حلول الأنشطة و التمارين الخاصة بمحور الترتيب و المجالات و القيمة المطلقة

I) الترتيب في R :

نشاط 1 :

أ) A ، B ، C ثلاث نقط من المستوي. قارن بين الطول BC والمجموع $AB + AC$.(ناقش وضعيتين).

ب) عبر عن الوضعيتين السابقتين بمتباينة واحدة.

ج) باعتبار $BC = 4cm$ و $AC = \frac{5}{3}$ و $AB = 2\sqrt{2}$ بدون حساب استنتج إشارة $2\sqrt{2}+\frac{5}{3}-4$

حل النشاط :

أ) الوضعية الأولى : إذا كانت النقطة A تنتمي إلى القطعة $[BC]$ فإن : $AB + AC = BC$

الوضعية الثانية : إذا كانت النقطة A لا تنتمي إلى القطعة $[BC]$ فإن : $AB + AC > BC$

ب) التعبير عن الوضعيتين السابقتين بمتباينة واحدة. $AB + AC \geq BC$

ج) باعتبار $BC = 4cm$ و $AC = \frac{5}{3}$ و $AB = 2\sqrt{2}$ بدون حساب استنتج إشارة $2\sqrt{2}+\frac{5}{3}-4$

لدينا : $AB + AC \geq BC$ معناه $2\sqrt{2}+\frac{5}{3}\geq 4$ ومعناه $2\sqrt{2}+\frac{5}{3}-4\geq 0$ أي : $2\sqrt{2}+\frac{5}{3}-4\in R_+$

1 – مقارنة عددين :

تعريف 1 : a و b عددان حقيقيان

القول أن a أكبر من أو يساوي b معناه $a - b$ عدد موجب ونكتب $a \geq b$

$a \geq b$ معناه $(a-b)\in R_+$.

ملاحظات :

1) $a \geq b$ معناه $a-b\geq 0$

2) $a \leq b$ معناه $a-b\leq 0$ و معناه $b-a\geq 0$

3) العبارة $a > b$ تقرأ a أكبر من b وتعني أن $(a-b)\in R_+^*$ أي : $a - b > 0$.

4) العبارة $a < b$ تقرأ a أصغر من b وتعني $(a-b)\in R_-^*$ أي : $a - b < 0$.

5) إذا كان $a > 0$ و $b < 0$ فإن $a > b$ والعكس غير صحيح.

مثال بين أن : $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 > 2\sqrt{6}$

لدينا : $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{6} = 3+2+2\sqrt{6}-2\sqrt{6} = 5$

بما أن 5 موجب تماما فإن $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{6} > 0$ معناه $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 > 2\sqrt{6}$.

تعريف 2 : مقارنة عددين a و b معناه التصريح بإحدى الحالات الثلاث التالية :

$a = b$. $\quad a > b$. $\quad a < b$.

تطبيق : 19 صفحة 43

نعتبر العددين الحقيقيين x و y حيث : $x = \pi\sqrt{2}$ و $y = \dfrac{138}{31}$

احسب بالاستعانة بالحاسبة الفرق $x - y$ ثم استنتج مقارنة x و y.

الحل :

$x - y = \pi\sqrt{2} - \dfrac{138}{31} = 1,831572404...$ ومنه : $x - y > 0$ إذن : $x > y$.

تطبيق : 18 صفحة 43

1) بفرض a عدد حقيقي كيفي ، قارن العددين الحقيقيين $(a^2 - 8a)$ و (-16).

2) استنتج دون استعمال الحاسبة ، مقارنة العددين الحقيقيين $(2-8\sqrt{2})$ و (-16).

الحل :

1) بفرض a عدد حقيقي كيفي ، قارن العددين الحقيقيين $(a^2 - 8a)$ و (-16).

لدينا : $(a^2 - 8a) - (-16) = a^2 - 8a + 16 = (a-4)^2$ ومنه :

إذا كان $a = 4$ فإن : $(a-4)^2 = 0$ وبالتالي : $(a^2 - 8a) = (-16)$

إذا كان $a \neq 4$ فإن $(a-4)^2 > 0$ وبالتالي : $(a^2 - 8a) > (-16)$

2) استنتج دون استعمال الحاسبة ، مقارنة العددين الحقيقيين $(2-8\sqrt{2})$ و (-16).

من السؤال السابق بوضع $a = \sqrt{2}$ نجد $a^2 - 8a = 2 - 8\sqrt{2}$ وبما أن $a \neq 4$ فإن : $(2-8\sqrt{2}) > -16$

تطبيق : لتكن a ، b ، c أعداد حقيقية . بين أنه إذا كان $[a \leq b$ و $b \leq c]$ فإن $a - c \in R^-$ ماذا تستنتج ؟

الحل :

لدينا : $[a \leq b$ و $b \leq c]$ معناه $[a - b \in R^-$ و $b - c \in R^-]$ ولدينا مجموع عددين سالبين هو عدد سالب

إذن : $(a-b)+(b-c) \in R^-$ ومنه : $a - c \in R^-$ وبالتالي : $a \leq c$

مبرهنة 1 : من أجل كل أعداد حقيقية a ، b ، c : إذا كان $[a \leq b$ و $b \leq c]$ فإن : $a \leq c$

نشاط 2 : لتكن a ، b ، c أعداد حقيقية

أ) بين أنه إذا كان $a \geq \sqrt{3}$ فإن $a - \sqrt{2} \geq 0$ هل العكس صحيح ؟

ب) بين أنه $a \geq b$ يكافئ $a + c \geq b + c$

ج) بين أنه $a \geq b$ و $c > 0$ يكافئ $ac \geq bc$ هل التكافؤ يبقى صحيح إذا كان $c < 0$ ؟

حل النشاط :

أ) بين أنه إذا كان $a \geq \sqrt{3}$ فإن $a - \sqrt{2} \geq 0$ هل العكس صحيح ؟

لدينا : $a \geq \sqrt{3}$ وبما أن $\sqrt{3} \geq \sqrt{2}$ حسب المبرهنة 1 نستنتج أن $a \geq \sqrt{2}$ معناه $a - \sqrt{2} \geq 0$

$a - \sqrt{2} \geq 0$ معناه $a \geq \sqrt{2}$ إذا أخذنا $\sqrt{2} < a < \sqrt{3}$ فإن $a \geq \sqrt{3}$ تكون خاطئة وبالتالي العكس غير صحيح

ملاحظة : عكس المبرهنة 1 غير صحيح.

ب) بين أنه $a \geq b$ يكافئ $a + c \geq b + c$

$a + c \geq b + c$ يكافئ $(a + c) - (b + c) \geq 0$ معناه $a - b \geq 0$ ولدينا : $a - b \geq 0$ تكافئ $a \geq b$

إذن : $a \geq b$ يكافئ $a + c \geq b + c$

ج) بين أنه $a \geq b$ و $c > 0$ يكافئ $ac \geq bc$ هل التكافؤ يبقى صحيح إذا كان $c < 0$ ؟

لدينا : $ac - bc = c(a - b)$ بما أن $c > 0$ فإن العبارتين $ac - bc$ و $(a - b)$ لهما نفس الإشارة

أي : $a - b \geq 0$ يكافئ $ac - bc \geq 0$ وبالتالي : $a \geq b$ و $c > 0$ يكافئ $ac \geq bc$

ملاحظة : إذا كان $c < 0$ فإن العبارتين $ac - bc$ و $(a - b)$ لهما إشارتين متعاكستان ومنه التكافؤ ليس صحيح

بل يكون لدينا : $a - b \geq 0$ يكافئ $ac - bc \leq 0$ وبالتالي : $a \geq b$ و $c < 0$ يكافئ $ac \leq bc$

2 – الترتيب والعمليات :

مبرهنة 2 : من أجل كل الأعداد الحقيقية a ، b ، c لدينا :

- $a \geq b$ يكافئ $a + c \geq b + c$
- $a \geq b$ و $c > 0$ يكافئ $ac \geq bc$
- $a \geq b$ و $c < 0$ يكافئ $ac \leq bc$

ملاحظات :

- لتكن a ، b ، c ، d أعداد حقيقية:

نفرض أن $a \geq b$ و $c \geq d$ يكافئ $a + c \geq b + c$ و $c + b \geq d + b$ وهذا حسب مبرهنة 2

وحسب مبرهنة 1 نستنتج $a + c \geq b + d$

- لتكن a ، b ، c ، d أعداد حقيقية موجبة:

نفرض أن $a \geq b$ و $c \geq d$ يكافئ $ac \geq bc$ و $cb \geq db$ ومنه وحسب مبرهنة 1 نستنتج $ac \geq bd$

مبرهنة 3 :

- من أجل كل الأعداد الحقيقية a ، b ، c ، d لدينا : إذا كان $a \geq b$ و $c \geq d$ فإن $a + c \geq b + d$
- من أجل كل الأعداد الحقيقية a ، b ، c ، d **الموجبة** لدينا : إذا كان $a \geq b$ و $c \geq d$ فإن $ac \geq bd$

3 – قواعد المقارنة :

نشاط 3 :

قارن ، دون استعمال الحاسبة مع التبرير:

$\frac{9}{11}$ و $\frac{7}{11}$ ؛ $\frac{13}{21}$ و $\frac{13}{23}$ ؛ $\frac{2}{3}$ و $\frac{5}{8}$ ؛ $0,25^2$ و $1,25^2$ ؛ $\frac{1}{\sqrt{5}}$ و $\frac{1}{2}$

حل النشاط :

$\frac{9}{11}$ و $\frac{7}{11}$ لهما نفس المقام ولدينا : $9 > 7$ إذن $\frac{9}{11} > \frac{7}{11}$

$\frac{13}{21}$ و $\frac{13}{23}$ لهما نفس البسط ولدينا : $23 > 21$ إذن : $\frac{13}{23} < \frac{13}{21}$

$\frac{2}{3}$ و $\frac{5}{8}$: نوحد مقاميهما $\frac{2}{3} = \frac{16}{24}$ و $\frac{5}{8} = \frac{15}{24}$ إذن $\frac{2}{3} > \frac{5}{8}$

؛ $0,25^2$ و $1,25^2$ لدينا $1,25 > 0,25$ و $1,25 > 0,25$ بتطبيق مبرهنة 3 نجد $1,25^2 > 0,25^2$.

$\frac{1}{\sqrt{5}}$ و $\frac{1}{2}$ لدينا $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{10}$ و $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$ ولدينا $25 > 4 \times 5$ إذن $\sqrt{25} > \sqrt{4\times5}$ أي : $5 > 2\sqrt{5}$

وبالتالي : $\frac{2\sqrt{5}}{10} > \frac{5}{10}$ أي : $\frac{1}{\sqrt{5}} > \frac{1}{2}$

مبرهنة 4 : من أجل كل عددين حقيقيين موجبين :

- $a \geq b$ يكافئ $a^2 \geq b^2$
- $a \geq b$ يكافئ $\sqrt{a} \geq \sqrt{b}$

البرهان :

- بالنسبة للأولى تعتمد على : $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

بما أن a و b موجبان فإن $(a + b)$ موجب و لدينا $(a - b)$ موجب إذن $a^2 - b^2$ موجب

ملاحظة : إذا كان a و b سالبين فإن $(a + b)$ سالب و لدينا $(a - b)$ موجب إذن $a^2 - b^2$ يكون سالب.

- بالنسبة للثانية تستنتج من الأولى $\sqrt{a} \geq \sqrt{b}$ يكافئ $\sqrt{a}^2 \geq \sqrt{b}^2$ أي : $\sqrt{a} \geq \sqrt{b}$ يكافئ $a \geq b$

نتيجة : من أجل كل عددين حقيقيين سالبين : $a \geq b$ يكافئ $a^2 \leq b^2$

نشاط 4 : a عدد حقيقي موجب : ناقش حسب قيم العدد a ترتيب الأعداد a ، a^2 ، a^3 .

حل النشاط : لدينا : $a^3 - a^2 = a^2(a - 1)$ و $a^2 - a = a(a - 1)$

ولدينا a و a^2 عددان موجبان ومنه :

إذا كان $0 \leq a \leq 1$ فإن : $(a - 1)$ سالب ومنه : $a^2 - a$ و $a^3 - a^2$ يكونا سالبين وبالتالي $a^2 \leq a$ و $a^3 \leq a^2$

إذا كان $a \geq 1$ فإن : $(a - 1)$ موجب ومنه : $a^2 - a$ و $a^3 - a^2$ يكونا موجبان وبالتالي $a^2 \geq a$ و $a^3 \geq a^2$

مبرهنة 5 : a عدد حقيقي موجب :

- إذا كان : $0 \leq a \leq 1$ فإن : $a^3 \leq a^2 \leq a$
- إذا كان : $a \geq 1$ فإن : $a^3 \geq a^2 \geq a$

ملاحظة : يمكن تعميم ترتيب قوى عدد حقيقي موجب a كما يلي :

إذا كان $0 \leq a \leq 1$ فإن : قوى العدد a ترتب ترتيبا تنازليا أي : $a^n \leq \ldots \leq a^2 \leq a$

إذا كان $a \geq 1$ فإن : قوى العدد a ترتب ترتيبا تصاعديا $a^n \geq \ldots \geq a^2 \geq a$

تطبيق : 30 صفحة 44

لتكن a ، b ، c أعداد حقيقية موجبة تماما .

1) بين أنه إذا كان $a < b$ فإنه $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

2) بين أنه إذا كان $a < b$ فإنه $\frac{c}{a} > \frac{c}{b}$

الحل :

1) تبيان أنه إذا كان $a < b$ فإنه $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

نفرض أن $a < b$ معناه $a - b < 0$ ولدينا $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$ بما أن $a - b < 0$ و $c > 0$ فإن : $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} < 0$

وبالتالي : $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

2) تبيان أنه إذا كان $a < b$ فإنه $\frac{c}{a} > \frac{c}{b}$

نفرض أن $a < b$ معناه $a - b < 0$ ولدينا $\frac{c}{a} - \frac{c}{b} = \frac{cb-ca}{ab} = \frac{c(b-a)}{ab}$

بما أن $a - b < 0$ فإن $b - a > 0$ ولدينا $c > 0$ فإن : $c(b - a) > 0$

ولدينا $a > 0$ و $b > 0$ إذن $ab > 0$ وبالتالي : $\frac{c(b-a)}{ab} > 0$ أي : $\frac{c}{a} - \frac{c}{b} > 0$ معناه $\frac{c}{a} > \frac{c}{b}$.

نتيجة 1 :

إذا كان لكسرين كل من بسطيهما ومقاميهما موجب تماما، وإذا كان لهما نفس البسط فإن الكسر الأصغر منهما هو الذي له أكبر مقام.

إذا كان لكسرين كل من بسطيهما ومقاميهما موجب تماما ، وإذا كان لهما نفس المقام فإن الكسر الأصغر منهما هو الذي له أصغر بسط.

تطبيق : 16 صفحة 43

قارن ، دون استعمال الحاسبة ، كل عددين فيما يلي :

$\frac{17}{22}$ و $\frac{17}{23}$ ؛ $-\frac{9}{11}$ و $-\frac{8}{11}$ ؛ -10^{-3} و -10^{-4} .

الحل :

$\frac{17}{22}$ و $\frac{17}{23}$ لهما نفس البسط ومنه : $\frac{17}{23} < \frac{17}{22}$

$-\frac{9}{11}$ و $-\frac{8}{11}$ نقارن أولا بين الكسرين $\frac{9}{11}$ و $\frac{8}{11}$ لهما نفس المقام و $8 < 9$ إذن : $\frac{8}{11} < \frac{9}{11}$ ومنه: $-\frac{9}{11} < -\frac{8}{11}$

-10^{-3} و -10^{-4} يمكن كتابتهما على شكل كسور كما يلي : $-\frac{1}{10^3}$ و $-\frac{1}{10^4}$

نقارن أولا بين $\frac{1}{10^3}$ و $\frac{1}{10^4}$ لدينا : $10^4 > 10^3$ إذن : $\frac{1}{10^3} < \frac{1}{10^4}$ و منه : $-\frac{1}{10^3} > -\frac{1}{10^4}$

تطبيق : 17 صفحة 43

قارن ، دون استعمال الحاسبة ، كل عددين فيما يلي :

$\frac{1}{2\sqrt{3}}$ و $\frac{1}{3\sqrt{2}}$ ؛ $\sqrt{2}-1$ و $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ ؛ $1+\sqrt{7}$ و $\sqrt{2\sqrt{7}+8}$ ؛ $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ و $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$

الحل :

- $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ و $\frac{1}{3\sqrt{2}}$ لدينا : $\frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$ و $\frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$ وبما أن : $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ فإن : $\frac{\sqrt{2}}{6} < \frac{\sqrt{3}}{6}$
وبالتالي : $\frac{1}{3\sqrt{2}} < \frac{1}{2\sqrt{3}}$
- $\sqrt{2}-1$ و $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ لدينا : $\sqrt{2}-1 = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$
- $1+\sqrt{7}$ و $\sqrt{2\sqrt{7}+8}$ لدينا : $(1+\sqrt{7})^2 = 8+2\sqrt{7}$ يكافئ $1+\sqrt{7} = \sqrt{8+2\sqrt{7}}$
- $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ و $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ لدينا : $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = 5+2\sqrt{6}$ ومنه : $\sqrt{2}+\sqrt{3} = \sqrt{5+2\sqrt{6}}$

تطبيق : 24 صفحة 24

رتب تصاعديا الأعداد a ، a^2 ، a^3 في كل حالة من الحالتين الآتيتين :

- $a = \sqrt{2}-1$
- $a = \frac{3+\sqrt{3}}{3}$

الحل :

- $a = \sqrt{2}-1$: لدينا : $0 < \sqrt{2}-1 < 1$ ومنه $0 < a < 1$ إذن $a^3 < a^2 < a$
- $a = \frac{3+\sqrt{3}}{3}$ لدينا : $a = 1+\frac{\sqrt{3}}{3}$ ومنه $a > 1$ إذن : $a < a^2 < a^3$.

مجموعة رياضيات التعليم الثانوي في الجزائر 2017 / 2018 .

II) المجالات في R :

نشاط 5 :

عين مجموعة الأعداد الحقيقية x التي تحقق المتباينة في كل حالة من الحالات التالية :

$x \geq 0$ ؛ $x < 0$ ؛ $-\frac{3}{2} \leq x \leq 3$ ؛ $\sqrt{3} \leq x < 3$ ؛

حل النشاط :

$x \geq 0$ يكافئ $x \in [0\ ;\ +\infty[$ $x < 0$ يكافئ $x \in]-\infty\ ;\ 0[$

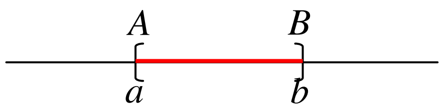
$-\frac{3}{2} \leq x \leq 3$ يكافئ $x \in [-\frac{3}{2}\ ;\ 3]$ $\sqrt{3} \leq x < 3$ يكافئ $x \in [-\sqrt{3}\ ;\ 3[$

1) **التعريف :** a و b عددان حقيقيان حيث $a < b$.

نسمي **مجالا مغلقا** حداه a و b مجموعة الأعداد الحقيقية x التي تحقق المتباينتين $a \leq x \leq b$ ونرمز إليه بالرمز $[a , b]$.

$a \leq x \leq b$ تكافئ $x \in [a , b]$

يمثل المجال $[a , b]$ هندسيا بالشكل الآتي



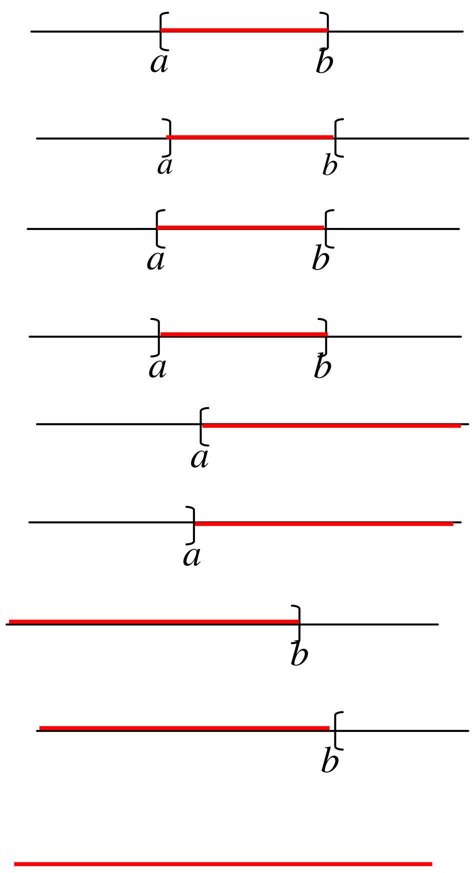
حيث a و b فاصلتا النقطتين A و B على الترتيب.

ملاحظات :

مجموعة الأعداد الحقيقية x التي تحقق المتباينتين $a < x < b$ تسمى مجالا مفتوحا ونرمز إليها بالرمز $]a , b[$.

2) **أنواع المجالات :**

المجال الذي يرمز إليه	هو مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث:
$[a\ ;\ b]$	$a \leq x \leq b$
$]a\ ;\ b[$	$a < x < b$
$[a\ ;\ b[$	$a \leq x < b$
$]a\ ;\ b]$	$a < x \leq b$
$[a;+\infty[$	$x \geq a$
$]a;+\infty[$	$x > a$
$]-\infty;b]$	$x \leq b$
$]-\infty;b[$	$x < b$
$]-\infty;+\infty[$	$x \in \mathbb{R}$



نشاط 6 :

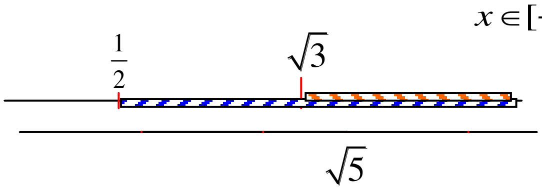
أكتب على شكل مجالات ، مجموعة الأعداد الحقيقية x المعرفة بالمتباينات التالية:

$x \geq -5$ و $x \leq 7$ ؛ $x \geq \frac{1}{2}$ و $x > \sqrt{3}$ ؛ $2 \leq x \leq 5$ و $-2 \leq x \leq \sqrt{5}$

$2 \leq x \leq 5$ أو $-2 \leq x \leq \sqrt{5}$ ؛ $10 \leq x < 17$ أو $-10 \leq x \leq 2$ ؛ $7 < x < 10^2$ أو $x \geq -2$

حل النشاط :

$x \geq -5$ و $x \leq 7$ معناه $-5 \leq x \leq 7$ يكافئ $x \in [-5\ ;\ 7]$

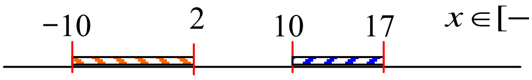


$x \geq \frac{1}{2}$ و $x > \sqrt{3}$ يكافئ $x \in]\sqrt{3} + \infty[$

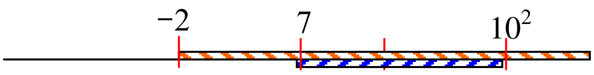
$2 \leq x \leq 5$ و $-2 \leq x \leq \sqrt{5}$ يكافئ $x \in [2\ ;\ \sqrt{5}]$

$2 \leq x \leq 5$ أو $-2 \leq x \leq \sqrt{5}$ يكافئ $x \in [-2\ ;\ 5]$

$10 \leq x < 17$ أو $-10 \leq x \leq 2$ يكافئ $x \in [-10\ ;\ 2] \cup [10\ ;\ 17[$



$7 < x < 10^2$ أو $x \geq -2$ يكافئ $x \in [-2\ ;\ +\infty[$



3) تقاطع واتحاد مجالين :

تقاطع مجالين I و J هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تنتمي إلى I و J ونرمز إليه بالرمز $I \cap J$

اتحاد مجالين I و J هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تنتمي إلى I أو J ونرمز إليه بالرمز $I \cup J$

$I \cap J = \{x / x \in \mathbb{R}, x \in I\{\ x \in J$ أو $I \cup J = \{x / x \in \mathbb{R}, x \in I\ \{\ \ x \in J$

ملاحظة : إذا كان $I \subset J$ فإن : $I \cap J = I$ و $I \cup J = J$

تطبيق : عين مجموعة الأعداد الحقيقية x في كل حالة من الحالتين التاليتين :

$2x^2 - 5x \geq 0$ $\qquad$ $5x^2 \leq \sqrt{5}x$

الحل :

$2x^2 - 5x \geq 0$ معناه $x(2x-5) \geq 0$

$2x^2 - 5x \geq 0$ معناه $[\ (x \geq 0)$ و $(2x - 5 \geq 0)\ ]$ أو $[\ (x \leq 0)$ و $(2x - 5 \leq 0)\ ]$

$2x^2 - 5x \geq 0$ معناه $[\ (x \geq 0)$ و $(x \geq \frac{5}{2})\ ]$ أو $[\ (x \leq 0)$ و $(x \leq \frac{5}{2})\ ]$

$2x^2 - 5x \geq 0$ معناه $(x \geq \frac{5}{2})$ أو $(x \leq 0)$

$2x^2 - 5x \geq 0$ معناه $x \in]-\infty\ ;\ 0] \cup [\frac{5}{2}\ ;\ +\infty[$

$5x^2 \leq \sqrt{5}x$ معناه $5x^2 - \sqrt{5}x \leq 0$

$5x^2 \leq \sqrt{5}x$ معناه $x(5x - \sqrt{5}) \leq 0$

$5x^2 \leq \sqrt{5}x$ معناه $[\ (x \geq 0)$ و $(5x - \sqrt{5} \leq 0)\ ]$ أو $[\ (x \leq 0)$ و $(5x - \sqrt{5} \geq 0)\ ]$

$5x^2 \leq \sqrt{5}x$ معناه $[\ (x \geq 0)$ و $(x \leq \frac{\sqrt{5}}{5})\ ]$ أو $[\ (x \leq 0)$ و $(x \geq \frac{\sqrt{5}}{5})\ ]$

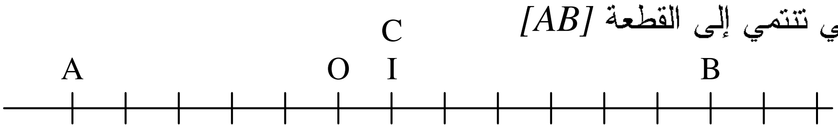
$5x^2 \leq \sqrt{5}x$ معناه $(0 \leq x \leq \frac{\sqrt{5}}{5})$ أو $(x \in \Phi)$ $\qquad$ $5x^2 \leq \sqrt{5}x$ معناه $x \in [0\ ;\ \frac{\sqrt{5}}{5}]$

نشاط 7 :

في المستقيم العددي (O,I) نعلم النقطتين A و B فاصلتاهما (-5) و 7 على الترتيب

عين فاصلة النقطة C منتصف $[AB]$ وأحسب الطول AB.

عين مجموعة فواصل النقط M التي تنتمي إلى القطعة $[AB]$



حل النشاط :

فاصلة C هي $\frac{7-5}{2}=1$ و $AB = 12$.

فواصل النقط M التي تنتمي إلى القطعة $[AB]$ هي المجال $[-5\ ;\ 7]$.

4) المجال المركزي :

تعريف : المجال $[a\ ;\ b]$ يسمى مجال مركزي مركزه العدد $\frac{a+b}{2}$ وطوله $b - a$ ونصف قطره $\frac{b-a}{2}$

ملاحظة : بوضع المركز $c=\frac{a+b}{2}$ و نصف قطره $r=\frac{b-a}{2}$ نجد :

$c+r=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}=b$ و $c-r=\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2}=a$ وبالتالي : $[a\ ;\ b]=[c-r\ ;\ c+r]$

تطبيق : 42 صفحة 45

عين مركز وطول كل مجال : $[-2\ ;\ 2]$ ؛ $[-0,5\ ;\ 0,1]$ ؛ $[-\pi+1\ ;\ \pi+1]$

الحل :

$[-2\ ;\ 2]$ طوله $2-(-2)=4$ ومركزه $\frac{2+(-2)}{2}=0$

$[-0,5\ ;\ 0,1]$ طوله $0,1-(-0,5)=0,6$ ومركزه $\frac{-0,5+0,1}{2}=-0,2$

$[-\pi+1\ ;\ \pi+1]$ طوله $(\pi+1)-(-\pi+1)=2\pi$ ومركزه $\frac{(\pi+1)+(-\pi+1)}{2}=1$

تطبيق : 43 صفحة 45

ما هما حدا المجال المغلق الذي مركزه $-5,3$ وطوله 0.7 ؟

الحل :

لدينا الطول $0,7$ إذن نصف قطر المجال هو $r = 0,35$ والمركز $c = -5,3$

ولدينا المجال المغلق الذي مركزه c ونصف قطره r هو من الشكل : $[c - r\ ;\ c + r]$

$c - r = -5,3 - 0,35 = -0,65$ و $c + r = -0,3 + 0,35 = 0,05$

المجال المغلق الذي مركزه $-5,3$ وطوله 0.7 هو $[-5,65\ ;\ 0,05]$

5) الحصر :

التعريف : a و b عددان حقيقيان حيث $a < b$.

إذا كانت $(a\leq x\leq b)$ فنقول أن العدد x محصور بين العددين a و b ، المجال $[a\ ;\ b]$ هو حصر للعدد x.

ملاحظات :

- [العدد x محصور بين العددين a و b] معناه $(a\leq x\leq b)$ ومعناه $(x\in[a\ ;\ b])$
- إذا كان $a < x < b$ فنقول أن العدد x محصور تماما بين العددين a و b

نتائج : مما سبق لدينا النتائج التالية :

- إذا كان $(a \le x \le b)$ فإن : $(a+c \le x+c \le b+c)$
- إذا كان $(a \le x \le b)$ و $c > 0$ فإن : $(a \times c \le x \times c \le b \times c)$
- إذا كان $(a \le x \le b)$ و $(c \le y \le d)$ فإن : $(a+c \le x+y \le b+d)$

بفرض a و c موجبان :

- إذا كان $(a \le x \le b)$ و $(c \le y \le d)$ فإن : $(a \times c \le x \times y \le b \times d)$
- إذا كان $(a \le x \le b)$ معناه $(\sqrt{a} \le \sqrt{x} \le \sqrt{b})$
- إذا كان $(a \le x \le b)$ معناه $(a^2 \le x^2 \le b^2)$

ملاحظات :

إذا كان $(a \le x \le b)$ و $(c \le y \le d)$ فإن : $(a \le x \le b)$ و $(-d \le -y \le -c)$ ومنه :

إذا كان $(a \le x \le b)$ و $(c \le y \le d)$ فإن : $(a-d \le x-y \le b-c)$

بفرض a و c موجبان تماما :

إذا كان $(a \le x \le b)$ معناه $(\frac{1}{b} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{a})$

إذا كان $(a \le x \le b)$ و $(c \le y \le d)$ فإن : $(a \le x \le b)$ و $(\frac{1}{d} \le \frac{1}{y} \le \frac{1}{c})$ ومنه :

إذا كان $(a \le x \le b)$ و $(c \le y \le d)$ فإن : $(\frac{a}{d} \le \frac{x}{y} \le \frac{b}{c})$

- إذا كان $(a \le x \le b)$ و $(c \le y \le d)$ فإن : $(a-d \le x-y \le b-c)$

بفرض أن a و c موجبان تماما :

- إذا كان $(a \le x \le b)$ معناه $(\frac{1}{b} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{a})$
- إذا كان $(a \le x \le b)$ و $(c \le y \le d)$ فإن : $(\frac{a}{d} \le \frac{x}{y} \le \frac{b}{c})$

تطبيق : 65 صفحة 46 :

باستعمال الحصر $4,4721 < \sqrt{20} < 4,4722$ أحصر كلا من الأعداد $\frac{\sqrt{20}}{2}$ ؛ $10\sqrt{20}$ ؛ $6+\sqrt{20}$ ؛ $-\sqrt{20}$

الحل :

- $4,4721 < \sqrt{20} < 4,4722$ فإن : $\frac{1}{2} \times 4,4721 < \frac{1}{2} \times \sqrt{20} < \frac{1}{2} \times 4,4722$

  $4,4721 < \sqrt{20} < 4,4722$ فإن : $2,23605 < \frac{\sqrt{20}}{2} < 2,2361$
- $4,4721 < \sqrt{20} < 4,4722$ فإن : $10 \times 4,4721 < 10\sqrt{20} < 10 \times 4,4722$

  $4,4721 < \sqrt{20} < 4,4722$ فإن : $44,721 < 10\sqrt{20} < 44,722$
- $4,4721 < \sqrt{20} < 4,4722$ فإن : $6+4,4721 < 6+\sqrt{20} < 6+4,4722$

  $4,4721 < \sqrt{20} < 4,4722$ فإن : $10,4721 < 6+\sqrt{20} < 10,4722$
- $4,4721 < \sqrt{20} < 4,4722$ فإن : $-4,4722 < -\sqrt{20} < -4,4721$

تطبيق : 70 صفحة 47

x و y عددان حقيقيان حيث : $1,2 < x < 1,3$ ؛ $2,4 < y < 2,5$

أحصر $x + y$ ؛ $x - y$ ؛ $5x - 4y$ ؛ xy .

الحل :

- إذا كان [$1,2 < x < 1,3$ و $2,4 < y < 2,5$] فإن $1,2 + 2,4 < x + y < 1,3 + 2,5$

إذا كان [$1,2 < x < 1,3$ و $2,4 < y < 2,5$] فإن : $3,6 < x + y < 3,8$

- إذا كان [$1,2 < x < 1,3$ و $2,4 < y < 2,5$] فإن : $1,2 - 2,5 < x - y < 1,3 - 2,4$

إذا كان [$1,2 < x < 1,3$ و $2,4 < y < 2,5$] فإن : $-1,3 < x - y < -1,1$

- إذا كان [$1,2 < x < 1,3$ و $2,4 < y < 2,5$] فإن [$6 < 5x < 6,5$ و $12 < 5y < 12,5$]

إذا كان [$1,2 < x < 1,3$ و $2,4 < y < 2,5$] فإن [$-6,5 < 5x - 5y < -5,5$]

- إذا كان [$1,2 < x < 1,3$ و $2,4 < y < 2,5$] فإن : $2,88 < xy < 3,25$

تطبيق : 71 صفحة 47

بفرض $x \in [-2 ; 1]$ و $y \in [3 ; 4]$ أحصر $y - x$ ؛ $x - 2y$ ؛ x^2 ؛ y^2 .

الحل :

$x \in [-2 ; 1]$ معناه $-2 \leq x \leq 1$ و $y \in [3 ; 4]$ يكافئ $3 \leq y \leq 4$

- إذا كان $x \in [-2 ; 1]$ و $y \in [3 ; 4]$ فإن $3 - 1 \leq y - x \leq 4 + 2$

إذا كان $x \in [-2 ; 1]$ و $y \in [3 ; 4]$ فإن $2 \leq y - x \leq 6$

إذا كان $x \in [-2 ; 1]$ و $y \in [3 ; 4]$ فإن $y - x \in [2 ; 6]$

- إذا كان $x \in [-2 ; 1]$ و $y \in [3 ; 4]$ فإن $-2 \leq x \leq 1$ و $6 \leq 2y \leq 8$

إذا كان $x \in [-2 ; 1]$ و $y \in [3 ; 4]$ فإن $-2 - 8 \leq x - 2y \leq 1 - 6$

إذا كان $x \in [-2 ; 1]$ و $y \in [3 ; 4]$ فإن $-10 \leq x - 2y \leq -5$

إذا كان $x \in [-2 ; 1]$ و $y \in [3 ; 4]$ فإن $x - 2y \in [-10 ; -5]$

- $x \in [-2 ; 1]$ يكافئ $x \in [-2 ; 0]$ أو $x \in [0 ; 1]$ و يكافئ $-2 \leq x \leq 0$ أو $0 \leq x \leq 1$

$x \in [-2 ; 1]$ يكافئ $0 \leq -x \leq 2$ أو $0 \leq x \leq 1$

$x \in [-2 ; 1]$ يكافئ $0 \leq x^2 \leq 4$ أو $0 \leq x^2 \leq 1$

$x \in [-2 ; 1]$ يكافئ $0 \leq x^2 \leq 4$ $x \in [-2 ; 1]$ يكافئ $x^2 \in [0 ; 4]$

- $y \in [3 ; 4]$ يكافئ $3 \leq y \leq 4$ ويكافئ $9 \leq y^2 \leq 16$.

III) القيمة المطلقة و المسافة :

نشاط 8 :

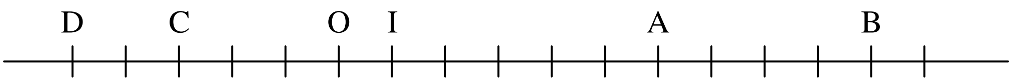
أ) أرسم مستقيما عدديا (d) مبدأه O ثم علم النقط A ، B ، C ، D ذات الفواصل 6 ، 10 ، -3 ، -5

ب) عين المسافات OA ، OB ، OC ، OD ، AB ، AC ، CD ، BC

ج) أنشئ على المستقيم (d) النقطة L حيث $OL = 6$

د) لتكن النقطة M ذات الفاصلة العدد الحقيقي x أحسب OM.

حل النشاط :



تذكير : A و B نقطتان فاصلتاهما x و y على الترتيب في المستقيم العددي (d)

المسافة بين نقطتين A و B هي الفرق بين أكبر فاصلة وأصغر فاصلة

أي : إذا كانت $x \geq y$ فإن : $AB = x - y$ و إذا كانت $x \leq y$ فإن : $AB = y - x$

ب) تعيين المسافات :

$OA = 6$ ؛ $OB = 10$ ؛ $OC = 3$ ؛ $OD = 5$ (المسافة هي عدد حقيقي موجب)

$AB = OB - OA = 4$ ؛ $AC = OA + OC = 9$ ؛ $CD = OD - OC = 2$ ؛ $BC = OB + OC = 16$

ج) إنشاء النقطة L حيث $OL^2 = 36$

$OL^2 = 36$ معناه $OL = 6$

في هذه الحالة توجد نقطتين L و L' متناظرتين بالنسبة إلى O . إذا كانت فاصلة L هي 6 فإن فاصلة L' هي -6

د) حساب OM حيث x هي فاصلة M

إذا كان $x \geq 0$ فإن : $OM = x$ و إذا كان $x \leq 0$ فإن : $OM = -x$

1 – التعريف :

x عدد حقيقي ، M نقطة من مستقيم مزود بمعلم (O,I) فاصلتها x .

القيمة المطلقة للعدد x هي المسافة OM ونرمز إليها بالرمز $|x|$. ونكتب $|x| = OM$.

نتائج :

- من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $|x| \geq 0$ بصيغة أخرى $|x| \in \mathbb{R}_+$
- $(x \geq 0)$ تكافئ $|x| = x$ ‏ ‏ $(x \leq 0)$ تكافئ $|x| = -x$

تطبيق 61 صفحة 46

ما هي القيمة المطلقة لكل من الأعداد : 1) -5 ؛ $(-2)^3$ ؛ $\sqrt{5}-\sqrt{7}$ ؛ $-\dfrac{1}{10^2}$. 2) x عندما يكون $x^2 = 9$.

الحل :

1 – $|-5| = 0-(-5) = 5$ ؛ $|(-2)^3| = 0-(-2)^3 = 2^3$ ؛ $|\sqrt{5}-\sqrt{7}| = 0-(\sqrt{5}-\sqrt{7}) = \sqrt{7}-\sqrt{5}$

$$\left|-\frac{1}{10^2}\right| = 0 - \frac{1}{10^2} = \frac{1}{10^2}$$

2 - لدينا : $x = 3$ أو $x = -3$ إذن : $|x| = 3 - 0 = 3$ أو $|x| = 0 - (-3) = 3$ إذن في كلتا الحالتين $|x| = 3$

2 - خواص :

- من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $|x| = |-x|$
- من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $\sqrt{x^2} = |x|$
- من أجل كل عددين حقيقيين x و y لدينا : $|xy| = |x| \times |y|$ $\qquad$ $|x+y| \le |x| + |y|$ (المتباينة المثلثية)

وإذا كان y غير معدوم فإن : $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$

3 - المسافة

مبرهنة 1 : إذا كانت a و b فاصلتا النقطتين A و B على الترتيب في المعلم (O,I) فإن : $AB = |a-b|$

ملاحظة : $|a-b| = |b-a|$

تعريف : $|a-b|$ تسمى المسافة بين العددين الحقيقيين a و b ، ونرمز لها بالرمز $d(a\,;\,b)$.

ملاحظات :

- من أجل كل عددين حقيقيين x ، y لدينا $d(x;y) = d(y;x) = |x|$
- من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $d(x;0) = d(0;x) = |x|$

تطبيق 49 صفحة 45

بفرض M ، N ، P ثلاث نقط ذات الفواصل -4 ، 0 ، -3 على الترتيب من المستقيم العددي .

أحسب المسافات MN ، NP ، MP .

الحل :

لدينا : $MN = d(-4\,;\,0) = 4$ ؛ $NP = d(-3\,;\,0) = 3$ ؛ $MP = d(-4\,;\,-3) = 1$

تطبيق 50 صفحة 45

أحسب المسافة بين كل عددين حقيقيين فيما يلي . 5 و 11 ؛ -3 و -2 ؛ $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ ؛ 3π و 9

الحل :

$d(5\,;\,11) = 6$ ؛ $d(-3\,;\,-2) = 1$ ؛ $d(\sqrt{2};\sqrt{3}) = 0.317837245...$ ؛ $d(3\pi;9) = 0.42477796...$

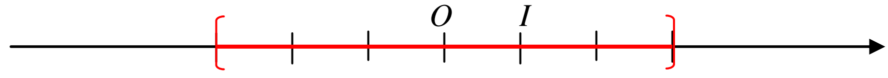
4 - القيمة المطلقة والمجالات :

نشاط 9 : 51 صفحة 45 :

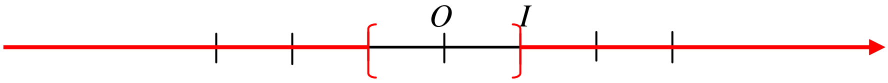
مثل على المستقيم العددي مجموعة الأعداد الحقيقية حيث : 1) $|x| \le 3$ $\qquad$ 2) $|x| > 1$

حل النشاط :

1) $|x| \le 3$



2) $|x| > 1$



نشاط 10 : α عدد حقيقي موجب . و x عدد حقيقي.

1. نفرض أنه $|x| \le \alpha$ أثبت أن $-\alpha \le x \le \alpha$
2. نفرض أن $-\alpha \le x \le \alpha$ أثبت أن $|x| \le \alpha$

حل النشاط :

1. نفرض أن $|x|\le\alpha$

- إذا كان $x\ge 0$ فإن : $|x|=x$ ومنه $x\le\alpha$ إذن : $0\le x\le\alpha$ وبالتالي : $-\alpha\le x\le\alpha$
- إذا كان $x\le 0$ فإن : $|x|=-x$ ومنه $-x\le\alpha$ إذن : $0\le -x\le\alpha$ أي : $-\alpha\le x\le 0$

وبالتالي : $-\alpha\le x\le\alpha$

خلاصة : من أجل كل عدد حقيقي x ، إذا كان $|x|\le\alpha$ فإن : $-\alpha\le x\le\alpha$

2. نفرض أن $-\alpha\le x\le\alpha$

- إذا كان $x\ge 0$ فإن : $0\le x\le\alpha$ ومنه : $0\le|x|\le\alpha$
- إذا كان $x\le 0$ فإن : $-\alpha\le x\le 0$ ومنه : $0\le -x\le\alpha$ أي : $0\le|x|\le\alpha$

خلاصة : من أجل كل عدد حقيقي x ، إذا كان $-\alpha\le x\le\alpha$ فإن : $|x|\le\alpha$

مبرهنة : α عدد حقيقي موجب . من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $|x|\le\alpha$ معناه $-\alpha\le x\le\alpha$

ملاحظة : α عدد حقيقي موجب **تماما**. $|x|<\alpha$ معناه $-\alpha<x<\alpha$

نتائج : α عدد حقيقي موجب . من أجل كل عددين حقيقيين x و c لدينا :

1) $|x-c|\le\alpha$ معناه $-\alpha\le x-c\le\alpha$ معناه $c-\alpha\le x\le c+\alpha$

2) العبارات الأربعة الآتية متكافئة : $|x-c|\le\alpha$ ؛ $d(x;c)\le\alpha$ ؛ $c-\alpha\le x\le c+\alpha$ ؛ $x\in[c-\alpha\ ;\ c+\alpha]$

3) العبارة $|x|\le\alpha$ غير محققة أو غير صحيحة معناه $|x|>\alpha$ محققة (يسمى نفي العبارة)

$|x|\le\alpha$ غير محققة تكافئ $x\notin[-\alpha\ ;\ \alpha]$ وتكافئ $x\in]-\infty\ ;\ -\alpha[\cup]\alpha\ ;\ +\infty[$

إذن : $|x|>\alpha$ تكافئ $x\in]-\infty\ ;\ -\alpha[\cup]\alpha\ ;\ +\infty[$

تطبيق 57 صفحة 46

بفرض K مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث : $|3-x|\le 1$ ، أكتب K على شكل مجال.

الحل : $|3-x|\le 1$ معناه $|x-3|\le 1$ يكافئ $x\in[3-1\ ;\ 3+1]$ أي : $K=[2\ ;\ 4]$

تطبيق 74 صفحة 47

أعط حصرا للعدد x في الحالات الآتية :

1) $10{,}1\le x-8\le 10{,}2$

2) $|x-3|<2{,}5$

3) $d(5;x)\le 10^{-2}$

الحل :

1) $10{,}1\le x-8\le 10{,}2$ يكافئ $18{,}1\le x\le 18{,}2$

2) $|x-3|<2{,}5$ يكافئ $3-2{,}5<x<3+2{,}5$ يكافئ $0{,}5<x<5{,}5$

3) $d(5;x)\le 10^{-2}$ يكافئ $|x-5|\le 10^{-2}$ معناه $5-10^{-2}\le x\le 5+10^{-2}$ يكافئ $4{,}09\le x\le 5{,}01$

تطبيق 79 صفحة 47

ترجم في شكل $|x-a|\le\varepsilon$ ما يلي : 1) $x\in[3\ ;\ 5]$ 2) $x\in[4{,}1\ ;\ 4{,}2]$

الحل :

1) $x\in[3\ ;\ 5]$ مركز المجال هو $a = 4$ ونصف قطره $\varepsilon=\frac{5-3}{2}=1$ ومنه $|x-4|\le 1$

2) $x\in[4{,}1\ ;\ 4{,}2]$ مركز المجال هو $a = 4{,}15$ ونصف قطره $\varepsilon=\frac{4{,}2-4{,}1}{2}=0{,}05=5\times10^{-2}$

ومنه $|x-4{,}15|\le 5\times10^{-2}$

تطبيق 80 صفحة 47 : ترجم في شكل حصر ما يلي : 1) $|x-3|\le 2$ 2) $|x+5{,}4|\le 0{,}1$

الحل :

1) $|x-3|\le 2$ معناه $1\le x\le 5$

2) $|x+5{,}4|\le 0{,}1$ معناه $-5{,}5\le x\le -5{,}3$

تطبيق 81 صفحة 47 أنقل ثم أكمل الجدول التالي :

الحصر	المجال	المسافة	القيمة المطلقة
$2\le x\le 6$	$x\in\ldots$	$d(\ldots\ ;\ \ldots)\le\ldots$	$\lvert\ldots\rvert\le\ldots$
	$x\in]-1\ ;\ 5[$		
		$d(x\ ;\ \frac{3}{2})\le\frac{7}{2}$	
			$\left\lvert x+\frac{5}{2}\right\rvert\le\frac{3}{2}$

الحل :

الحصر	المجال	المسافة	القيمة المطلقة
$2\le x\le 6$	$x\in[2\ ;\ 6]$	$d(x\ ;\ 4)\le 2$	$\lvert x-4\rvert\le 2$
$-1<x<5$	$x\in]-1\ ;\ 5[$	$d(x\ ;\ 2)\le 3$	$\lvert x-2\rvert\le 3$
$2\le x\le 5$	$x\in[2\ ;\ 5]$	$d(x\ ;\ \frac{3}{2})\le\frac{7}{2}$	$\left\lvert x-\frac{3}{2}\right\rvert\le\frac{7}{2}$
$-4\le x\le -1$	$x\in[-4\ ;\ -1]$	$d(x\ ;\ -\frac{5}{2})\le\frac{3}{2}$	$\left\lvert x+\frac{5}{2}\right\rvert\le\frac{3}{2}$

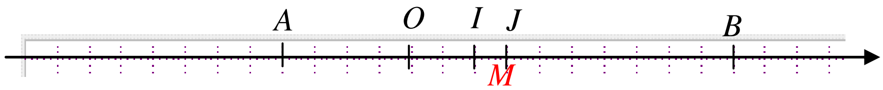
تمرين 55 صفحة 46

على المستقيم المزود بالمعلم $(O\ ;\ I)$ علم النقطتين A و B ذات الفاصلتين -2 و 5 على الترتيب والنقطة J منتصف $[AB]$. M نقطة متحركة فاصلتها x .

عين في كل حالة من الحالات موضع أو مواضع M عندما تحقق فاصلتها الشرط المعين :

1) $|x+2|=|x-5|$ 2) $|x+2|+|x-5|=7$ 3) $|x+2|<|x-5|$

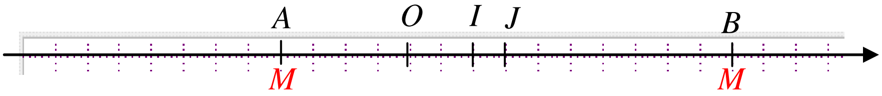
الحل :



- $|x+2|=|x-5|$

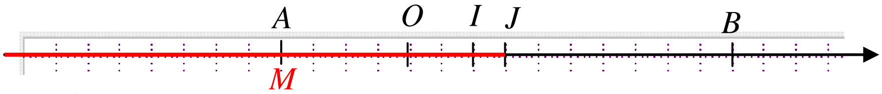
$|x+2|=|x-5|$ معناه $AM=BM$ معناه M هي النقطة J منتصف $[AB]$.

- $|x+2|+|x-5|=7$



$|x+2|+|x-5|=7$ معناه $AM+BM=7$ معناه M هي A أو B

- $|x+2|<|x-5|$



$|x+2|<|x-5|$ معناه $AM<BM$ معناه M تنتمي إلى نصف المستقيم $[JA)$ باستثناء النقطة J.

5 – القيم المقربة :

تعريف : بفرض عدد حقيقي a و عدد عشري d وعدد طبيعي n .

القول أن d قيمة مقربة عشرية إلى 10^{-n} للعدد a معناه المسافة من a إلى d أصغر من 10^{-n}

بعبارة أخرى $|a-d|<10^{-n}$

وتبعا لكون $d \leq a$ أو $d \geq a$ ، نتحدث عن قيمة مقربة بالنقصان أو بالزيادة.

تطبيق 82 صفحة 48 أعط حصرا للعدد المجهول a في الحالات الآتية :

- $2,715$ قيمة مقربة عشرية للعدد a إلى 10^{-3} .
- $3,1416$ قيمة مقربة عشرية للعدد a إلى 10^{-4} .

الحل :

- $2,715$ قيمة مقربة عشرية للعدد a إلى 10^{-3} .

$|a-2,715|<10^{-3}$ معناه $2,715-0,001<a<2,715+0,001$ أي : $2,714<a<2,716$

- $3,1416$ قيمة مقربة عشرية للعدد a إلى 10^{-4} .

$|a-3,1416|<10^{-4}$ معناه $3,1416-0,0001<a<3,1416+0,0001$ أي : $3,1415<a<3,1417$

تطبيق 73 صفحة 47 : عين باستعمال الحاسبة قيما عشرية مقربة بالزيادة و بالنقصان إلى 10^{-4} للأعداد :

$a=\sin 71°$ ؛ $b=\sin^2 71°$ ؛ $c=\cos 71°$ ؛ $d=\cos^2 71°$ ؛ $e=\sin^2 71°+\cos^2 71°$.

قارن العددين 1 و e .

الحل :

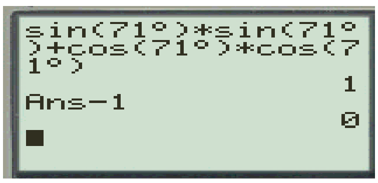
$a\approx 0,945518575$ ؛ $b\approx 0,894005376$ ؛ $c\approx 0,325568154$ ؛ $d\approx 0,105994623$ ؛ $e\approx 1$

$0,9455<a<0,9456$ ؛ $0,8940<b<0,8941$ ؛ $0,3255<c<0,3256$ ؛

$0,1059<d<0,1060$ ؛ $0,9999<e<1,0001$

بالآلة الحاسبة العلمية نجد $e=1$

ونفس النتائج نجدها بالآلة الحاسبة البيانية



حلول تمارين الكتاب المدرسي

16 صفحة 43

قارن ، دون استعمال الحاسبة ، كل عددين فيما يلي :

$\frac{17}{22}$ و $\frac{17}{23}$ ؛ $-\frac{9}{11}$ و $-\frac{8}{11}$ ؛ -10^{-3} و -10^{-4} .

الحل :

$\frac{17}{22}$ و $\frac{17}{23}$ لهما نفس البسط ومنه : $\frac{17}{23} < \frac{17}{22}$

$-\frac{9}{11}$ و $-\frac{8}{11}$ نقارن أولا بين الكسرين $\frac{9}{11}$ و $\frac{8}{11}$ لهما نفس المقام و $8 > 9$ إذن : $\frac{8}{11} > \frac{9}{11}$ ومنه: $-\frac{8}{11} < -\frac{9}{11}$

-10^{-3} و -10^{-4} يمكن كتابتهما على شكل كسور كما يلي : $-\frac{1}{10^3}$ و $-\frac{1}{10^4}$

نقارن أولا بين $\frac{1}{10^3}$ و $\frac{1}{10^4}$ لدينا : $10^3 > 10^4$ إذن : $\frac{1}{10^3} < \frac{1}{10^4}$ و منه : $-\frac{1}{10^3} > -\frac{1}{10^4}$

17 صفحة 43

قارن ، دون استعمال الحاسبة ، كل عددين فيما يلي :

$\frac{1}{2\sqrt{3}}$ و $\frac{1}{3\sqrt{2}}$ ؛ $\sqrt{2}-1$ و $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ ؛ $1+\sqrt{7}$ و $\sqrt{2\sqrt{7}+8}$ ؛ $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ و $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$

الحل :

- $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ و $\frac{1}{3\sqrt{2}}$ لدينا : $\frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ و $\frac{\sqrt{2}}{6} = \frac{1}{3\sqrt{2}}$ وبما أن : $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ فإن : $\frac{\sqrt{3}}{6} < \frac{\sqrt{2}}{6}$

  وبالتالي : $\frac{1}{2\sqrt{3}} < \frac{1}{3\sqrt{2}}$
- $\sqrt{2}-1$ و $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ لدينا : $\sqrt{2}-1 = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$
- $1+\sqrt{7}$ و $\sqrt{2\sqrt{7}+8}$ لدينا : $8+2\sqrt{7} = ^2(1+\sqrt{7})$ يكافئ $1+\sqrt{7} = \sqrt{8+2\sqrt{7}}$
- $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ و $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ لدينا : $5+2\sqrt{6} = ^2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ ومنه : $\sqrt{2}+\sqrt{3} = \sqrt{5+2\sqrt{6}}$

18 صفحة 43

1) بفرض a عدد حقيقي كيفي ، قارن العددين الحقيقيين $(a^2 - 8a)$ و (-16).

2) استنتج دون استعمال الحاسبة ، مقارنة العددين الحقيقيين $(2-8\sqrt{2})$ و (-16).

الحل :

1) بفرض a عدد حقيقي كيفي ، قارن العددين الحقيقيين $(a^2 - 8a)$ و (-16).

لدينا : $(a^2 - 8a) - (-16) = a^2 - 8a + 16 = (a-4)^2$ ومنه :

إذا كان $a = 4$ فإن : $(a-4)^2 = 0$ وبالتالي : $(a^2 - 8a) = (-16)$

إذا كان $a \neq 4$ فإن $(a - 4)^2 > 0$ وبالتالي : $(a^2 - 8a) > (-16)$

2) استنتج دون استعمال الحاسبة ، مقارنة العددين الحقيقيين $(2-8\sqrt{2})$ و (-16).

من السؤال السابق بوضع $a=\sqrt{2}$ نجد $a^2-8a=2-8\sqrt{2}$ وبما أن $a \neq 4$ فإن : $(2-8\sqrt{2}) > -16$

تطبيق : 19 صفحة 43

نعتبر العددين الحقيقيين x و y حيث : $x=\pi\sqrt{2}$ و $y=\dfrac{138}{31}$

احسب بالاستعانة بالحاسبة الفرق $x - y$ ثم استنتج مقارنة x و y.

الحل :

$x-y=\pi\sqrt{2}-\dfrac{138}{31}=1,831572404...$ ومنه : $x - y > 0$ إذن : $x > y$.

21 صفحة 43

ما هو أكبر العددين : $\alpha=\sqrt{1-10^{-19}}$ و $\beta=1-10^{-18}$.

الحل :

لدينا : $a=1-10^{-19}=1-\dfrac{1}{10^{19}}$ و $\beta=1-10^{-18}=1-\dfrac{1}{10^{18}}$

لدينا : $\dfrac{1}{10^{19}}<\dfrac{1}{10^{18}}$ يكافئ أن : $-\dfrac{1}{10^{19}}<-\dfrac{1}{10^{18}}$ يكافئ $1-\dfrac{1}{10^{19}}<1-\dfrac{1}{10^{18}}$ أي : $\beta<a$ هذا من جهة

ومن جهة أخرى لدينا : $1-10^{-19}<1$ يكافئ أن $0<1-10^{-19}$: $\sqrt{1-10^{-19}}<\sqrt{1}$ يكافئ أن $0<\sqrt{1-10^{-19}}<1$ يكافئ أن $0<\sqrt{1-10^{-19}}$

أي : $0<\alpha<1$ إذن : $\alpha^2<\alpha$ وبالتالي : $a<\alpha$

خلاصة : $\beta<a$ و $a<\alpha$ إذن : $\beta<\alpha$

22 صفحة 44

1) نريد ترتيب العداد $1 - 4 \times 10^{-15}$ و $(1 - 4 \times 10^{-15})^2$ و $\dfrac{1}{1+4\times10^{-15}}$ تصاعديا .

هل يكون ذلك ممكنا بالحساب ؟

2) نضع $a = 4 \times 10^{-15}$. ما هو المطلوب عندئذ ؟ استخلص .

الحل :

1) نريد ترتيب العداد $1 - 4 \times 10^{-15}$ و $(1 - 4 \times 10^{-15})^2$ و $\dfrac{1}{1+4\times10^{-15}}$ تصاعديا .

هل يكون ذلك ممكنا بالحساب ؟

الحاسبة تعطي النتيجة 1 وهذا خطئ لأن سعتها لا تتحمل كل الأرقام المعطاة

2) نضع $a = 4 \times 10^{-15}$. ما هو المطلوب عندئذ ؟ استخلص .

إذن : $1 - a = 1 - 4 \times 10^{-15}$ ؛ $(1 - a)^2 =(1 - 4 \times 10^{-15})^2$ ؛ $\dfrac{1}{1+a}=\dfrac{1}{1+4\times10^{-15}}$

لدينا : $0 < a < 1$ وبالتالي $0 < 1 - a < 1$ ومنه : $(1 - a)^2 < 1 - a$

ولدينا : $\frac{a^2}{1+a} = \frac{1-(1-a^2)}{1+a} = \frac{1-(1-a)(1+a)}{1+a} = \frac{1}{1+a} - (1-a)$ إذن : $\frac{1}{1+a} - (1-a) > 0$

وبالتالي : $\frac{1}{1+a} > (1-a)$

خلاصة : $(1-a)^2 < 1-a$ و $(1-a) < \frac{1}{1+a}$ إذن : $(1-a)^2 < (1-a) < \frac{1}{1+a}$

23 صفحة 44

1) أكمل باستعمال < أو > أو = : $\sqrt{9}+\sqrt{16} \ ... \ \sqrt{25}$

2) نعتبر $A=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ و $B=\sqrt{a+b}$. أحسب A^2 و B^2 ثم قارن A و B .

الحل :

1) أكمل باستعمال < أو > أو = : $\sqrt{9}+\sqrt{16} \ ... \ \sqrt{25}$

لدينا : $\sqrt{25}=5$ و $\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7$ إذن : $\sqrt{9}+\sqrt{16} > \sqrt{25}$

2) نعتبر $A=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ و $B=\sqrt{a+b}$. أحسب A^2 و B^2 ثم قارن A و B .

لبدء العمل يجب أن يكون العددان a و b موجبين

$A^2=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}$ $\qquad$ $B^2=\sqrt{a+b}^2=a+b$

ومنه : $A^2=B^2+2\sqrt{ab}$ $\qquad$ إذن : $A^2-B^2 \geq 0$

وبالتالي $A^2 \geq B^2$ يكافئ $A \geq B$

تطبيق : 24 صفحة 24

رتب تصاعديا الأعداد a ، a^2 ، a^3 في كل حالة من الحالتين الآتيتين :

- $a=\sqrt{2}-1$
- $a=\frac{3+\sqrt{3}}{3}$

الحل :

- $a=\sqrt{2}-1$: لدينا : $0<\sqrt{2}-1<1$ ومنه $0<a<1$ إذن $a^3<a^2<a$
- $a=\frac{3+\sqrt{3}}{3}$ لدينا : $a=1+\frac{\sqrt{3}}{3}$ ومنه $a>1$ إذن : $a<a^2<a^3$

25 صفحة 44

x عدد حقيقي حيث $x \in]0\,;1[$. قارن العددين $(1-x)$ و $(1-x)^3$

الحل :

$x \in]0\,;1[$ معناه $0<x<1$ يكافئ $-1<-x<0$ معناه $0<1-x<1$

إذن : $(1-x)^3<(1-x)^2<(1-x)$ $\qquad$ وبالتالي $(1-x)^3<(1-x)$

26 صفحة 44

x عدد حقيقي حيث $x \geq 2$. نعتبر العبارتين $A=(x-1)^2$ و $B=(x-2)^2$

1) حلل الفرق $A - B$.

2) استنتج إشارة $A - B$ ثم قارن A و B .

الحل :

1) حلل الفرق $A - B$.

$$A-B=(x-1)^2-(x-2)^2=[(x-1)-(x-2)]\times[(x-1)+(x-2)]$$

ومنه : $A-B=(2x-3)$

2) استنتج إشارة $A - B$ ثم قارن A و B .

لدينا : $x\geq 2$ معناه $2x\geq 4$ يكافئ $2x-3\geq 1$ إذن : $2x-3>0$ وبالتالي : $A-B>0$

خلاصة : $A>B$

27 صفحة 44

بفرض $x < 0$ و $y < 0$ ، أنقل وأكمل الجدول :

	صحيح	خاطئ	لا يمكن الحكم
$-2x<0$			
$-x+y<0$			
$+x+y<0$			
$-x-y>0$			
$+x-y<0$			

الحل :

	صحيح	خاطئ	لا يمكن الحكم
$-2x<0$		×	
$-x+y<0$			×
$+x+y<0$	×		
$-x-y>0$	×		
$+x-y<0$			×

28 صفحة 44

بفرض $a < b$ بين أن :

1) $2a+1<2b+1$

2) $3-a>3-b$

الحل :

1) $2a+1<2b+1$

$a<b$ يكافئ $2a<2b$ (بضرب الطرفين بنفس العدد الموجب 2)

$a < b$ يكافئ $2a + 1 < 2b + 1$ (نظيف نفس العدد 1)

2) $3 - a > 3 - b$

$a < b$ يكافئ $-a > -b$ (بضرب الطرفين بنفس العدد السالب)

$a < b$ يكافئ $3 - a > 3 - b$ (نظيف للطرفين نفس العدد 3)

29 صفحة 28

برهن أن :

1) $x \geq 3$ معناه $2x + 1 \geq 3$

2) $x \geq 5$ معناه $-x + 4 \leq -1$

الحل :

1) $x \geq 3$ معناه $2x + 1 \geq 3$

$x \geq 3$ معناه $2x \geq 2 \times 3$ أي : $x \geq 3$ معناه $2x \geq 6$ (بضرب بنفس العدد الموجب)

$x \geq 3$ معناه $2x + 1 \geq 6 + 1$ أي : $x \geq 3$ معناه $2x + 1 \geq 7$ (إضافة نفس العدد)

2) $x \geq 5$ معناه $-x + 4 \leq -1$

$x \geq 5$ معناه $-x \leq -5$ (بضرب بنفس العدد السالب)

$x \geq 5$ معناه $-x + 4 \leq -5 + 4$ (إضافة نفس العدد) أي : $x \geq 5$ معناه $-x + 4 \leq -1$

30 صفحة 44

لتكن a ، b ، c أعداد حقيقية موجبة تماما .

1) بين أنه إذا كان $a < b$ فإنه $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

2) بين أنه إذا كان $a < b$ فإنه $\frac{c}{a} > \frac{c}{b}$

الحل :

1) تبيان أنه إذا كان $a < b$ فإنه $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

نفرض أن $a < b$ معناه $a - b < 0$ ولدينا $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$ بما أن $a - b < 0$ و $c > 0$ فإن : $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} < 0$

وبالتالي : $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

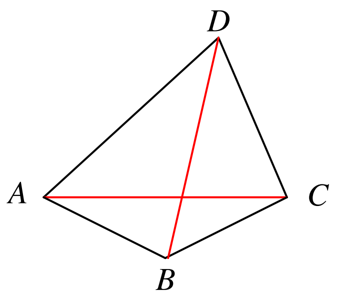
2) تبيان أنه إذا كان $a < b$ فإنه $\frac{c}{a} > \frac{c}{b}$

نفرض أن $a < b$ معناه $a - b < 0$ ولدينا $\frac{c}{a} - \frac{c}{b} = \frac{cb - ca}{ab} = \frac{c(b-a)}{ab}$

بما أن $a - b < 0$ فإن $b - a > 0$ ولدينا $c > 0$ فإن : $c(b - a) > 0$

ولدينا $a > 0$ و $b > 0$ إذن $ab > 0$ وبالتالي : $\frac{c(b-a)}{ab} > 0$ أي : $\frac{c}{a} - \frac{c}{b} > 0$ معناه $\frac{c}{a} > \frac{c}{b}$.

31 صفحة 28



$ABCD$ رباعي محيطه P

برهن أن : $AC + BD < P$.

الحل :

في المثلث مجموع ضلعين يكون أكبر تماما من الضلع الثالث

في المثلث ABD لدينا : $AD + AB > BD$

و في المثلث CBD لدينا : $DC + CB > BD$

و في المثلث ACD لدينا : $AD + DC > AC$

و في المثلث ACB لدينا : $AB + BC > AC$

وبجمع طرف إلى طرف المتباينات الأربعة نجد :

$$AD + AB + DC + CB + AD + DC + AB + BC > 2\,BD + 2\,AC$$

ومنه: $2(AD + AB + DC + CB) > 2\,(BD + AC)$

أي : $2P > 2\,(BD + AC)$ وهذا يكافئ أن : $P > BD + AC$.

32 صفحة 44

أين الخطأ في الاستدلال التالي :

" $\pi > 3$ وبالتالي $3\pi > 9$ ومنه : $3\pi - \pi^2 > 9 - \pi^2$ إذن : $\pi(3-\pi) > (3-\pi)(3+\pi)$

وهكذا $\pi > 3+\pi$ وعليه $3 > 0$ "

الحل :

$\pi > 3$ وبالتالي $3\pi > 9$ صحيح لأن ضرب الطرفين بنفس العدد الموجب 3 .

ومنه : $3\pi - \pi^2 > 9 - \pi^2$ صحيح لأن إضافة للطرفين نفس العدد $-\pi^2$

إذن : $\pi(3-\pi) > (3-\pi)(3+\pi)$ صحيح لأن حللنا الطرفين

وهكذا $\pi > 3+\pi$ خطأ لأنه لما نقسم الطرفين على عدد سالب تماما نغير المتباينة

وعليه $3 > 0$ صحيح لأن إضافة للطرفين نفس العدد $-\pi$.

33 صفحة 44

عين المجالات الموافقة للأعداد الحقيقية :

1) الأكبر من أو المساوية 2 - .

2) المحصورة تماما بين 4 و 7 .

3) الأصغر تماما من 1 .

4) السالبة تماما أو الأكبر من أو المساوية 3 .

الحل :

1) الأكبر من أو المساوية 2 - . $[-2\,;\,+\infty[$

2) المحصورة تماما بين 4 و 7 . $]4\,;\,7[$

3) الأصغر تماما من 1 . $]-\infty\,;1[$

4) السالبة تماما أو الأكبر من أو المساوية 3 . $]-\infty\,;0[\cup[3\,;+\infty[$

34 صفحة 44

بفرض قائمة أعداد حقيقية : $-2{,}2$ ؛ π ؛ 5 ؛ $\sqrt{2}$ ؛ $-\dfrac{11}{3}$

و قائمة المجالات : $[-2\,;2]$ ؛ $[-1\,;5[$ ؛ $[-4\,;+\infty[$ ؛ $]-\infty\,;+\infty[$

بين بالنسبة إلى كل مجال إن كان كل عدد ينتمي إليه أو لا ينتمي .

الحل :

- لدينا : $-2{,}2<-2$ إذن : $-2{,}2\notin[-2\,;2]$ $\pi>2$ إذن : $\pi\notin[-2\,;2]$
$5>2$ إذن : $5\notin[-2\,;2]$ ؛ $-2<\sqrt{2}<2$ إذن : $\sqrt{2}\in[-2\,;2]$ ؛ $-\dfrac{11}{3}<-2$ إذن : $-\dfrac{11}{3}\notin[-2\,;2]$
- لدينا : $-2{,}2<-1$ إذن : $-2{,}2\notin[-1\,;5[$ ؛ $-1<\pi<5$ إذن : $\pi\in[-1\,;5[$
$[-1\,;5[$ مجال مفتوح من جهة 5 إذن $5\notin[-1\,;5[$ ؛ $-1<\sqrt{2}<5$ إذن : $\sqrt{2}\in[-1\,;5[$
$-\dfrac{11}{3}<-1$ إذن $-\dfrac{11}{3}\notin[-1\,;5[$
- لدينا : $-2{,}2>-4$ إذن : $-2{,}2\in[-4\,;+\infty[$ ؛ $\pi>-4$ إذن : $\pi\in[-4\,;+\infty[$
$5>-4$ إذن : $5\in[-4\,;+\infty[$ ؛ $\sqrt{2}>-4$ إذن : $\sqrt{2}\in[-4\,;+\infty[$ ؛
$-\dfrac{11}{3}>-\dfrac{12}{3}$ إذن : $-\dfrac{11}{3}\in[-4\,;+\infty[$
- لدينا : $-2{,}2$ ؛ π ؛ 5 ؛ $\sqrt{2}$ ؛ $-\dfrac{11}{3}$ كلها أعداد حقيقية إذن كل عدد من هذه الأعداد تنتمي إلى المجال
$]-\infty\,;+\infty[$.

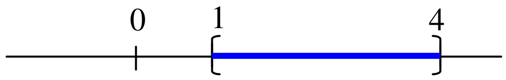
35 صفحة 44

مثل على المستقيم العدد المجالات الآتية :

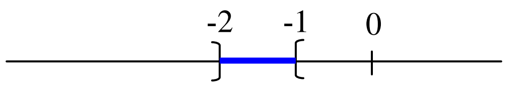
$[1\,;4]$ ؛ $]-2\,;-1[$ ؛ $[\dfrac{1}{2}\,;+\infty[$ ؛ $]-\infty\,;-\dfrac{3}{2}[$

الحل :

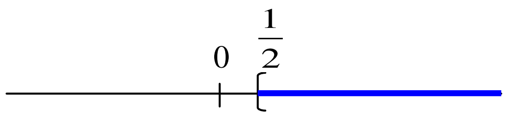
- $[1\,;4]$



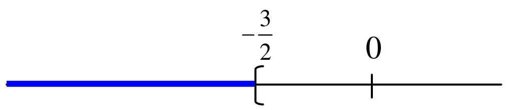
- $]-2\,;-1[$



- $[\dfrac{1}{2}\,;+\infty[$



- $]-\infty\,;-\dfrac{3}{2}[$



36 صفحة 44

عين كل الأعداد الطبيعية ثم كل الأعداد الصحيحة النسبية التي تنتمي إلى المجال $[-2\,;\,\frac{9}{2}]$.

الحل :

لدينا : $-2<-1<0<1<2<3<4<\frac{9}{2}$

إذن الأعداد الطبيعية التي تنتمي إلى المجال $[-2\,;\,\frac{9}{2}]$ هي : 0 ؛ 1 ؛ 2 ؛ 3 ؛ 4 .

و الأعداد الصحيحة النسبية التي تنتمي إلى المجال $[-2\,;\,\frac{9}{2}]$ هي : 2 - ؛ 1 - ؛ 0 ؛ 1 ؛ 2 ؛ 3 ؛ 4 .

37 صفحة 45

عين المجالات الآتية :

1) $[0\,;\,2]\cap]1\,;\,6]$.

2) $[-2\,;\,2]\cap]-2\,;\,+\infty[$.

3) $[-1\,;\,3]\cap]3\,;\,+\infty[$.

4) $]-\infty\,;\,\frac{1}{2}]\cap[\frac{1}{2}\,;\,+\infty[$.

الحل :

1) $[0\,;\,2]\cap]1\,;\,6]=[0\,;\,6]$.

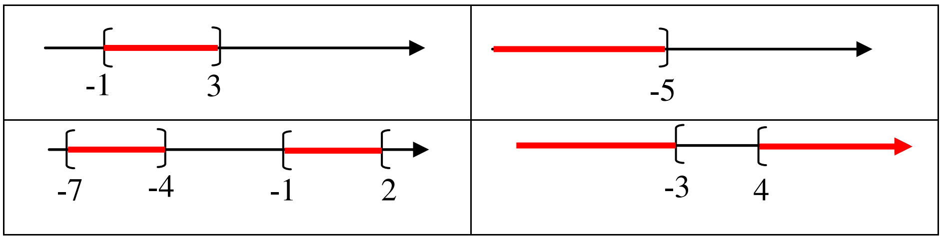
2) $[-2\,;\,2]\cap]-2\,;\,+\infty[=[-2\,;\,+\infty[$.

3) $[-1\,;\,3]\cap]3\,;\,+\infty[=[-1\,;\,+\infty[$.

4) $]-\infty\,;\,\frac{1}{2}]\cap[\frac{1}{2}\,;\,+\infty[=]-\infty\,;\,+\infty[$.

38 صفحة 45

أكتب ، على شكل مجالات ، مجموعات الأعداد الحقيقية الممثلة والملونة على المستقيم العددي.



الحل :

$]-\infty\,;\,-5]$	$[-1\,;\,3]$
$]-\infty\,;\,-3[\cup[4\,;\,+\infty[$	$[-7\,;\,-4]\cup[-1\,;\,2[$

39 صفحة 45

أكتب ، على شكل مجالات ، مجموعات الأعداد الحقيقية المعرفة بالمتباينات الآتية :

1) $2 \leq x \leq 6$ 3) $x \leq -2{,}5$

2) $-4 \leq x \leq 3$ 4) $x > \sqrt{3}$

الحل :

1) $2 \leq x \leq 6$ تكافئ $x \in [2\ ;\ 6]$

2) $-4 \leq x \leq 3$ تكافئ $x \in [-4\ ;\ 3]$

3) $x \leq -2{,}5$ تكافئ $x \in]-\infty\ ;\ -2{,}5]$

4) $x > \sqrt{3}$ تكافئ $x \in]\sqrt{3}\ ;\ +\infty[$

40 صفحة 45

أكتب ، على شكل مجالات ، مجموعات الأعداد الحقيقية المعرفة بالمتباينات الآتية :

3) $x < 2$ و $x \geq -1$

4) $-4 < x < 1$ أو $1 \leq x \leq 5$

الحل :

5) $x < 2$ و $x \geq -1$ تكافئ $x \in]-\infty\ ;\ 2[$ و $x \in [-1\ ;\ +\infty[$ تكافئ $x \in [-1\ ;\ 2[$

6) $-4 < x < 1$ أو $1 \leq x \leq 5$ تكافئ $x \in]-4\ ;\ 3[$ أو $x \in [1\ ;\ 5]$ تكافئ $x \in]-4\ ;\ 5]$

41 صفحة 45

أكتب على شكل مجالات المجموعات الآتية :

$\mathbb{R}$ ؛ $\mathbb{R}_-$ ؛ $\mathbb{R}_+$ ؛ $\mathbb{R}^*$ ، $\mathbb{R}_+^*$

الحل :

$\mathbb{R} =]-\infty\ ;\ +\infty[$ ؛ $\mathbb{R}_- =]-\infty\ ;\ 0]$ ؛ $\mathbb{R}_+ = [0\ ;\ +\infty[$

$\mathbb{R}^* =]-\infty\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$ ؛ $\mathbb{R}_+^* =]0\ ;\ +\infty[$

42 صفحة 45

عين مركز وطول كل مجال : $[-2\ ;\ 2]$ ؛ $[-0{,}5\ ;\ 0{,}1]$ ؛ $[-\pi+1\ ;\ \pi+1]$

الحل :

$[-2\ ;\ 2]$ طوله $2-(-2)=4$ ومركزه $\dfrac{2+(-2)}{2}=0$

$[-0{,}5\ ;\ 0{,}1]$ طوله $0{,}1-(-0{,}5)=0{,}6$ ومركزه $\dfrac{-0{,}5+0{,}1}{2}=-0{,}2$

$[-\pi+1\ ;\ \pi+1]$ طوله $(\pi+1)-(-\pi+1)=2\pi$ ومركزه $\dfrac{(\pi+1)+(-\pi+1)}{2}=1$

43 صفحة 45

ما هما حدا المجال المغلق الذي مركزه - 5,3 وطوله 0.7 ؟

الحل :

لدينا الطول 0,7 إذن نصف قطر المجال هو $r = 0,35$ والمركز $c = -5,3$

ولدينا المجال المغلق الذي مركزه c ونصف قطره r هو من الشكل : $[c - r ; c + r]$

$c - r = -5,3 - 0,35 = -0,65$ و $c + r = -0,3 + 0,35 = 0,05$

المجال المغلق الذي مركزه - 5,3 وطوله 0.7 هو $[-5,65 \;;\; 0,05]$

44 صفحة 45

أنقل الجدول ثم أكمله .

شكل مجال	شكل متباينة
$x \in]-1 \,;\, 2[$	
	$2 \leq x \leq 5$
	$x \geq 0$
$x \in]-\infty \,;\, \frac{1}{2}]$	

الحل :

شكل مجال	شكل متباينة
$x \in]-1 \,;\, 2[$	$-1 < x < 2$
$x \in [2 \,;\, 5]$	$2 \leq x \leq 5$
$x \in [0 \,;\, +\infty[$	$x \geq 0$
$x \in]-\infty \,;\, \frac{1}{2}]$	$x \leq \frac{1}{2}$

45 صفحة 45

أنقل ثم أكمل الجدول.

المتباينات	$x \in$
$-2 \leq x \leq 3$	
	$]-3 \,;\, 0[$
	$[5 \,;\, +\infty[$
$x \leq -\sqrt{2}$	

الحل :

المتباينات	$x \in$
$-2 \leq x \leq 3$	$[-2 \,;\, 3]$

$]-3\ ;\ 0[$	$-3<x<0$
$[5\ ;\ +\infty[$	$x\geq 5$
$]-\infty\ ;\ -\sqrt{2}]$	$x\leq -\sqrt{2}$

46 صفحة 45

عين المجالات الآتية :

- $]-\infty\ ;3]\cup[2\ ;+\infty[$.
- $]-\infty\ ;0]\cup]0\ ;\ +\infty[$.
- $[-2\ ;3[\cup[-4\ ;6]$.
- $]-\infty\ ;1]\cup]1\ ;\ +\infty[$.

الحل :

- $]-\infty\ ;3]\cup[2\ ;+\infty[=]-\infty\ ;+\infty[$.
- $]-\infty\ ;0]\cup]0\ ;\ +\infty[=]-\infty\ ;\ +\infty[$.
- $[-2\ ;3[\cup[-4\ ;6]=[-4\ ;6]$.
- $]-\infty\ ;1]\cup]1\ ;\ +\infty[=]-\infty\ ;\ +\infty[$.

47 صفحة 45

أنقل ثم أكمل الجدول.

I	J	$I\cap J$	$I\cup J$
$[2\ ;\ 5]$	$[1\ ;\ +\infty[$		
$]-1\ ;\ 3]$	$]-5\ ;\ 5[$		
$]-\infty\ ;\ \frac{1}{2}[$	$]-\frac{5}{2}\ ;\ \frac{1}{3}]$		
$[5\ ;\ +\infty[$	$]\frac{1}{2}\ ;\ 2[$		

الحل :

I	J	$I\cap J$	$I\cup J$
$[2\ ;\ 5]$	$[1\ ;\ +\infty[$	$[2\ ;\ 5]$	$[1\ ;\ +\infty[$
$]-1\ ;\ 3]$	$]-5\ ;\ 5[$	$]-1\ ;\ 3]$	$]-5\ ;\ 5[$
$]-\infty\ ;\ \frac{1}{2}[$	$]-\frac{5}{2}\ ;\ \frac{1}{3}]$	$]-\frac{5}{2}\ ;\ \frac{1}{3}]$	$]-\infty\ ;\ \frac{1}{2}[$
$[1\ ;\ 2]$	$]\frac{1}{2}\ ;\ 2[$	$]\frac{1}{2}\ ;\ 2[$	$[1\ ;\ 2]$

65 صفحة 46 :

باستعمال الحصر $4,4721<\sqrt{20}<4,4722$ أحصر كلا من الأعداد $\frac{\sqrt{20}}{2}$ ؛ $10\sqrt{20}$ ؛ $6+\sqrt{20}$ ؛ $-\sqrt{20}$

الحل :

- $4,4722 > \sqrt{20} > 4,4721$ فإن : $\frac{1}{2}\times 4,4721<\frac{1}{2}\times\sqrt{20}<\frac{1}{2}\times 4,4722$

$4,4722 > \sqrt{20} > 4,4721$ فإن : $2,23605<\frac{\sqrt{20}}{2}<2,2361$

- $4,4722 > \sqrt{20} > 4,4721$ فإن : $10\times 4,4721<10\sqrt{20}<10\times 4,4722$

$4,4722 > \sqrt{20} > 4,4721$ فإن : $44,721<10\sqrt{20}<44,722$

- $4,4722 > \sqrt{20} > 4,4721$ فإن : $6+4,4721<6+\sqrt{20}<6+4,4722$

$4,4722 > \sqrt{20} > 4,4721$ فإن : $10,4721<6+\sqrt{20}<10,4722$

- $4,4722 > \sqrt{20} > 4,4721$ فإن : $-4,4722<-\sqrt{20}<-4,4721$

66 صفحة 47

a. عدد حقيقي حيث $-1 < a < 2$

استنتج من هذا الحصر حصرا لكل من الأعداد الآتية :

$2a+1$ ؛ $5a-2$ ؛ $7-3a$ ؛ $\frac{1}{2a-5}$

الحل :

- $-1 < a < 2$. يكافئ $-2 < 2a < 4$ معناه $-1 < 2a+1 < 5$
- $-1 < a < 2$. يكافئ $-5 < 5a < 10$ معناه $-7 < 5a-2 < 8$
- $-1 < a < 2$. يكافئ $-6 < -3a < 3$ معناه $1 < 7-3a < 10$
- $-1 < a < 2$. يكافئ $-2 < 2a < 4$ معناه $-7 < 2a-5 < -1$

يكافئ $1 < -(2a-5) < 7$ معناه $\frac{1}{7}<-\frac{1}{2a-5}<1$ يكافئ $-1<\frac{1}{2a-5}<-\frac{1}{7}$

67 صفحة 47

b. عدد حقيقي حيث $2 < b < 3$ أعط حصرا للعدد $\frac{2-b^2}{5}$

يعطى أيضا عدد حقيقي a حيث $1 < a < 2$ أعط حصرا للعدد $b-2a$.

الحل :

- $2 < b < 3$. يكافئ $4 < b^2 < 9$ معناه $-9 < -b^2 < -4$ يكافئ $-7 < 2-b^2 < -2$

$2 < b < 3$. يكافئ $-\frac{2}{7}<\frac{2-b^2}{5}<-\frac{2}{5}$

- $1 < a < 2$. يكافئ $-4 < -2a < -1$

ولدينا : $2 < b < 3$ إذن : $-2 < b-2a < 2$.

68 صفحة 47

أحصر العدد $\frac{1+A}{2}$ علما أن : $2,36 < A < 2,37$

أحصر العدد $\frac{5-2B}{10}$ علما أن : $2,16 < B < 3,17$

الحل :

- $2,36 < A < 2,37$ يكافئ $3,36 < 1 + A < 3,37$ يكافئ $1,68 < \frac{1+A}{2} < 1,685$
- $2,16 < B < 3,17$ يكافئ $4,32 < 2B < 6,34$ يكافئ $-6,34 < -2B < -4,32$

يكافئ $-1,34 < 5 - 2B < 0,68$ يكافئ $-0,134 < \frac{5-2B}{10} < 0,068$

69 صفحة 47

بفرض $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ و $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$

أحصر $A = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$ ؛ $B = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$

الحل :

$1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ معناه $4,2 < 3\sqrt{2} < 4,5$ و $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$ تكافئ $3,4 < 2\sqrt{3} < 3,6$

إذن : $7,6 < 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} < 8,1$

و $3,4 - 4,5 < 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} < 3,6 - 4,2$ أي : $-1,1 < 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} < -0,6$

تطبيق 70 صفحة 47

x و y عددان حقيقيان حيث : $1,2 < x < 1,3$ ؛ $2,4 < y < 2,5$

أحصر $x + y$ ؛ $x - y$ ؛ $5x - 4y$ ؛ xy .

الحل :

- إذا كان [$1,2 < x < 1,3$ و $2,4 < y < 2,5$] فإن $1,2 + 2,4 < x + y < 1,3 + 2,5$

إذا كان [$1,2 < x < 1,3$ و $2,4 < y < 2,5$] فإن : $3,6 < x + y < 3,8$

- إذا كان [$1,2 < x < 1,3$ و $2,4 < y < 2,5$] فإن : $1,2 - 2,5 < x - y < 1,3 - 2,4$

إذا كان [$1,2 < x < 1,3$ و $2,4 < y < 2,5$] فإن : $-1,3 < x - y < -1,1$

- إذا كان [$1,2 < x < 1,3$ و $2,4 < y < 2,5$] فإن [$6 < 5x < 6,5$ و $12 < 5y < 12,5$]

إذا كان [$1,2 < x < 1,3$ و $2,4 < y < 2,5$] فإن [$-6,5 < 5x - 5y < -5,5$]

- إذا كان [$1,2 < x < 1,3$ و $2,4 < y < 2,5$] فإن : $2,88 < xy < 3,25$

71 صفحة 47

بفرض $x \in [-2 ; 1]$ و $y \in [3 ; 4]$ أحصر $y - x$ ؛ $x - 2y$ ؛ x^2 ؛ y^2 .

الحل :

$x\in[-2\ ;\ 1]$ معناه $-2\ \le x \le 1$ و $y\in[3\ ;\ 4]$ يكافئ $3\ \le y \le 4$

- إذا كان $x\in[-2\ ;\ 1]$ و $y\in[3\ ;\ 4]$ فإن $3-1\ \le y-x \le 4+2$

إذا كان $x\in[-2\ ;\ 1]$ و $y\in[3\ ;\ 4]$ فإن $2\ \le y-x \le 6$

إذا كان $x\in[-2\ ;\ 1]$ و $y\in[3\ ;\ 4]$ فإن $y-x\in[2\ ;\ 6]$

- إذا كان $x\in[-2\ ;\ 1]$ و $y\in[3\ ;\ 4]$ فإن $-2\ \le x \le 1$ و $6\ \le 2y \le 8$

إذا كان $x\in[-2\ ;\ 1]$ و $y\in[3\ ;\ 4]$ فإن $-2\ \text{-}8 \le x-2y \le 1-6$

إذا كان $x\in[-2\ ;\ 1]$ و $y\in[3\ ;\ 4]$ فإن $-10 \le x-2y \le -5$

إذا كان $x\in[-2\ ;\ 1]$ و $y\in[3\ ;\ 4]$ فإن $x-2y\in[-10\ ;\ -5]$

- $x\in[-2\ ;\ 1]$ يكافئ $x\in[-2\ ;\ 0]$ أو $x\in[0\ ;\ 1]$ و يكافئ $-2\le x\le 0$ أو $0\ \le x \le 1$

$x\in[-2\ ;\ 1]$ يكافئ $0\le -x \le 2$ أو $0\ \le x \le 1$

$x\in[-2\ ;\ 1]$ يكافئ $0\le x^2 \le 4$ أو $0\ \le x^2 \le 1$

$x\in[-2\ ;\ 1]$ يكافئ $0\le x^2 \le 4$ $\qquad$ $x\in[-2\ ;\ 1]$ يكافئ $x^2\in[0\ ;\ 4]$

- $y\in[3\ ;\ 4]$ يكافئ $3\ \le y \le 4$ ويكافئ $9\ \le y^2 \le 16$

72 صفحة 47

بفرض z عدد حقيقي يحقق $25 < z < 36$

أحصر $\frac{1}{z}$ ؛ $\frac{1}{z^2}$ ؛ $\frac{1}{\sqrt{z}}$

الحل :

$25 < z < 36$ معناه $\frac{1}{36} < \frac{1}{z} < \frac{1}{25}$

$25 < z < 36$ معناه $\frac{1}{36^2} < \frac{1}{z^2} < \frac{1}{25^2}$ $\qquad$ أي : $25 < z < 36$ معناه $\frac{1}{1296} < \frac{1}{z^2} < \frac{1}{626}$

$25 < z < 36$ معناه $\frac{1}{\sqrt{36}} < \frac{1}{\sqrt{z}} < \frac{1}{\sqrt{25}}$ $\qquad$ أي : $25 < z < 36$ معناه $\frac{1}{6} < \frac{1}{z} < \frac{1}{5}$

73 صفحة 47

عين باستعمال الحاسبة قيما عشرية مقربة بالزيادة و بالنقصان إلى 10^{-4} للأعداد :

$a = \sin 71°$ ؛ $b = \sin^2 71°$ ؛ $c = \cos 71°$ ؛ $d = \cos^2 71°$ ؛ $e = \sin^2 71° + \cos^2 71°$.

قارن العددين 1 و e .

الحل :

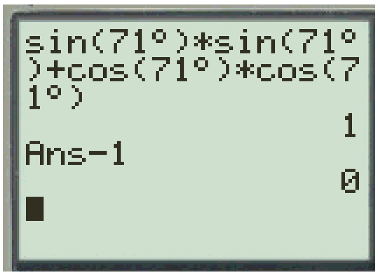
$a \approx 0,945518575$ ؛ $b \approx 0,894005376$ ؛ $c \approx 0,325568154$ ؛ $d \approx 0,105994623$ ؛ $e \approx 1$

$0,9455 < a < 0,9456$ ؛ $0,8940 < b < 0,8941$ ؛ $0,3255 < c < 0,3256$ ؛

$0,1059 < d < 0,1060$ ؛ $0,9999 < e < 1,0001$

بالآلة الحاسبة العلمية نجد $e = 1$

ونفس النتائج نجدها بالآلة الحاسبة البيانية



مسألة إدماجية

1) ليكن a عددا حقيقيا موجبا تماما ويختلف عن $\sqrt{2}$.

أ) بين أن a و $\frac{2}{a}$ يحصران $\sqrt{2}$

ب) قارن $\frac{1}{2}(a+\frac{2}{a})$ و $\sqrt{2}$ ($\frac{1}{2}(a+\frac{2}{a})$ هو الوسط الحسابي للعددين a و $\frac{2}{a}$) .

2) علم على المستقيم العددي النقط ذات الفواصل a ، $\frac{2}{a}$ ، $\frac{1}{2}(a+\frac{2}{a})$ ، $\sqrt{2}$.

لون بالأزرق أصغر مجال يشمل $\sqrt{2}$. ما هو الحصر المحصل عليه عندئذ ؟

3) انطلاقا من $a = 1$ وبالتعويض a بالقيمة المضبوطة للعدد $\frac{1}{2}(a+\frac{2}{a})$ ، أوجد باستعمال النتاج السابقة حصرا جديدا للعدد $\sqrt{2}$. هل هذا الحصر أفضل من الحصر المحصل عليه في السؤال 2) ؟

الحل :

1) ليكن a عددا حقيقيا موجبا تماما ويختلف عن $\sqrt{2}$.

أ) بين أن a و $\frac{2}{a}$ يحصران $\sqrt{2}$

نميز حالتين :

إذا كان : $0 < a < \sqrt{2}$ فإن : $\frac{1}{a} > \frac{1}{\sqrt{2}}$ وبالتالي $\frac{2}{a} > \frac{2}{\sqrt{2}}$ ولدينا : $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ إذن : $\frac{2}{a} > \sqrt{2}$

وبالتالي : $a < \sqrt{2} < \frac{2}{a}$

إذا كان : $a > \sqrt{2}$ فإن : $\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{1}{a}$ وبالتالي $\frac{2}{\sqrt{2}} < \frac{2}{a}$ ولدينا : $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ إذن : $\frac{2}{a} < \sqrt{2}$

وبالتالي : $\frac{2}{a} < \sqrt{2} < a$

ب) قارن $\frac{1}{2}(a+\frac{2}{a})$ و $\sqrt{2}$ ($\frac{1}{2}(a+\frac{2}{a})$ هو الوسط الحسابي للعددين a و $\frac{2}{a}$) .

$\frac{1}{2}(a+\frac{2}{a}) - \sqrt{2} = \frac{a^2+2-2a\sqrt{2}}{2a} = \frac{(a-\sqrt{2})^2}{2a}$ بما أن a عددا حقيقيا موجبا تماما ويختلف عن $\sqrt{2}$.

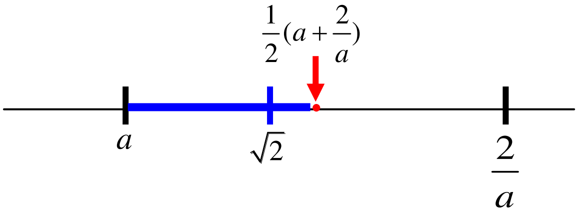
فإن : $\frac{1}{2}(a+\frac{2}{a}) - \sqrt{2} > 0$ ومنه : $\frac{1}{2}(a+\frac{2}{a}) > \sqrt{2}$

2) علم على المستقيم العددي النقط ذات الفواصل a ، $\frac{2}{a}$ ، $\frac{1}{2}(a+\frac{2}{a})$ ، $\sqrt{2}$.

لون بالأزرق أصغر مجال يشمل $\sqrt{2}$. ما هو الحصر المحصل عليه عندئذ ؟

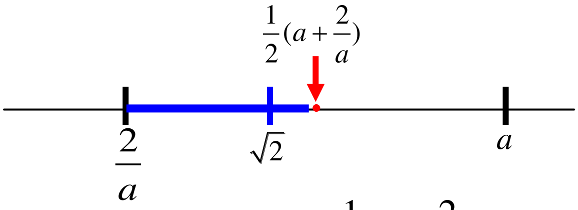
في حالة : $0 < a < \sqrt{2}$

$\sqrt{2} \in]a \; ; \; \frac{1}{2}(a+\frac{2}{a})[$



في حالة : $a > \sqrt{2}$

$\sqrt{2} \in]\frac{2}{a} \; ; \; \frac{1}{2}(a+\frac{2}{a})[$



3) انطلاقا من $a = 1$ وبالتعويض a بالقيمة المضبوطة للعدد $\frac{1}{2}(a+\frac{2}{a})$ ، أوجد باستعمال النتاج السابقة حصرا جديدا للعدد $\sqrt{2}$. هل هذا الحصر أفضل من الحصر المحصل عليه في السؤال 2) ؟

بتعويض a بالعدد 1 نجد : $\frac{1}{2}(a+\frac{2}{a}) = \frac{3}{2}$ وبالتالي : $1 < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$ أي : $\sqrt{2} \in]1 \; ; \; \frac{3}{2}[$

بتعويض a بالعدد $\frac{3}{2}$ نجد : $\frac{2}{a} = \frac{4}{3}$ و $\frac{1}{2}(a+\frac{2}{a}) = \frac{1}{2}(\frac{3}{2}+\frac{4}{3}) = \frac{17}{12}$ وبالتالي : $\frac{4}{3} < \sqrt{2} < \frac{17}{12}$

أي : $\sqrt{2} \in]\frac{4}{3} \; ; \; \frac{17}{12}[$

طول المجال $]\frac{4}{3} \; ; \; \frac{17}{12}[$ هو $0,08\underline{3}$ وطول المجال $]1 \; ; \; \frac{3}{2}[$ هو $0,5$

إذن $\sqrt{2} \in]\frac{4}{3} \; ; \; \frac{17}{12}[$ هو أفضل حصر لأن طول هذا المجال هو الأصغر.