

الثانية علوم تجريبية الوطني العادي 2018

التمرين الأول (3 نقاط):

<p>في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$، نعتبر النقط $A(0, -2, -2)$ و $B(1, -2, -4)$ و $C(-3, -1, 2)$</p>	
<p>(1) بين أن $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ ثم استنتج أن $2x + 2y + z + 6 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)</p>	1
<p>(2) لتكن (S) الفلكة التي معادلتها: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 23 = 0$ تحقق من أن مركز الفلكة (S) هو $\Omega(1, 0, 1)$ وأن شعاعها هو $R = 5$</p>	0,5
<p>(3) أ- تحقق من أن $(t \in \mathbb{R})$: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$ هو تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) المار من Ω و العمودي على المستوى (ABC)</p>	0,25
<p>ب- حدد إحداثيات H نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و المستوى (ABC)</p>	0,5
<p>(4) تحقق من أن $d(\Omega, (ABC)) = 3$ ثم بين أن المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة شعاعها 4 يتم تحديد مركزها</p>	0,75

التمرين الثاني (3 نقاط):

<p>(1) حل في مجموعة الأعداد العقدية \mathbb{C} المعادلة: $2z^2 + 2z + 5 = 0$</p>	0,75
<p>(2) في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم (O, \vec{u}, \vec{v})، نعتبر R الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{2\pi}{3}$</p>	
<p>أ- أكتب على الشكل المثلثي العدد العقدي: $d = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$</p>	0,25
<p>ب- لتكن النقطة A التي لحقها $a = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ و B صورة النقطة A بالدوران R ليكن b لحق النقطة B، بين أن $b = d.a$</p>	0,5
<p>(3) لتكن t الإزاحة التي متجهتها \overrightarrow{OA} و النقطة C صورة النقطة B بالإزاحة t و c لحق النقطة C</p>	
<p>أ- تحقق من أن $c = b + a$ ثم استنتج أن $c = a\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ (يمكنك استعمال السؤال (2) ب-)</p>	0,75
<p>ب- حدد $\arg\left(\frac{c}{a}\right)$ ثم استنتج أن المثلث OAC متساوي الأضلاع.</p>	0,75

التمرين الثالث (3 نقاط):

يحتوي صندوق على 9 كرات لا يمكن التمييز بينها باللمس :
خمس كرات حمراء تحمل الأعداد 1، 1، 2، 2، 2، 2، 2، 2، 2
وأربع كرات بيضاء تحمل الأعداد 1، 2، 2، 2، 2.
نعتبر التجربة التالية : نسحب عشوائيا و تانيا 3 كرات من الصندوق.
لتكن الأحداث : A : "الكرات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون" و B : "الكرات الثلاث المسحوبة تحمل نفس العدد"

و C : "الكرات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون و تحمل نفس العدد"

$$(1) \text{ بين أن } p(A) = \frac{1}{6} \text{ و } p(B) = \frac{1}{4} \text{ و } p(C) = \frac{1}{42}$$

(2) نكرر التجربة السابقة 3 مرات مع إعادة الكرات الثلاث المسحوبة إلى الصندوق بعد كل سحبة ، و نعتبر

المتغير العشوائي X الذي يساوي عدد المرات التي يتحقق فيها الحدث A

أ- حدد وسيطي المتغير العشوائي X

$$\text{ب- بين أن : } p(X=1) = \frac{25}{72} \text{ و أحسب } p(X=2)$$

المسألة (11 نقطة):

I. لتكن g الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} كما يلي : $g(x) = e^x - x^2 + 3x - 1$

الجدول جانبه يمثل جدول تغيرات الدالة g

$$(1) \text{ تحقق من أن } g(0) = 0$$

(2) حدد إشارة $g(x)$ على كل من المجالين $]-\infty, 0]$ و $[0, +\infty[$

II. لتكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :

$$f(x) = (x^2 - x)e^{-x} + x$$

وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j})

(الوحدة 1cm)

$$(1) \text{ أ- تحقق من أن } f(x) = \frac{x^2}{e^x} - \frac{x}{e^x} + x \text{ لكل } x \text{ من } \mathbb{R} \text{ ثم بين أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$ ثم استنتج أن المنحنى (C) يقبل مقاربا (D) بجوار $+\infty$ معادلته $y = x$

$$\text{ج- تحقق من أن } f(x) = \frac{x^2 - x + xe^x}{e^x} \text{ لكل } x \text{ من } \mathbb{R} \text{ ثم أحسب } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$\text{د- بين أن } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \text{ ثم أول النتيجة هندسيا}$$

(2) أ- تحقق من أن $f(x) - x$ و $x^2 - x$ لهما نفس الإشارة لكل x من \mathbb{R}

ب- استنتج أن (C) يوجد فوق (D) على كل من المجالين $]-\infty, 0]$ و $[1, +\infty[$ و تحت (D) على المجال

$[0, 1]$

(3) أ- بين أن لكل x من \mathbb{R} لدينا $f'(x) = g(x)e^{-x}$	0,75
ب- استنتج أن الدالة f تناقصية على $]-\infty, 0]$ و تزايدية على $[0, +\infty[$	0,5
ج- ضع جدول تغيرات الدالة f	0,25
(4) أ- تحقق من أن $f''(x) = (x^2 - 5x + 4)e^{-x}$ لكل x من \mathbb{R}	0,25
ب- استنتج أن المنحنى (C) يقبل نقطتي انعطاف أفصولا هما على التوالي هما 1 و 4	0,5
(5) أنشئ (D) و (C) في نفس المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) (نأخذ $f(4) \simeq 4,2$)	1
(6) أ- بين أن الدالة $H : x \mapsto (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$ دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto -x^2e^{-x}$ على \mathbb{R}	0,5
ثم استنتج أن $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = \frac{2e-5}{e}$	
ب- باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن $\int_0^1 x e^{-x} dx = \frac{e-2}{e}$	0,75
ج- أحسب ب cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين (C) و (D) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=0$	0,75
III. لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_0 = \frac{1}{2}$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ لكل n من \mathbb{N}	
(1) بين أن $0 \leq u_n \leq 1$ لكل n من \mathbb{N} (يمكن استعمال نتيجة السؤال II-3 ب-)	0,75
(2) بين أن المتتالية (u_n) تناقصية	0,5
(3) استنتج أن (u_n) متقاربة و حدد نهايتها	0,75

تصحيح التمرين الأول :

(1)

✓ لدينا $\overrightarrow{AB}(1,0,-2)$ و $\overrightarrow{AC}(-3,1,4)$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} : \text{ إذن}$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} : \text{ ومنه}$$

✓ لدينا : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(2,2,1)$ متجهة منظمية للمستوى (ABC) إذن معادلة ديكرتية للمستوى

$$(ABC) \text{ نكتب على شكل } : (2)x + (2)y + (1)z + d = 0$$

و بما أن $A(0,-2,-2) \in (ABC)$ فإن $(2)(0) + (2)(-2) + (1)(-2) + d = 0$ أي $d = 6$ وبالتالي : $2x + 2y + z + 6 = 0$ هي معادلة ديكرتية للمستوى (ABC)

(2)

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 23 = 0 \Leftrightarrow M(x, y, z) \in (S)$$

$$x^2 - 2x + y^2 + z^2 - 2z = 23 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + z^2 - 2z + 1 = 23 + 1 + 1 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 25 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2 + (y-0)^2 + (z-1)^2 = (5)^2 \Leftrightarrow$$

إذن مركز الفلكة (S) هو النقطة $\Omega(1,0,1)$ و أن شعاعها هو $R = 5$

(3) أ-

لنحدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (Δ) المار من $\Omega(1,0,1)$ و العمودي على المستوى (ABC) بما أن $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(2,2,1)$ متجهة منظمية للمستوى (ABC) و بما أن (Δ) عمودي على المستوى

$$(ABC)$$

فإن $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(2,2,1)$ هي متجهة موجهة للمستقيم (Δ) و لدينا $\Omega(1,0,1) \in (\Delta)$

$$\begin{cases} x = (1) + t(2) \\ y = (0) + t(2) \\ z = 1 + t(1) \end{cases} \text{ إذن تمثيل بارامترى للمستقيم } (\Delta) \text{ هو : } (t \in \mathbb{R})$$

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) : \text{أي}$$

ب-

$$\begin{cases} x_H = 1 + 2t \\ y_H = 2t \\ z_H = 1 + t \\ 2x_H + 2y_H + z_H + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow H(x_H, y_H, z_H) \in (\Delta) \cap (ABC)$$

$$\begin{cases} x_H = 1 + 2t \\ y_H = 1 + 2t \\ z_H = t \\ 2(1 + 2t) + 2(2t) + (1 + t) + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_H = 1 + 2t \\ y_H = 2t \\ z_H = 1 + t \\ t = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_H = -1 \\ y_H = -2 \\ z_H = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

(4)

$$d(\Omega, (ABC)) = \frac{|2(1) + 2(0) + (1) + 6|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{9}{\sqrt{9}} = \frac{9}{3} = 3 \quad \checkmark \text{ لدينا}$$

$$(S) \text{ شعاع الفلكة } (R=5) \quad d(\Omega, (ABC)) < R \text{ بما أن}$$

فإن : المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة شعاعها :

$$r = \sqrt{R^2 - (d(\Omega, (ABC)))^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$$

و مركزها (هو المسقط العمودي للنقطة Ω على المستوى (ABC)) نقطة تقاطع (Δ) و (ABC)

أي النقطة $H(-1, -2, 0)$

تصحيح التمرين الثاني :

(1) لنحل في مجموعة الأعداد العقدية \mathbb{C} المعادلة : $2z^2 + 2z + 5 = 0$

$$\Delta = (2)^2 - 4(2)(5) = -36$$

لدينا : $\Delta < 0$ فإن المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين :

$$z = \frac{-(2) + i\sqrt{36}}{2(2)} \quad \text{أو} \quad z = \frac{-(2) - i\sqrt{36}}{2(2)}$$

$$z = \frac{-2 + 6i}{4} \quad \text{أو} \quad z = \frac{-2 - 6i}{4}$$

$$z = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \quad \text{أو} \quad z = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$$

$$S = \left\{ -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \right\} \quad \text{إذن :}$$

(2) أ- لنكتب على الشكل المثلثي العدد العقدي : $d = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$d = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{إذن : } d = 1 \cdot \left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right]$$

ب- لدينا : R هو الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$

$$\boxed{z' = d \cdot z} \quad \text{أي} \quad z' - 0 = e^{i\frac{2\pi}{3}} (z - 0)$$

بما أن $B(b)$ صورة النقطة $A(a)$ بالدوران R

$$\text{فإن : } b = d \cdot a$$

(3) أ-

✓ لدينا : t الإزاحة التي متجهتها \vec{OA}

$$\boxed{z' = z + a} \quad \text{أي} \quad z' = z + z_{\vec{OA}} = z + a - 0$$

بما أن $C(c)$ صورة النقطة $B(b)$ بالإزاحة t

$$\text{فإن : } c = b + a$$

$$c = b + a = a \left(\frac{b}{a} + 1 \right) = a(d + 1) = a \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1 \right) = a \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \quad \checkmark$$

(حسب السؤال 2) ب- لدينا : $b = d.a$ إذن $\frac{b}{a} = d$

ب-

$$\frac{c}{a} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \text{ إذن } c = a \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \checkmark$$

$$\arg\left(\frac{c}{a}\right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \text{ إذن}$$

$$\boxed{OC = OA} \text{ و منه } \frac{OC}{OA} = 1 \text{ إذن } \left| \frac{c}{a} \right| = \left| \frac{c-0}{a-0} \right| = 1 \checkmark$$

$$\boxed{\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC} \right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]} \text{ و منه } \arg\left(\frac{c-0}{a-0}\right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \text{ إذن } \arg\left(\frac{c}{a}\right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

و بالتالي : المثلث OAC متساوي الأضلاع .

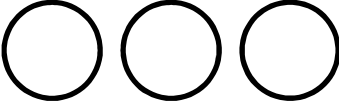

تصحيح التمرين الثالث :

(1) التجربة : " نسحب عشوائيا و تأنيا 3 كرات من الصندوق "

ليكن Ω كون إمكانيات هذه التجربة

$$\text{card}\Omega = C_9^3 = 84$$

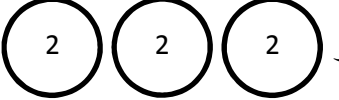
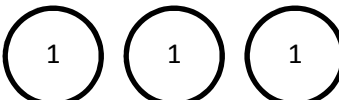
✓

A: "الكرات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون" أو  أو 

$$\text{card}A = C_4^3 + C_5^3 = 4 + 10 = 14$$

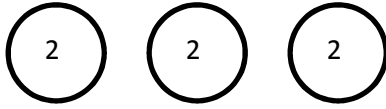
$$p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{14}{84} = \frac{1}{6}$$

✓

B: "الكرات الثلاث المسحوبة تحمل نفس العدد" أو  أو 

$$\text{card}B = C_3^3 + C_6^3 = 1 + 20 = 21$$

$$p(B) = \frac{\text{card}B}{\text{card}\Omega} = \frac{21}{84} = \frac{1}{4}$$



✓
C: "الكرات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون و تحمل نفس العدد"
أو



$$\text{card}C = C_3^3 + C_3^3 = 1 + 1 = 2$$

$$p(C) = \frac{\text{card}C}{\text{card}\Omega} = \frac{2}{84} = \frac{1}{42}$$

(2) نكرر التجربة السابقة 3 مرات مع إعادة الكرات الثلاث المسحوبة إلى الصندوق بعد كل سحبة ، و نعتبر المتغير

العشوائي X الذي يساوي عدد المرات التي يتحقق فيها الحدث A

أ- لدينا X متغير عشوائي حداني وسيطاه n و p

حيث : n هو عدد مرات تكرار التجربة أي $n = 3$

و p هو احتمال تحقق الحدث A أي : $p = p(A) = \frac{1}{6}$

$$p(X=1) = C_3^1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \times \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{3-1} = 3 \times \frac{1}{6} \times \frac{25}{36} = \frac{25}{72} \quad \text{ب-}$$

$$p(X=2) = C_3^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{3-2} = 3 \times \frac{1}{36} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{72}$$

تصحيح المسألة :

I. لتكن g الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} كما يلي : $g(x) = e^x - x^2 + 3x - 1$

$$g(0) = e^0 - 0^2 + 3(0) - 1 = 1 - 0 + 0 - 1 = 0 \quad (1)$$

(2)

✓ على المجال $]-\infty, 0]$:

لدينا $x \leq 0$ و انطلاقا من جدول تغيرات الدالة g لدينا : g تزايدية

إذن : $g(x) \leq g(0)$ و منه $g(x) \leq 0$

✓ على المجال $[0, +\infty[$:

لدينا $x \geq 0$ و انطلاقا من جدول تغيرات الدالة g لدينا : g تزايدية

إذن : $g(x) \geq g(0)$ و منه $g(x) \geq 0$

II. لتكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بما يلي : $f(x) = (x^2 - x)e^{-x} + x$

(1) أ-

✓ ليكن $x \in \mathbb{R}$:

لدينا :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - x)e^{-x} + x \\ &= (x^2 - x) \times \frac{1}{e^x} + x \\ &= \frac{x^2}{e^x} - \frac{x}{e^x} + x \end{aligned}$$

إذن $f(x) = \frac{x^2}{e^x} - \frac{x}{e^x} + x$ لكل x من \mathbb{R}

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} - \frac{x}{e^x} + x = +\infty \quad \checkmark$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0^+ \quad \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty \right) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0^+ \quad \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \right) \text{ لأن} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{array} \right.$$

$$\text{ب- لدينا : } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} - \frac{x}{e^x} = 0$$

إذن : المنحنى (C) يقبل مقاربا مائلا (D) بجوار $+\infty$ معادلته $y = x$

ج-

✓ ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{لدينا : } f(x) = \frac{x^2}{e^x} - \frac{x}{e^x} + x = \frac{x^2 - x + xe^x}{e^x}$$

إذن : $f(x) = \frac{x^2 - x + xe^x}{e^x}$ لكل x من \mathbb{R}

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + xe^x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} \times (x^2 - x + xe^x) = +\infty \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x + xe^x) = +\infty \Leftrightarrow \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0^- \end{array} \text{ لأن}$$

$$\text{و : } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$$

-د-

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + xe^x}{xe^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{xe^x} \times (x^2 - x + xe^x) = -\infty \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x + xe^x) = +\infty \Leftrightarrow \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0^- \end{array} :$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0^- \quad \text{و}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \checkmark \text{ لدينا}$$

إذن : المنحنى (C) يقبل فرعا شلجيميا في اتجاه محور الأرتايب بجوار $-\infty$

(2) أ- ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) - x = (x^2 - x)e^{-x} \text{ لدينا}$$

$$e^{-x} > 0 \text{ بما أن}$$

فإن $f(x) - x$ و $x^2 - x$ لهما نفس الإشارة لكل x من \mathbb{R}

ب- لدينا : $f(x) - x$ و $x^2 - x$ لهما نفس الإشارة لكل x من \mathbb{R}

لندرس إشارة $x^2 - x$:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$x^2 - x$	+	0	-	0	+

✓ على المجالين $]-\infty, 0]$ و $[1, +\infty[$:

$$x^2 - x \geq 0 \text{ لدينا}$$

$$f(x) - x \geq 0 \text{ إذن}$$

و منه (C) يوجد فوق (D)

✓ على المجال $[0, 1]$:

$$x^2 - x \leq 0 \text{ لدينا}$$

$$f(x) - x \leq 0 \text{ إذن}$$

و منه (C) يوجد تحت (D)

3 أ- الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}

ليكن $x \in \mathbb{R}$:

لدينا :

$$\begin{aligned} f'(x) &= ((x^2 - x)e^{-x} + x)' \\ &= (x^2 - x)'e^{-x} + (x^2 - x)(e^{-x})' + 1 \\ &= (2x - 1)e^{-x} - (x^2 - x)e^{-x} + 1 \\ &= e^{-x}(2x - 1 - x^2 + x + e^x) \\ &= e^{-x}(e^x - x^2 + 3x - 1) \\ &= e^{-x}g(x) \end{aligned}$$

إذن لكل x من \mathbb{R} لدينا $f'(x) = g(x)e^{-x}$

ب- لدينا لكل x من \mathbb{R} لدينا $f'(x) = g(x)e^{-x}$ ونعلم أن لكل x من \mathbb{R} $e^{-x} > 0$

إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$

✓ على المجال $]-\infty, 0]$:

لدينا $g(x) \leq 0$ إذن $f'(x) \leq 0$

و منه الدالة f تناقصية على $]-\infty, 0]$

✓ على المجال $[0, +\infty[$:

لدينا $g(x) \geq 0$ إذن $f'(x) \geq 0$

و منه الدالة f تزايدية على $[0, +\infty[$

ج- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

4 أ- لدينا : f' قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}
ليكن $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (e^{-x}g(x))' \\ &= (e^{-x})' \times g(x) + e^{-x} \times g'(x) \\ &= -e^{-x}(e^x - x^2 + 3x - 1) + e^{-x}(e^x - 2x + 3) \\ &= e^{-x}(-e^x + x^2 - 3x + 1 + e^x - 2x + 3) \\ &= e^{-x}(x^2 - 5x + 4) \end{aligned}$$

إذن : $f''(x) = (x^2 - 5x + 4)e^{-x}$ لكل x من \mathbb{R}

ب- لدينا $f''(x) = (x^2 - 5x + 4)e^{-x}$ لكل x من \mathbb{R} و نعلم أن لكل x من \mathbb{R} $e^{-x} > 0$

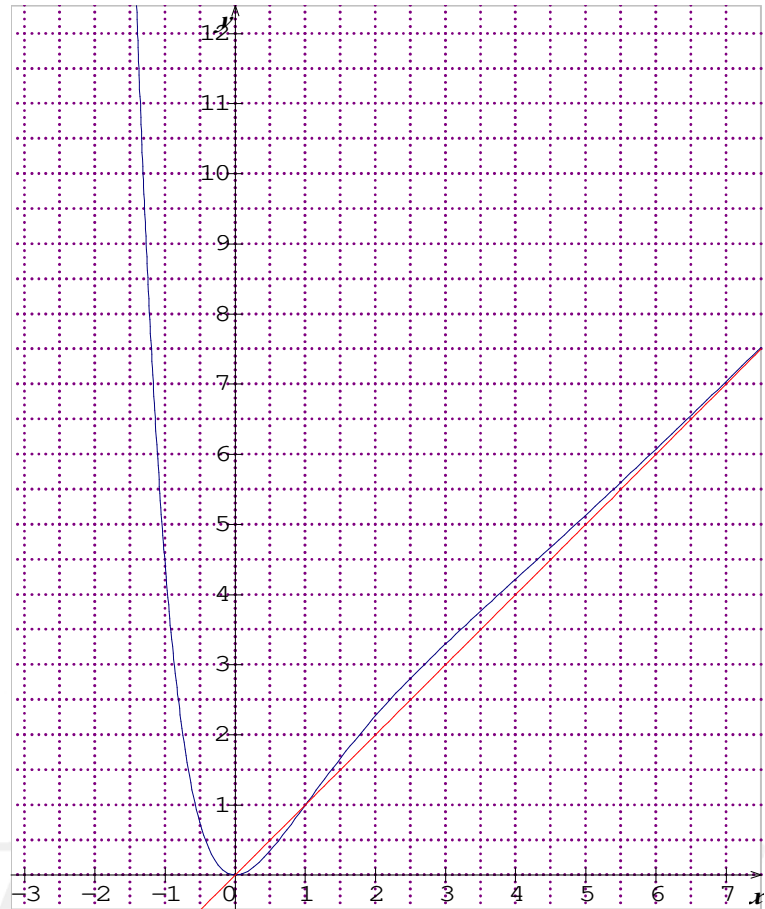
إذن إشارة $f''(x)$ هي إشارة $x^2 - 5x + 4$

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ أو } x = 4 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	1	4	$+\infty$	
$f''(x)$	+	0	-	0	+

- ✓ f'' تنعدم و تغير إشارتها عند العدد 1 إذن (C) نقطة انعطاف أفصولها 1
- ✓ f'' تنعدم و تغير إشارتها عند العدد 4 إذن (C) نقطة انعطاف أفصولها 4
- و منه المنحنى (C) يقبل نقطتي انعطاف أفصولهما على التوالي هما 1 و 4

(5)



(6) أ- لنبين أن الدالة $H : x \mapsto (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$ دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto -x^2e^{-x}$ على \mathbb{R}

✓ لدينا : $H : x \mapsto (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$ قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}

✓ ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
 H'(x) &= \left((x^2 + 2x + 2)e^{-x} \right)' \\
 &= (x^2 + 2x + 2)' e^{-x} + (x^2 + 2x + 2)(e^{-x})' \\
 &= (2x + 2)e^{-x} - (x^2 + 2x + 2)e^{-x} \\
 &= (2x + 2 - x^2 - 2x - 2)e^{-x} \\
 &= -x^2e^{-x} \\
 &= h(x)
 \end{aligned}$$

إذن $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad H'(x) = h(x)$

✓ و منه الدالة $H : x \mapsto (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$ دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto -x^2e^{-x}$ على \mathbb{R}

$$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = \int_0^1 -h(x) dx = [-H(x)]_0^1 = [-(x^2 + 2x + 2)e^{-x}]_0^1 = \left(\frac{-5}{e}\right) - (-2) = 2 - \frac{5}{e} = \frac{2e-5}{e} \quad \blacksquare$$

ب-

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases} \searrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases} \downarrow$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x e^{-x} dx &= [-x e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x} dx \\ &= \left(\left(-\frac{1}{e} \right) - (0) \right) - [e^{-x}]_0^1 \\ &= -\frac{1}{e} - \left(\frac{1}{e} - 1 \right) \\ &= \frac{-2}{e} + 1 \\ &= \frac{e-2}{e} \end{aligned}$$

ج- مساحة حيز المستوى المحصور بين (C) و (D) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=0$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 |f(x) - x| dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \\ &= \int_0^1 (x - f(x)) dx \times 1cm \times 1cm \\ &= \int_0^1 (-x^2 + x) e^{-x} dx \\ &= \left(\int_0^1 -x^2 e^{-x} dx + \int_0^1 x e^{-x} dx \right) cm^2 \\ &= \left(\left(\frac{5-2e}{e} \right) + \left(\frac{e-2}{e} \right) \right) cm^2 \\ &= \left(\frac{3-e}{e} \right) cm^2 \end{aligned}$$

III. لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_0 = \frac{1}{2}$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ لكل n من \mathbb{N}

(1) لنبين بالترجع : $0 \leq u_n \leq 1$ لكل n من \mathbb{N}

✓ من أجل $n = 0$:

$$u_0 = \frac{1}{2}$$

إذن : $0 \leq u_0 \leq 1$

✓ ليكن $n \in \mathbb{N}$

▪ نفترض أن : $0 \leq u_n \leq 1$

▪ و نبين أن : $0 \leq u_{n+1} \leq 1$ ؟

لدينا حسب الافتراض : $0 \leq u_n \leq 1$ و حسب نتيجة السؤال II-3) ب- لدينا f تزايدية على

$$[0,1]$$

$$f(0) \leq f(u_n) \leq f(1)$$

$$0 \leq u_{n+1} \leq 1$$

✓ نستنتج أن : $0 \leq u_n \leq 1$ لكل n من \mathbb{N}

(2) ليكن $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{لدينا } (\forall x \in [0,1]) \quad f(x) - x \leq 0$$

و بما أن $0 \leq u_n \leq 1$

$$\text{فإن : } f(u_n) - u_n \leq 0$$

$$\text{و منه } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - u_n \leq 0$$

و بالتالي المتتالية (u_n) تناقصية

(3)

✓ بما أن (u_n) تناقصية و مصغرة (بالعدد 0) فإنها متقاربة

✓ لدينا :

$$\mathbb{N} \text{ من } n \text{ لكل } u_{n+1} = f(u_n) \text{ و } u_0 = \frac{1}{2} \in [0,1]$$

▪ لدينا : f متصلة على $[0,1]$

$$f([0,1]) = [f(0), f(1)] = [0,1]$$

▪ (u_n) متقاربة

إذن نهاية المتتالية (u_n) هي حل للمعادلة : $f(x) = x$

$$f(x) = x \Leftrightarrow x = 0 \text{ أو } x = 1$$

بما أن (u_n) تناقصية فإن $u_n \leq u_0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

إذن $u_n \leq \frac{1}{2}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \frac{1}{2}$

و منه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

ك

math.ma