4

الــدوال الـمــرجـعـيـة

سنة أولى جذع مشترك علوم و تكنولوجيا

إعداد الأستاذة : نرجس مرواني

السنة الدراسية 2020 – 2021

للتواصل معنا تابعونا على مواقع التواصل الاجتماعي :

الأستاذة نرجس مرواني للرياضيات   profmerouani   merouaninardjiss@gmail.com

0770349020

الأستاذة : نرجس مرواني

مذكرة رقم : 01

ثانوية : أحمد رضا حوحو **السنة الدراسية :** 2020 – 2021 **يوم :** **المدة :** 02 ساعة	**المستوى :** 01 ج م ع ت **ميدان التعلم :** تحليل **الوحدة :** الدوال المرجعية **المحتوى المعرفي :** االدالة التآلفية.

المكتسبات القبلية : عموميات على الدوال و بعض خواص الدالة التآلفية و الدالة الخطية.

الكفاءات المستهدفة : حساب نسبة التزايد، تحديد إتجاه تغير و التمثيل البياني للدالة $x \longmapsto ax+b$.

الأدوات المستعملة : الكتاب المدرسي، أنترنت، الأدوات الهندسية و السبورة.

المراحل	سير الحصة	الوقت
الانطلاق	**نشاط مفترح :** ◁ f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ ، نعتبر x_1 و x_2 عددين من I حيث $x_1 < x_2$. ❶ بين أنه إذا كان العدد $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ سالب تماما فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال I. ❷ بين أنه إذا كان العدد $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ موجب تماما فإن الدالة f متزايدة تماما على المجال I. ◁ نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=2x+1$ و $g(x)=-3x+4$. ❶ بفرض x_1 و x_2 عنصرين من D_f حيث $x_1 < x_2$، أحسب العددين $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ و $\dfrac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}$ ثم استنتج اتجاه تغير كل من الدالتين f و g. ❷ في المستوي المزود بمعلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$ أنشئ التمثيل البياني لكل الدالة .	30د
البناء و الترسيخ	**1 نسبة تزايد دالة** **تعريف** f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$، نعتبر العددين x_1 و x_2 من I حيث $x_1 < x_2$. نسمي العدد $\boxed{\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}}$ بنسبة تزايد الدالة f بين العددين x_1 و x_2 **مبرهنة** f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$، نعتبر العددين x_1 و x_2 من I حيث $x_1 < x_2$. تكون الدالة f متزايدة تماما على I إذا و فقط إذا كان العدد $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ موجبا تماما. تكون الدالة f متزايدة تماما على I إذا و فقط إذا كان العدد $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ سالبا تماما.	30 د

30د

البناء و الترسيخ

2 الدالة التآلفية

تعريف

نسمي دالة تآلفية كل دالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل : $\boxed{f(x) = ax + b}$ حيث a و b عددان حقيقيان.

مثال

الدالة $f : x \longmapsto 5x + 2$ هي دالة تآلفية حيث $a = 5$ و $b = 2$

ملاحظة هــامّة

- إذا كان $b = 0$ فإنّ $f : x \longmapsto ax$ تسمى دالة خطية.
- إذا كان $a = 0$ فإنّ $f : x \longmapsto b$ تسمى دالة ثابتة.

❶ الخاصية المميزة للدوال التآلفية :

مبرهنة

تكون الدالة f تآلفيه ، إذا وفقط إذا كانت النسبة $\boxed{\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}}$ ثابتة من أجل كل عددين حقيقيين مختلفين x_1 و x_2.

مثال

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 4x - 1$

من أجل x_1 و x_2 عددان مختلفان من $\mathbb{R}$ فإن :

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{4x_1 - 1 - (4x_2 - 1)}{x_1 - x_2} = \frac{4(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = 4$$

بما أن النسبة $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ ثابتة فإن الدالة f تآلفية.

❷ اتجاه تغير الدالة التآلفية :

مبرهنة

f دالة تآلفية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = ax + b$ حيث a و b عددان حقيقيان.

❖ إذا كان $a = 0$ فإن f ثابتة على $\mathbb{R}$.

❖ إذا كان $a < 0$ فإن f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

❖ إذا كان $a > 0$ فإن f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

❸ جدول تغيرات الدالة التآلفية :

إذا كان $a < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	↗	

إذا كان $a > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	↘	

❹ التمثيل البياني للدالة التآلفية :

مبرهنة

التمثيل البياني لدالة تآلفية معرفة بالعبارة $f(x) = ax + b$ في معلم $(O, \vec{i}; \vec{j})$ هو المستقيم (D) الذي معامل توجيهه a و يشمل النقطة ذات الإحداثيات $(0; b)$ حيث $y = ax + b$ هي المعادلة المبسطة للمستقيم (D).

تطبيق

f دالة تالفية معرفة على $\mathbb{R}$ حيث : $f(x) = ax + b$

1. عين a و b اذا علمت أن : $f(1) = 2$ و $f(3) - f(-1) = -2$
2. أدرس إتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .
3. في المستوي المنسوب الى المعلم $(O, \vec{i}; \vec{j})$ أرسم التمثيل البياني للدالة f.

التقويم

30د

مذكرة رقم : 02 | **الأستاذة : نرجس مرواني**

ثانوية : أحمد رضا حوحو	**المستوى :** 01 ج م ع ت
السنة الدراسية : 2020 – 2021	**ميدان التعلم :** تحليل
يوم :	**الوحدة :** الدوال المرجعية
المدة : 02 ساعة	**المحتوى المعرفي :** االدالة مربع.

المكتسبات القبلية : عموميات على الدوال و بعض خواص الدالة التآلفية و الدالة الخطية.

الكفاءات المستهدفة : تحديد إتجاه تغير و التمثيل البياني للدالة $x \longmapsto x^2$.

الأدوات المستعملة : الكتاب المدرسي، أنترنت، الأدوات الهندسية و السبورة.

المراحل	سير الحصة	الوقت
الانطلاق	**نشاط مفترح :** ◁ لتكن الدالة المعرفةب: f : $f(x) = x^2$، (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$. ❶ عين مجموعة تعريف الدالة D_f. ❷ أدرس إتجاه تغير الدالة f على المجالين $[0;+\infty[$ و $]-\infty;0]$. ❸ شكل جدول تغيرات الدالة ثم استنتج القيمة الحدية الصغرى لها. ❹ أكمل الجدول التالي : <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>◂ إنطلاقا من الجدول أنشئ التمثيل البياني للدالة f على المجال $[0;+\infty[$. ❺ أدرس شفعية الدالة f ثم فسر النتائج بيانيا. ◂ أكمل التمثيل البياني للدالة على المجال $]-\infty;0]$.	30د
البناء و الترسيخ	**1 الدالة مربع** **تعريف** الدالة مربع هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ و التي ترفق بكل عدد حقيقي x مربعه x^2 و من أجل كل عدد حقيقي x نكتب $f(x) = x^2$ **❶ اتجاه تغير الدالة مربع :** **مبرهنة** الدالة مربع متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ و متناقصة تماما على المجال $]-\infty,0]$ **❷ جدول تغيرات الدالة مربع :** مما سبق نتحصل على جدول التغيرات كالتالي :<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>x^2</td><td>↘</td><td>0</td><td>↗</td></tr></table>	10 د

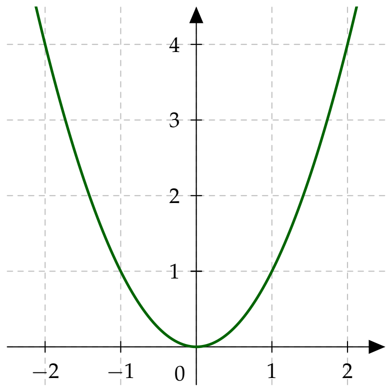
البناء و الترسيخ

③ شفعية الدالة مربع :

خاصية

من أجل كلّ $x \in \mathbb{R}$ لدينا $(-x) \in \mathbb{R}$ و عليه $\mathbb{R}$ متناظرة بالنسبة لمبدأ المعلم حيث : $(-x)^2 = x^2$ أي $f(-x) = f(x)$ و منه نستنتج أنّ الدّالة مربّع زوجية أي تمثيلها البياني متناظر بالنسبة لمحور التراتيب. 10د

④ التمثيل البياني للدالة مربع :



مبرهنة

التمثيل البياني لدالة مربع هو مجموعة النقط $M(x,y)$ حيث : $y = x^2$
التمثيل البياني للدالة مربع هو قطع مكافئ معادلته $y = x^2$ وذروته مبدأ المعلم

التقويم

تطبيق 06 ص 106

تطبيق 02

30د

عين جبريا ثم بيانيا (إعتمادا على منحنى الدالة مربع) حصرا للعدد x^2 في كل حالة :

① $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ ② $-4 \leq x \leq -2$ ③ $x \in [-3, 1[$

2 توظيف الدالة مربع لدراسة اتجاه تغير الدالة $f : x \mapsto (x+a)^2 + b$

البناء و الترسيخ

طريقة:

لدراسة اتجاه تغير الدالة $f : x \mapsto (x+a)^2 + b$

- نحدد إشارة الدالة التآلفية $x \mapsto x + a$ على المجالين $]-\infty; -a]$ و $[-a; +\infty[$.
- نحدد اتجاه تغير الدالة $x \mapsto (x+a)^2$ على المجالين $]-\infty; -a]$ و $[-a; +\infty[$ ثم نستنتج إتجاه تغير f.

10د

لتمثيل المنحنى البياني للدالة f

- نبين أن النقطة $M(x,y)$ من (C_f) إذا و فقط إذا كانت النقطة $N(x+a, y-b)$ من منحنى الدالة مربع.
- نرسم (C_f) حيث (C_f) هو صورة منحنى الدالة مربع بالإنسحاب الذي شعاعه $(-a; b)$.

تطبيق

التقويم

لتكن الدالة g المعرفة بـ : $f : x \mapsto (x-1)^2 + 1$، (C_f) تمثيلها البياني في معلم م.م $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1 أدرس اتجاه تغير الدالة g و شكل جدول تغيراتها.

2 بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $g(x) - g(1) \geqslant 0$. ماذا تستنتج؟

3 إشرح كيفية رسم (C_g) ثم أنشئه بعناية.

30د

ثانوية : أحمد رضا حوحو
السنة الدراسية : 2020 – 2021
يوم :
المدة : 02 ساعة

المستوى : 01 ج م ع ت
ميدان التعلم : تحليل
الوحدة : الدوال المرجعية
المحتوى المعرفي : االدالة مقلوب.

المكتسبات القبلية : عموميات على الدوال و بعض خواص الدالة التآلفية و الدالة الخطية.
الكفاءات المستهدفة : تحديد إتجاه تغير و التمثيل البياني للدالة $x \longmapsto \frac{1}{x}$.
الأدوات المستعملة : الكتاب المدرسي، أنترنت، الأدوات الهندسية و السبورة.

المراحل	سير الحصة	الوقت

الانطلاق — 30د

نشاط مقترح :

◁ f لتكن الدالة المعرفةبـ : $f(x) = \frac{1}{x}$، (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

❶ عين مجموعة تعريف الدالة D_f.

❷ أدرس إتجاه تغير الدالة f على المجالين $]0;+\infty[$ و $]-\infty;0[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

❸ أكمل الجدول التالي :

x	$\frac{1}{2}$	1	2
$f(x)$			

◂ إنطلاقا من الجدول أنشئ التمثيل البياني للدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

❹ أدرس شفعية الدالة f ثم فسر النتائج بيانيا.

◂ أكمل التمثيل البياني للدالة على المجال $]-\infty;0[$.

البناء و الترسيخ — 10 د

1 الدالة مقلوب

تعريف

الدالة مقلوب هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ و التي ترفق بكل عدد حقيقي x مقلوبه $\frac{1}{x}$ و من أجل كل عدد حقيقي x نكتب $f(x) = \frac{1}{x}$

❶ اتجاه تغير الدالة مقلوب :

مبرهنة

الدالة مقلوب متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$ و كذلك متناقصة تماما على المجال $]-\infty,0[$

❷ جدول تغيرات الدالة مقلوب :

مما سبق نتحصل على جدول التغيرات كالتالي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	↘	‖	↘

البناء و الترسيخ

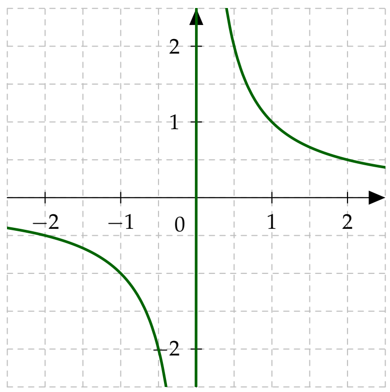
❸ شفعية الدالة مقلوب :

نتيجة

من أجل كلّ $x \in \mathbb{R}^*$ لدينا $(-x) \in \mathbb{R}^*$ و عليه $\mathbb{R}^*$ متناظرة بالنسبة لمبدأ المعلم حيث : $-\frac{1}{x} = \frac{1}{-x}$ أي $f(-x) = -f(x)$ و منه نستنتج أنّ الدّالة مقلوب فردية أي تمثيلها البياني متناظر بالنسبة لمبدأ المعلم.

10د

❹ التمثيل البياني للدالة مقلوب :



مبرهنة

التمثيل البياني لدالة مقلوب هو مجموعة النقط $M(x,y)$ حيث : $y = \frac{1}{x}$

التمثيل البياني للدالة مربع هو قطع زائد معادلته $y = \frac{1}{x}$

التقويم

تطبيق

20د

عين جبريا ثم بيانيا (إعتمادا على منحنى الدالة مقلوب) حصرا للعدد $\frac{1}{x}$ في كل حالة :

① $-2 \le x < -\frac{1}{2}$ ② $2 \le x \le 4$

2 توظيف الدالة مقلوب لدراسة اتجاه تغير الدالة $f : x \mapsto \frac{1}{x+a} + b$

البناء و الترسيخ

طريقة: لدراسة اتجاه تغير الدالة $f : x \mapsto b + \frac{1}{x+a}$:

✍ نحدد إشارة الدالة التآلفية $x \mapsto x + a$ وإشارتها على المجالين : $]-\infty;-a]$ و $[-a;+\infty[$

✍ نحدد اتجاه تغير الدالة $x \mapsto \frac{1}{x+a}$ على المجالين $]-\infty;-a]$ و $[-a;+\infty[$ ثم نستنتج جدول تغيرات f

ولتمثيل (C) منحنى الدالة f نرسم (P) الممثل للدالة مقلوب

10 د

نبين أن $M(x,y)$ من (C) إذا وفقط إذا كانت النقطة $N(x+a, y-b)$ من (P)

نعين شعاع الإنسحاب الذي يسمح بالمرور من (P) إلى (C) وهكذا نستنتج (C)

التقويم

تطبيق

لتكن الدالة h المعرفة بـ : $h : x \mapsto \frac{x+3}{x+2}$، (C_h) تمثيلها البياني في معلم م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$

1 عين D_f

2 بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $f(x) = \frac{1}{x+2} + 1$

30د

3 أدرس اتجاه تغير الدالة h و شكل جدول تغيراتها.

4 إشرح كيفية رسم (C_h) ثم أنشئه بعناية.

مذكرة رقم : 04

الأستاذة : نرجس مرواني

ثانوية : أحمد رضا حوحو	المستوى : 01 ج م ع ت
السنة الدراسية : 2020 – 2021	ميدان التعلم : تحليل
يوم :	الوحدة : الدوال المرجعية
المدة : 02 ساعة	المحتوى المعرفي : االدالة جذر تربيعي.

المكتسبات القبلية : عموميات على الدوال و بعض خواص الدالة التآلفية و الدالة الخطية.

الكفاءات المستهدفة : تحديد إتجاه تغير و التمثيل البياني للدالة $x \longmapsto \sqrt{x}$.

الأدوات المستعملة : الكتاب المدرسي، أنترنت، الأدوات الهندسية و السبورة.

المراحل	سير الحصة	الوقت
الإنطلاق	**نشاط مفترح :**	

◁ f لتكن الدالة المعرفةب : $f(x) = \sqrt{x}$، (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

❶ عين مجموعة تعريف الدالة D_f.

❷ أدرس إتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

❸ أكمل الجدول التالي : (30د)

x	0	1	2	4
$f(x)$				

◂ إنطلاقا من الجدول أنشئ التمثيل البياني للدالة f على المجال $[0;4]$.

البناء و الترسيخ

1 الدالة جذر تربيعي

(20 د)

تعريف

الدالة جذر تربيعي هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ و التي ترفق بكل عدد حقيقي x موجب جذره التربيعي $\sqrt{x}$
و من أجل كل عدد حقيقي x موجب نكتب $f(x) = \sqrt{x}$

❶ اتجاه تغير الدالة جذر تربيعي:

مبرهنة

الدالة جذر تربيعي متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$

❷ جدول تغيرات الدالة جذر تربيعي:

مما سبق نتحصل على جدول التغيرات كالتالي :

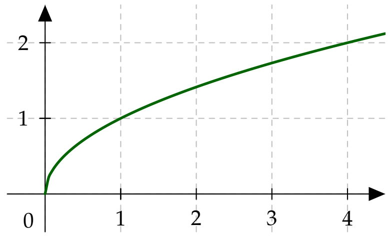
x	0 $\qquad$ $+\infty$
$\sqrt{x}$	0 $\nearrow$

البناء و الترسيخ

❸ التمثيل البياني للدالة جذر تربيعي :

مبرهنة

التمثيل البياني لدالة جذر تربيعي هو مجموعة النقط $M(x,y)$ حيث : $y=\sqrt{x}$



20د

التقويم

تطبيق

عين جبريا ثم بيانيا (إعتمادا على منحنى الدالة مربع) حصرا للعدد x^2 في كل حالة :

① $0 \leq x < 4$ ② $2 \leq x \leq 4$

2 دراسة اتجاه تغير الدالة $f \; : \; x \; \mapsto \; \sqrt{x+a} + b$

البناء و الترسيخ

10د

طريقة:

لدراسة اتجاه تغير الدالة $f : x \mapsto \sqrt{x+a}+b$

- ✍ نحدد إشارة الدالة التآلفية $x \mapsto x+a$ على المجال $]-a;+\infty[$.
- ✍ نحدد اتجاه تغير الدالة $x \mapsto \sqrt{x+a}$ على المجال $]-a;+\infty[$ ثم نستنتج إتجاه تغير الدالة f.

لتمثيل المنحنى البياني للدالة f

- ✍ نبين أن النقطة $M(x,y)$ من (C_f) إذا و فقط إذا كانت النقطة $N(x+a,y-b)$ من منحنى الدالة جذر تربيعي.
- ✍ نرسم (C_f) حيث (C_f) هو صورة منحنى الدالة جذر تربيعي بالإنسحاب الذي شعاعه $(-a;b)$.

التقويم

تطبيق

تطبيق :

لتكن الدالة h المعرفة بـ : $h : x \mapsto h : x \mapsto \sqrt{x+2}+1$، (C_h) تمثيلها البياني في معلم م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$

20د

1 أدرس اتجاه تغير الدالة h و شكل جدول تغيراتها.

2 إشرح كيفية رسم (C_h) ثم أنشئه بعناية.

مذكرة رقم : 05

الأستاذة : نرجس مرواني

ثانوية : أحمد رضا حوحو **السنة الدراسية :** 2020 – 2021 **يوم :** **المدة :** 02 ساعة	**المستوى :** 01 ج م ع ت **ميدان التعلم :** تحليل **الوحدة :** الدوال المرجعية **المحتوى المعرفي :** الدائرة المثلثية.

المكتسبات القبلية : عموميات على الدوال .

الكفاءات المستهدفة : معرفة الراديان والتحويل من الدرجة إلى الراديان والعكس.

الأدوات المستعملة : الكتاب المدرسي، أنترنت، الأدوات الهندسية و السبورة.

المراحل	سير الحصة	الوقت
الإنطلاق	**نشاط 04 ص 84**	30د
البناء و الترسيخ	(انظر أدناه)	30 د

نشاط 04 ص 84

1 الدائرة المثلثية

تعريف

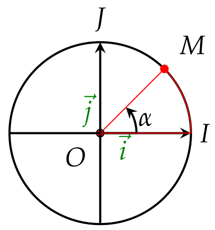
نقول عن دائرة (C) إنها موجهة إذا اخترنا عليها اتجاها للحركة، حيث الاتجاه المباشر (الموجب) هو الاتجاه المخالف لاتجاه دوران عقارب الساعة و الاتجاه غير المباشر (السالب) هو الاتجاه الموافق لاتجاه دوران عقارب الساعة.

$(O;\vec{i};\vec{j})$ معلم متعامد و متجانس للمستوي، الدائرة الموجّهة التي مركزها O و نصف قطرها 1 تسمى دائرة مثلّثية.

❶ قيس زاوية بالراديان :

تعريف

(C) دائرة مثلثية، M نقطة من الدائرة (C)، نسمي قيسا بالراديان للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})$ العدد الحقيقي x حيث x هو طول القوس $\widehat{IM}$ و نكتب $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}) = x\,rad$



❷ العلاقة بين قيس زاوية بالراديان و بالدرجة :

هناك تناسب بين قياس الزاوية بالدرجة و قياسها بالرديان ، وعليه فإن زاوية قياسها $180°$ تكافئ زاوية قياسها πrad

$180° \longrightarrow \pi\, rad$

$d° \longrightarrow \alpha\, rad$

مثال

قيس الزاوية $45°$ بالراديان هو

$180° \longrightarrow \pi\, rad$

$45° \longrightarrow \alpha\, rad$

$$\alpha = \frac{45\pi}{180} = \frac{\pi}{4} rad$$

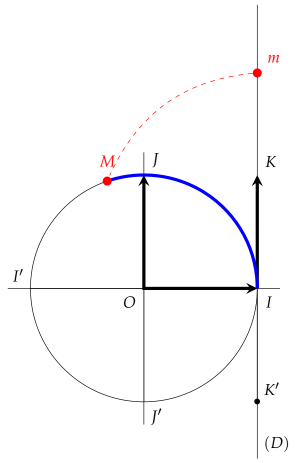
تطبيق 50 ص 110 :

البناء و الترسيخ

30د

❸ المستقيم العددي و الدائرة المثلثية :

نشاط مقترح :



(C) دائرة مثلثية مرفقة بالمعلم $(O,\vec{i};\vec{j})$، (D) مماس للدائرة (C) في النقطة I

نقوم بلف المستقيم (D) حول الدائرة (C)، حيث نلف نصف المستقيم $[IK)$ على الدائرة (C) في الإتجاه المباشر و نلف نصف المستقيم $[IK')$ على الدائرة (C) في الإتجاه غير المباشر

m نقطة من (D) فاصلتها x في المعلم الخطي $(A;I)$.

❶ على كم نقطة من (C) تنطبق m .

❷ كل عدد حقيقي x كم نقطة تقابله من (C) .

❸ كل نقطة من (C) هي صورة لكم عدد حقيقي .

ملاحظات

1. طول القوس $\widehat{IM}$ هو طول القطعة $[IM]$ وهو $|x|$.
2. عندما تتحرك m على (D) انطلاقا من I في اتجاه الشعاع $\overrightarrow{IK}$ تتحرك M على (C) في الاتجاه المباشر (هنا x موجب)
3. عندما تتحرك m على (D) انطلاقا من I في الاتجاه المعاكس للشعاع $\overrightarrow{IK}$ تتحرك M على (C) في الاتجاه غير المباشر (هنا x سالب)
4. كل موضع للنقطة M من الدائرة المثلثية (C) يقابله لانهاية من الأعداد الحقيقية x من الشكل : $x = \alpha + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ و $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}) = \alpha$

مثال

صورة العدد الحقيقي 0 على الدائرة (C) هي النقطة I

صورة العدد الحقيقي $\frac{\pi}{2}$ على الدائرة (C) هي النقطة J

صورة العدد الحقيقي $-\frac{\pi}{2}$ على الدائرة (C) هي النقطة J'

صورة العدد الحقيقي π على الدائرة (C) هي النقطة I'

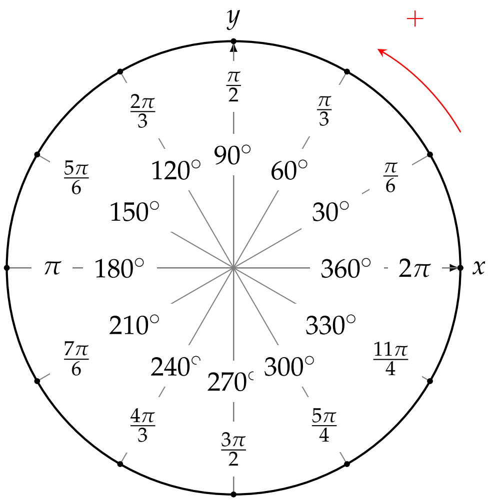
❹ التعليم على الدائرة المثلثية :

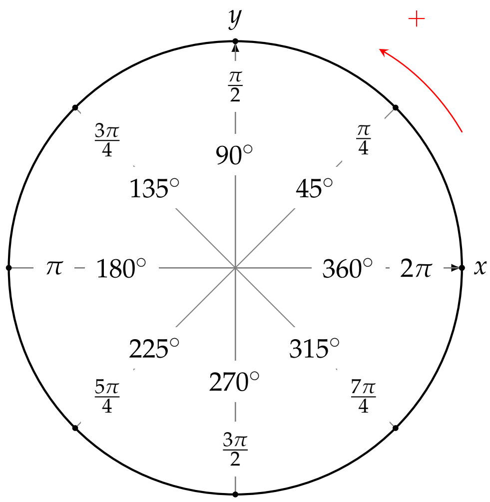
• وضع أقياس الزوايا الشهيرة :

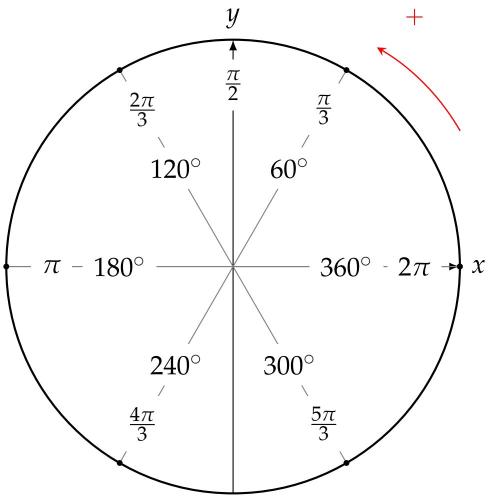
قيس الزاوية بالدرجة	30	45	60	90
قيس الزاوية بالراديان	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

البناء و الترسيخ

30د







◂ وضع أقياس مستنتجة من أقياس الزوايا الشهيرة:

طريقة:

نعين الصورة النقطة M لعدد حقيقي x على الدائرة المثلثية كالآتي:

- إذا كان $x > 0$، M تقطع قوسا طوله x في الاتجاه المباشر.
- إذا كان $x < 0$، M تقطع قوسا طوله $|x|$ في الاتجاه غير المباشر

✍ في حالة $|x| > 2\pi$ باستعمال القسمة نكتب x على الشكل $x = |k| \times 2\pi + \alpha$ حيث k هو عدد الدورات و α عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $]-\pi;\pi]$.

مثال تطبيقي :

نريد تعليم النقط A، B، C و D صور الأعداد التالية على الدائرة المثلثية: $\frac{7\pi}{4}$، $\frac{35\pi}{4}$، $-\frac{2017\pi}{6}$، $-\frac{16\pi}{3}$ على الترتيب.

الحل :

$$\frac{7\pi}{4} = \frac{8\pi-\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 2\pi - \frac{\pi}{4}$$

A هي صورة $\frac{-\pi}{4}$

$$\frac{35\pi}{4} = \frac{32\pi+3\pi}{4} = \frac{32\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = 8\pi + \frac{3\pi}{4} = 4 \times 2\pi + \frac{3\pi}{4}$$

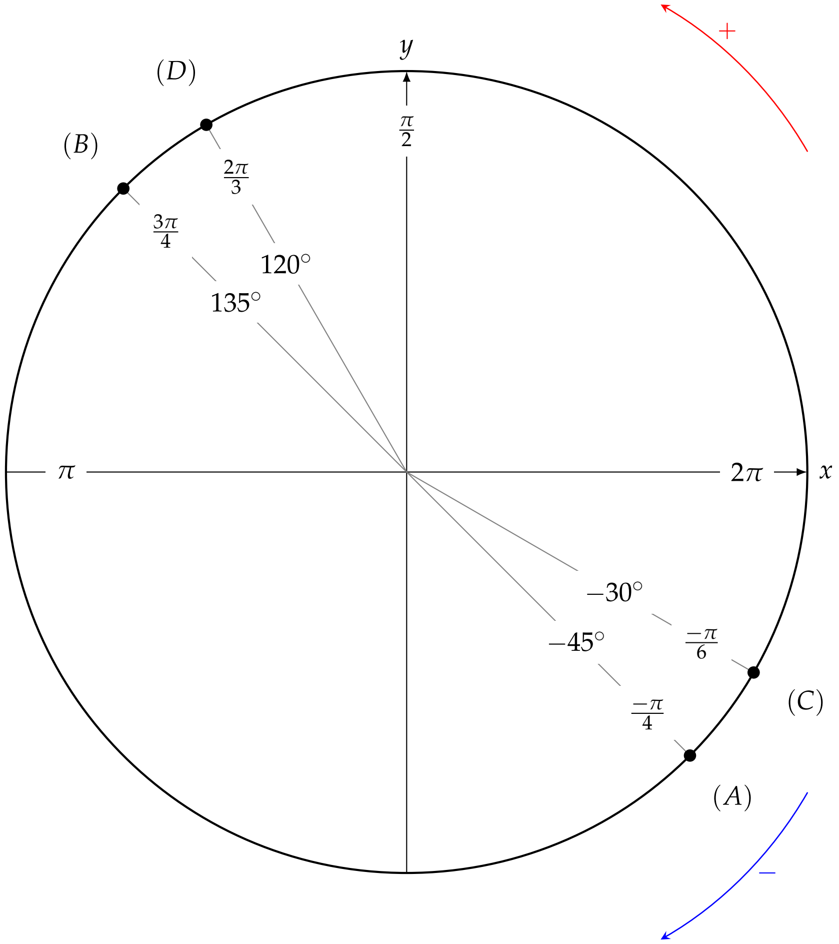
B هي صورة $\frac{3\pi}{4}$

$$-\frac{2017\pi}{6} = \frac{-2016\pi-\pi}{6} = \frac{-2016\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = -336\pi - \frac{\pi}{6} = -186 \times 2\pi - \frac{\pi}{6}$$

C هي صورة $\frac{-\pi}{6}$

$$-\frac{16\pi}{3} = -\frac{18\pi+2\pi}{3} = \frac{-18\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = -6\pi + \frac{2\pi}{3} = -3 \times 2\pi + \frac{2\pi}{3}$$

D هي صورة $\frac{2\pi}{3}$



تطبيق 51 ص 110 :

الأستاذة : نرجس مرواني

مذكرة رقم : 06

المستوى : 01 ج م ع ت	ثانوية : أحمد رضا حوحو
ميدان التعلم : تحليل	السنة الدراسية : 2020 – 2021
الوحدة : الدوال المرجعية	يوم :
المحتوى المعرفي : الدالة جيب و جيب التمام.	المدة : 02 ساعة

المكتسبات القبلية : عموميات على الدوال.

الكفاءات المستهدفة : تحديد اتجاه تغير و التمثيل البياني للدالة جيب و الدالة جيب التمام .

الأدوات المستعملة : الكتاب المدرسي، أنترنت، الأدوات الهندسية و السبورة.

المراحل	سير الحصة	الوقت
الإنطلاق	نشاط 03 ص 84	20د
البناء و الترسيخ		30 د

نشاط 03 ص 84

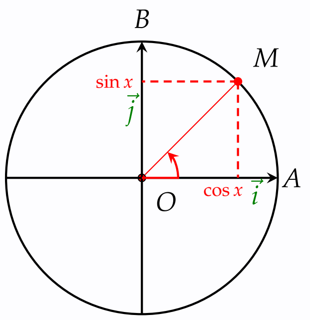
❶ جيب تمام و جيب عدد حقيقي:

تعريف

(C) دائرة مثلثية مركزها O لتكن A و B نقطتين من الدائرة (C) حيث $(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$ معلم متعامد و متجانس مباشر، نضع $\overrightarrow{OA}=\vec{i}$ و $\overrightarrow{OB}=\vec{j}$

لكل عدد حقيقي x صورة M على الدائرة (C) حيث x هو القيس بالراديان للزاوية الموجهة $(\vec{i};\overrightarrow{OM})$

- جيب تمام العدد x هو فاصلة النقطة M ونرمز له بـ : $\cos x$
- جيب العدد x هو ترتيب النقطة M و نرمز له بـ : $\sin x$



نتيجة

إذا كان x قيسا بالرديان للزاوية الموجهة $(\vec{i};\overrightarrow{OM})$ فإن كل عدد من الشكل $x+2k\pi$ حيث k عدد صحيح نسبي هو كذلك قيس بالراديان للزاوية الموجهة $(\vec{i};\overrightarrow{OM})$ أي x و $x+2k\pi$ لهما نفس الصورة M على الدائرة و بالتالي نستنتج $\boxed{\sin(x+2k\pi)=\sin x}$ و $\boxed{\cos(x+2k\pi)=\cos x}$.

⚠ ملاحظة هـامّة

إذا كان $\cos x \neq 0$ فإن الظل هو العدد الحقيقي x الذي نرمز له بـ : $\tan x$ حيث $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$

❷ حساب جيب تمام و جيب عدد حقيقي:

مبرهنة

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :

▷ $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ ▷ $-1\leqslant \cos \leqslant 1$ ▷ $-1\leqslant \sin \leqslant 1$

إثبات

x عدد حقيقي صورته على الدائرة المثلثية (C) هي $M(\cos x; \sin x)$

- حسب نظرية فيثاغورس نجد $OM^2 = OA^2 + OB^2$ حيث $OM = 1$ و منه $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- بما أن $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ معناه أن $\cos^2 x \leqslant 1$ أي $|\cos x| \leqslant 1$ و عليه $-1 \leqslant \cos \leqslant 1$

بنفس الطريقة نجد $-1 \leqslant \sin \leqslant 1$ ■

❸ جيب تمام و جيب أقياس الشهيرة :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

تطبيق 01 :

أحسب جيب تمام و جيب الأعداد التالية : $\frac{13\pi}{2}$، $\frac{9\pi}{4}$، $\frac{19\pi}{3}$،

البناء و الترسيخ

نشاط :

30د

x عدد حقيقي صورته على الدائرة المثلثية هي M

❶ مثل على الدائرة (C) صورة العدد $(-x)$، ماذا تلاحظ ؟.

- عين جيب تمام و جيب العدد $(-x)$

❷ مثل على الدائرة (C) صورة العدد $x + \pi$، ماذا تلاحظ ؟.

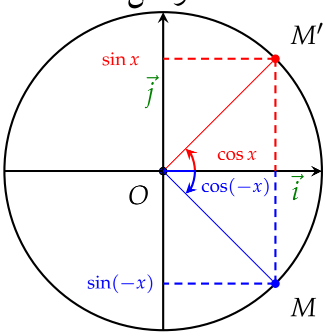
- عين جيب تمام و جيب العدد $x + \pi$

❸ مثل على الدائرة (C) صورة العدد $x - \pi$، ماذا تلاحظ ؟.

- عين جيب تمام و جيب العدد $x - \pi$

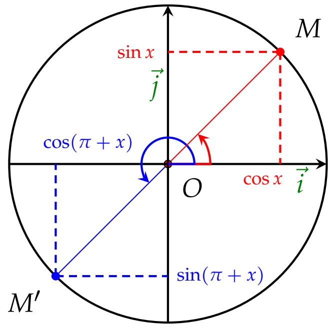
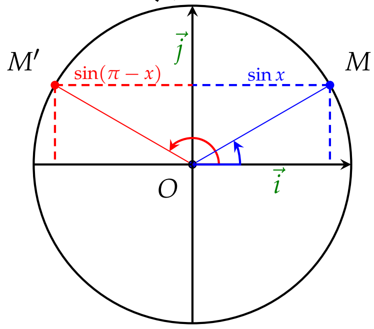
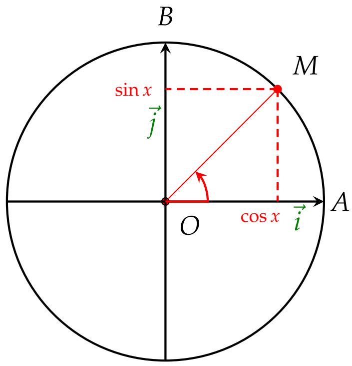
❹ جيب تمام و جيب أقياس مستنتجة من أقياس زوايا شهيرة :

M و M' صورتا العددان x و x' على الدائرة المثلثية

الحالة			العلاقة المثلثية المستنتجة
(1)	$x' = -x$	M و M متناظرتان بالنسبة لمحور الفواصل 	$\begin{cases} \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x \end{cases}$

البناء و الترسيخ

30د

(2)	$x' = \pi + x$	M و M متناظرتان بالنسبة لمبدأ المعلم 	$\begin{cases}\cos(\pi+x) = -\cos x\\ \sin(\pi+x) = -\sin x\end{cases}$
(3)	$x' = \pi - x$	M و M' متناظرتان بالنسبة لمحور التراتيب 	$\begin{cases}\cos(\pi-x) = -\cos x\\ \sin(\pi-x) = \sin x\end{cases}$
(4)	$x' = x + 2\pi k$	M و M' منطبقتان 	$\begin{cases}\cos(x+2\pi k) = \cos x\\ \sin(x+2\pi k) = \sin x\end{cases}$

تطبيق 52 ص 110

1 الدالة جيب تمام

تعريف

الدالة جيب تمام هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ و التي ترفق بكل عدد حقيقي x العدد الحقيقي $\cos x$

ملاحظات

1. مما سبق نعلم أن $\cos(-x) = \cos x$ و عليه الدالة جيب تمام زوجية أي منحناها البياني متناظر بالنسبة لمحور التراتيب
2. من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ نقول أن الدالة cos دالة دورية دورها هو 2π

30د

❶ إتجاه تغير الدالة جيب تمام :

خاصية

❶ **على المجال** $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

العددان الحقيقيان x و x' ينتميان إلى المجال : $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ، صورتاهما M و M' تتغيران على الربع الأول حيث إذا كان $x < x'$ فإن $\cos x > \cos x'$ و منه نستنتج أن الدالة "cos" متناقصة تماما على $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

❶ **على المجال** $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$:

العددان الحقيقيان x و x' ينتميان إلى المجال : $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ ، صورتاهما M و M' تتغيران على الربع الثاني حيث إذا كان $x < x'$ فإن $\cos x > \cos x'$ و منه نستنتج أن الدالة "cos" متناقصة تماما على $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

❶ **على المجال** $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$:

العددان الحقيقيان x و x' ينتميان إلى المجال : $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ ، صورتاهما M و M' تتغيران على الربع الثالث حيث إذا كان $x < x'$ فإن $\cos x < \cos x'$ و منه نستنتج أن الدالة "cos" متزايدة تماما على $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

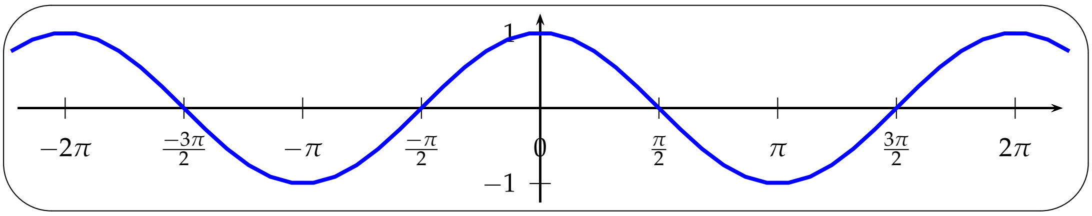
❶ **على المجال** $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$:

العددان الحقيقيان x و x' ينتميان إلى المجال : $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ ، صورتاهما M و M' تتغيران على الربع الرابع حيث إذا كان $x < x'$ فإن $\cos x < \cos x'$ و منه نستنتج أن الدالة "cos" متزايدة تماما على $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.

❷ جدول تغيرات الدالة جيب تمام :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos x$	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1

❸ التمثيل البياني للدالة جيب تمام :



2 الدالة جيب

تعريف

الدالة جيب هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ و التي ترفق بكل عدد حقيقي x العدد الحقيقي $\sin x$

ملاحظات

1. مما سبق نعلم أن $\sin(-x) = -\sin x$ و عليه الدالة جيب تمام فردية أي منحناها البياني متناظر بالنسبة لمبدأ المعلم.
2. من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ نقول أن الدالة sin دالة دورية دورها هو 2π

30د

❶ إتجاه تغير الدالة جيب:

خاصية

❶ **على المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$:**

العددان الحقيقيان x و x' ينتميان إلى المجال : $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ، صورتاهما M و M' تتغيران على الربع الأول حيث إذا كان $x<x'$ فإن $\sin x<\sin x'$ و منه نستنتج أن الدالة "$\sin$" متزايدة تماما على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

❶ **على المجال $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$:**

العددان الحقيقيان x و x' ينتميان إلى المجال : $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ ، صورتاهما M و M' تتغيران على الربع الثاني حيث إذا كان $x<x'$ فإن $\sin x>\sin x'$ و منه نستنتج أن الدالة "$\sin$" متناقصة تماما على $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$

❶ **على المجال $\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$:**

العددان الحقيقيان x و x' ينتميان إلى المجال : $\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$ ، صورتاهما M و M' تتغيران على الربع الثالث حيث إذا كان $x<x'$ فإن $\sin x>\sin x'$ و منه نستنتج أن الدالة "$\sin$" متناقصة تماما على $\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$.

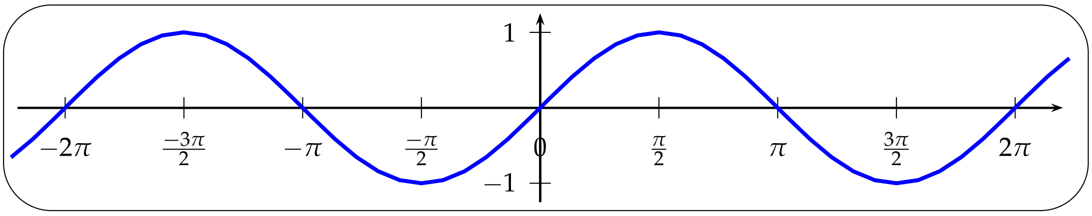
❶ **على المجال $\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$:**

العددان الحقيقيان x و x' ينتميان إلى المجال : $\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$ ، صورتاهما M و M' تتغيران على الربع الرابع حيث إذا كان $x<x'$ فإن $\sin x<\sin x'$ و منه نستنتج أن الدالة "$\sin$" متزايدة تماما على $\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$.

❷ جدول تغيرات الدالة جيب تمام:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0 ↗	1 ↘	0 ↘	-1 ↗	0

❸ التمثيل البياني للدالة جيب تمام:



تطبيق 54 - 55 ص 110