$ لأنّ $1-2\sqrt{3}\in R^-$.

- $|-3(x-2)|=|-3|\times|x-2|=3|x-2|$.
- $|x-3|\leq|x|+|-3|$ منه $|x-3|\leq|x|+3$

2/ المسافة بين نقطتين — 10 دقائق

مبرهنة:

إذا كانت A ، B نقطتان من مستقيم مزوّد بمعلم (O,I) فاصلتاهما a ، b على التّرتيب فإنّ $AB=|a-b|=|b-a|$

برهان

نقتصر على الوضعية التي تكون فيها النّقطة B على يمين النّقطة A أي $b\geq a$

وبالتالي $|b-a|=b-a$ ، لأن الوضعية الأخرى تبرهن بنفس الكيفيّة، ونميّز ثلاث حالات:

أ) النّقطتان A ، B على يمين النقطة O.

$AB=OB-OA=b-a$

ب) النّقطتان A ، B على يسار النقطة O.

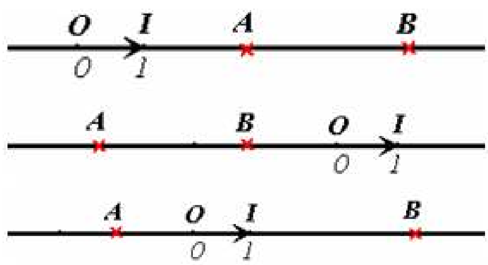
$AB=OA-OB=-a-(-b)=b-a$

ج) النقطة O بين النّقطتين A ، B.

$AB=OA+OB=-a+b=b-a$

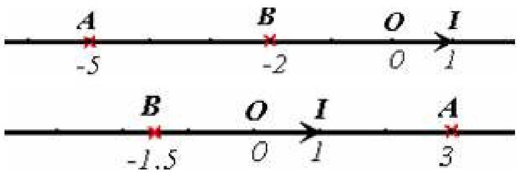
وجدنا في كلّ الحالات:

$AB=|b-a|$



تعليق: تعرف المسافة بين عددين a و b على أنها المسافة بين نقطتين التين فاصلتها a و b بحيث لا تثار أية تعقيدات حول هذا المفهوم الحدسي و يأخذ بمجراه الطبيعي

مثال:



- $AB=|-2-(-5)|=|-5-(-2)|=3$
- $AB=|-1{,}5-3|=|3-(-1{,}5)|=4{,}5$

3/ المسافة بين عددين حقيقيين — 10 دقيقة

تعريف

المسافة بين عددين حقيقيين a و b هي العدد $|a-b|$ (أو $|b-a|$).

نكتب $d(a;b)=|a-b|=|b-a|$

أمثلة

$d(0;-3)=|0-(-3)|=3$ ، $d(4;5)=|4-5|=1$

$d(-2{,}7;-3)=|-2{,}7-(-3)|=0{,}3$ ، $d\left(-11;\frac{17}{3}\right)=\left|-11-\frac{17}{3}\right|=\frac{50}{3}$

تعليق: تترجم $|a-b|$ على أنها المسافة بين a و b

4. القيمة المطلقة — 1 ساعة

مبرهنة

c عدد حقيقي ، r عدد حقيقي موجب.

من أجل كل عدد حقيقي x ، $|x-c|\leq r$ معناه $x\in[c-r;c+r]$

برهان

- "$\Leftarrow$" نبرهن أنّه إذا كان $|x-c|\leq r$ فإنّ $x\in[c-r;c+r]$

ليكن x عددا حقيقيا حيث $|x-c|\leq r$.

- إذا كان $x\geq c$ فإنّ $x-c\in R^+$ ويكون $|x-c|=x-c$ وبالتالي $x-c\leq r$.

ونستنتج $x\leq c+r$ ومنه $c\leq x\leq c+r$ ، وبالتالي $c-r\leq x\leq c+r$

- إذا كان $x \le c$ فإنّ $x-c \in R^-$ ويكون $|x-c| = c-x$ وبالتالي $c-x \le r$.
ونستنتج $c-r \le x$ ومنه $c-r \le x \le c$، وبالتالي $c-r \le x \le c+r$
يتضح أنّ في الحالتين لدينا $c-r \le x \le c+r$.

- " $\Rightarrow$ " نبرهن أنّه إذا كان $x \in [c-r;c+r]$ فإنّ $|x-c| \le r$

ليكن x عددا حقيقيا من المجال $[c-r;c+r]$، أي $c-r \le x \le c+r$ ومنه $-r \le x-c \le r$
لدينا من جهة $x-c \le r$.
ومن جهة أخرى $-r \le x-c$ ، ومنه $c-x \le r$.
وبما أنّ $|x-c|$ يساوي إمّا $x-c$ وإمّا $c-x$، نستخلص $|x-c| \le r$.

أمثلة

$|x-3| \le 1$ معناه $-1 \le x-3 \le 1$ أي $x \in [2;4]$.

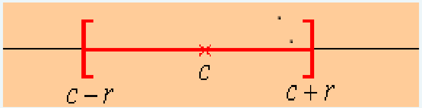
$|x| \le 4$ معناه $-4 \le x \le 4$ أي $x \in [-4;4]$.

$\left|x+\frac{5}{2}\right| \le \frac{3}{2}$ معناه $-\frac{3}{2} \le x+\frac{5}{2} \le \frac{3}{2}$ أي $x \in [-4\,;-1]$.

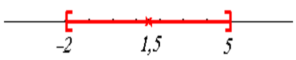
نتيجة

c عدد حقيقي كيفي و r عدد حقيقي موجب.
من أجل كلّ عدد حقيقي x، النصوص الآتية متكافئة:

- $x \in [c-r;c+r]$ (في صيغة مجال)
- $c-r \le x \le c+r$ (في صيغة حصر)
- $d(c;x) \le r$ (في صيغة مسافة)
- $|x-c| \le r$ (في صيغة قيمة مطلقة)



مثال:

التمثيل	المجال	الحصر	المسافة	القيمة المطلقة
	$x \in [-2;5]$	$-2 \le x \le 5$	$d\left(x;\frac{3}{2}\right) \le \frac{7}{2}$	$\left\|x-\frac{3}{2}\right\| \le \frac{7}{2}$

التقويم : **30 دقيقة**

تمرين 81 صفحة47

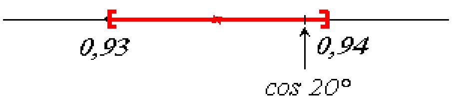
5/ القيم المقربة لعدد حقيقي **20دقيقة**

تعريف

بفرض عدد حقيقي a وعدد عشري d وعدد طبيعي n.
القول أنّ d قيمة مقربة عشرية إلى 10^{-n} للعدد a معناه المسافة من a إلى d أصغر من 10^{-n}
بعبارة أخرى $|a-d| < 10^{-n}$.
وتبعا لكون $d \le a$ أو $d \ge a$، نتحدث عن قيمة مقربة بالنقصان أو بالزيادة.

مثال:

الحاسبة تظهر من أجل $\cos 20°$ العدد 0,9396926208 .يمكن أن نستنتج مثلا $0,93 < \cos 20° < 0,94$.
و 0,94 هما قيمتان مقربتان للعدد $\cos 20°$ ، إلى 10^{-2}، بالنقصان وبالزيادة على الترتيب.
كلّ عدد عشري من المجال $[0,93\,;0,94]$ هو قيمة مقربة للعدد $\cos 20°$ إلى 10^{-2}،
لأنّه موجود على مسافة أصغر من 10^{-2} بالنّسبة إلى $\cos 20°$.



6/.حل معادلة أو متراجحة تتضمن قيمة مطلقة   2ساعةو نصف

تطبيق:

حلّ المعادلات والمتراجحات الآتية:

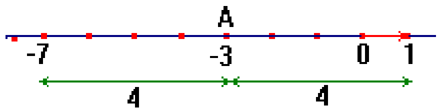
1. $|x+3| = 4$
2. $|x+3| = |x-5|$
3. $|x+3| < |x-5|$

حلّ:

1.على مستقيم مدرج، نسمي M النقطة التي فاصلتها x.

$|x+3|$ هي المسافة من النقطة M إلى النقطة A ذات الفاصلة 3-.

$|x+3| = 4$ تكافئ $MA = 4$



توجد عندئذ نقطتان متناظرتان بالنسبة إلى A ، المسافة من كلّ منهما إلى A هي 4: هما النقطتان اللتان فاصلتاهما -7 و1.

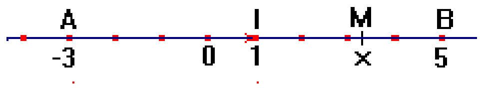
منه مجموعة حلول المعادلة: $S_1 = \{-7;1\}$

2. **على مستقيم مدرج، نسمي M النقطة التي فاصلتها x.**

$|x+3|$ هي المسافة من النقطة M إلى النقطة A ذات الفاصلة 3-

$|x-5|$ هي المسافة من النقطة M إلى النقطة B ذات الفاصلة 5

$|x+3| = |x-5|$ تكافئ $MA=MB$ و $M \in (AB)$



هذا يعني أنّ M منتصف $[AB]$. فاصلة M هي $1 = \frac{-3+5}{2}$.

منه مجموعة حلول المعادلة: $S_2 = \{1\}$

3.بنفس الفرضيات والشكل كما في السؤال 2).

$|x+3| < |x-5|$ تكافئ $MA < MB$

هذا يعني أنّ النقطة M تكون أقرب من النقطة A عنه من B . إذا فرضنا I منتصف $[AB]$، فإنّ النقطة M تكون أقرب من النقطة A عندما تكون قبل I أي من أجل كلّ النقاط ذات فاصل أصغر تماما من 1.

منه مجموعة حلول المتراجحة: $S_3 =]-\infty\ ;1[$

تعليق:

نعبّر عن القيمة المطلقة بعبارات المسافة على المستقيم العددي.

طريقة

لحلّ معادلة أو متراجحة تتضمن قيما مطلقة، نعبّر عن القيم المطلقة بعبارات المسافة على المستقيم العددي ونترجم المساويات أو المتباينات بعبارات المسافة بين نقطتين.

$P \Rightarrow Q$ و $R \Rightarrow Q$ تكافئ $(P$ أو $R) \Rightarrow Q$

تطبيق:

باستعمال الاستدلال بفصل الحالات حل في المعادلة التالية: $2|x-1| = |x|$

طريقة

لحل هذه المعادلة نضع جدول اشارة كل من: $|x|$ و $2|x-1|$ ثم نكتب المعادلة في كل حالة

جدول الاشارات:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\|x\|$	$-x$	0 x	x	
$2\|x-1\|$	$2(1-x)$	$2(1-x)$	0 $2(x-1)$	
$2\|x-1\| = \|x\|$	$2(1-x) = -x$	$2(1-x) = -x$	$2(x-1) = x$	

من الجدول لدينا ثلاث حالات:

على المجال: $]-\infty;0]$ المعادلة تصبح: $2(1-x) = -x$ و الحل هو: $x = 2$ و هذا <u>غير مقبول</u> لأن: 2 لا تنتمي الى المجال $]-\infty;0]$.

على المجال: $[0;1]$ المعادلة تصبح: $2(1-x) = -x$ و الحل هو: $x = \frac{2}{3}$ و هذا<u>مقبول</u> لأن: $\frac{2}{3} \in [0;1]$

على المجال: $[1;+\infty[$ المعادلة تصبح: $2(x-1) = x$ و الحل هو: $x = 2$ و هذا <u>مقبول</u> لأن: 2 تنتمي الى المجال $[1;+\infty[$.

و منه: حلول المعادلة هي: $S = \left\{\frac{2}{3};2\right\}$.

<u>تمرين تطبيقي:</u> (تحضير منزلي)

باستعمال الاستدلال بفصل الحالات حل في المعادلة التالية: $|x+3| + |x-5| = 8$