

من إعداد الأستاذ: نصري عبد الرحمان

والإستاذة: قاتل - هـ

جذع مشترك علوم و تكنولوجيا

المتميانات والحصر

الحصر والمجالات

التمرين الأول

ليكن x عدد حقيقي حيث: $x > 1$ قارن بين كل عددين فيما يلي:

$$\begin{aligned} & (x+2)^2 \text{ و } (x+1)^2 \quad * \quad (2-3x)^2 \text{ و } (1-x)^2 \\ & \sqrt{x+8} \text{ و } \sqrt{x+9} \quad * \quad \sqrt{x+\pi} \text{ و } \sqrt{x+\frac{157}{50}} \end{aligned}$$

التمرين الثاني

x عدد حقيقي حيث: $\frac{3}{2} < x < 2$ رتب الاعداد في كل حالة:

$$2x-3 \text{ و } (2x-3)^2 \text{ و } (2x-3)^3$$

الحالة الثانية: $4x+1$ و $(4x+1)^2$ و $(4x+1)^3$

التمرين الثالث

دون استعمال الآلة الحاسبة قارن مع التبرير كل عددين فيما يلي:

$$\begin{aligned} & \frac{5}{72} \text{ و } \frac{3}{72} \quad \textcircled{1} \quad \frac{-8}{15} \text{ و } \frac{-56}{15} \quad \textcircled{2} \quad \frac{151}{68} \text{ و } -\frac{105}{47} \quad \textcircled{3} \\ & \frac{13}{17} \text{ و } \frac{13}{28} \quad \textcircled{4} \quad -\frac{2}{27} \text{ و } -\frac{2}{5} \quad \textcircled{5} \quad 10^{-3} \text{ و } 10^{-2} \quad \textcircled{6} \\ & -10^{-1} \text{ و } -10^{-2} \quad \textcircled{7} \end{aligned}$$

التمرين 4 نفس سؤال التمرين السابق:

$$\frac{1}{3\sqrt{2}} \text{ و } \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad \textcircled{2} \quad \frac{1}{3\sqrt{5}} \text{ و } \frac{1}{5\sqrt{3}} \quad \textcircled{1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \text{ و } \sqrt{3}+\sqrt{2} \quad \textcircled{3}$$

$$\sqrt{4\sqrt{3}+9} \text{ و } 2+\sqrt{3} \quad \textcircled{5} \quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}-3} \text{ و } 2\sqrt{5}+3\sqrt{2} \quad \textcircled{4}$$

$$\sqrt{10+6\sqrt{2}} \text{ و } 3+\sqrt{2} \quad \textcircled{6}$$

$$\sqrt{11+2\sqrt{35}} \text{ و } 12+2\sqrt{35} \quad \textcircled{7}$$

$$\sqrt{1-10^{-18}} \text{ و } \sqrt{1-10^{-19}} \quad \textcircled{8}$$

التمرين 5

ليكن x عدد حقيقي حيث: $-2 < x < 3$

أوجد حصر لكل من العبارات التالية:

$$3x+2 \quad \textcircled{1} \quad -x+\sqrt{2} \quad \textcircled{3} \quad 7x-4 \quad \textcircled{2} \quad 3-2x \quad \textcircled{4}$$

$$\frac{1}{7-x} \quad \textcircled{7} \quad \frac{4}{3x-16} \quad \textcircled{6} \quad \frac{1}{2x+6} \quad \textcircled{5}$$

التمرين 6

y عدد حقيقي حيث: $2 \leq y \leq 6$ ، استنتج حصر لكل من:

$$y^2 \quad \textcircled{1} \quad y^2-4 \quad \textcircled{2} \quad y^3+84 \quad \textcircled{3} \quad y^2-10 \quad \textcircled{4}$$

$$\sqrt{y+2} \quad \textcircled{5} \quad \frac{1}{y^2+1} \quad \textcircled{6} \quad \frac{3}{2-y^2} \quad \textcircled{7}$$

التمرين 7

$$\begin{cases} -1 < x < 1 \\ 1 < y < 2 \end{cases} \quad x \text{ و } y \text{ عدنان حقيقيان حيث:}$$

أوجد حصر للعبارات التالية:

$$x+y \quad \textcircled{1} \quad 8x+y \quad \textcircled{2} \quad x+8y \quad \textcircled{3} \quad -x-y \quad \textcircled{4}$$

$$x-y \quad \textcircled{5} \quad y-x \quad \textcircled{6} \quad 2x-3y \quad \textcircled{7} \quad x+2y^2 \quad \textcircled{8}$$

التمرين 8

y و x عدنان حقيقيان حيث: $1 < x < 5$ و $1 < y < 4$

أوجد حصر لكل من:

$$N = 3x - \sqrt{y} \quad \textcircled{1} \quad \frac{x^2-x}{4} \quad \textcircled{2}$$

$$\frac{(x-6)^2}{1-\sqrt{x+y}} \quad \textcircled{3} \quad \frac{-y^2+x^3}{\sqrt{xy}} \quad \textcircled{4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \textcircled{5}$$

التمرين 9

في كل حالة من الحالات الآتية عين تقاطع واتحاد كل مجالين:

$$[-5; 4] \text{ و } [3; 8] \quad \textcircled{2} \quad [1; 5] \text{ و } [-1; 3] \quad \textcircled{1}$$

$$[-2; +\infty[\text{ و } [-\infty; \frac{1}{2}] \quad \textcircled{3} \quad]-\infty; \frac{3}{2}] \text{ و }]\sqrt{2}; +\infty[\quad \textcircled{4}$$

$$[-4; 1] \text{ و }]\sqrt{2}; +\infty[\quad \textcircled{5} \quad]-\infty; 4[\text{ و } [4; +\infty[\quad \textcircled{6}$$

$$]3; +\infty[\text{ و }]-\infty; 3[\quad \textcircled{7} \quad]-\infty; +\infty[\text{ و }]-4; 5[\quad \textcircled{8}$$

التمرين 10

أكتب كل من المتباينات على شكل مجال:

$$x > 2 \text{ و } x \geq 5 \quad \textcircled{1} \quad x < 4 \text{ و } x \geq 2 \quad \textcircled{2} \quad x < 0 \text{ و } x > 1 \quad \textcircled{3}$$

$$x > 0 \text{ و } x \leq 0 \quad \textcircled{4} \quad x > -1 \text{ و } x > 3 \quad \textcircled{5} \quad x > \frac{3}{2} \text{ و } x \leq \sqrt{3} \quad \textcircled{6}$$

التمرين الرابع

أكتب كل من العبارات التالية دون استعمال رمز القيمة المطلقة:

$$A = |x+4| + |x-2| \quad \textcircled{1}$$

$$B = |x-1| - |x-3| \quad \textcircled{2}$$

$$C = |x-3| + 2|x-4| \quad \textcircled{3}$$

استنتج حلول المعادلات:

$$|x+4| + |x-2| = 6 \quad \textcircled{1}$$

$$B = |x-1| = |x-3| + 2 \quad \textcircled{2}$$

$$C = |x-3| + 2|x-4| = 5 \quad \textcircled{3}$$

التمرين الخامس

x عدد حقيقي نعتبر العبارة: $p(x) = |2x-3| - 5$

$$\textcircled{1} \text{ أحسب } P(\sqrt{5}) \text{ و } P(0) , P(-2) , P\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\textcircled{2} \text{ عين قيم } x \text{ بحيث: } P(x) = x$$

$$\textcircled{3} \text{ عين قيم } x \text{ بحيث: } P(x) = 2 \text{ و } x \leq \frac{3}{2}$$

$$\textcircled{4} P(x) \leq 2x - 5$$

$$\textcircled{4} \text{ عين قيم } x \text{ بحيث: } P(x) \leq 10^{-3} \text{ و } x \geq \frac{3}{2}$$

التمرين السادس

x عدد حقيقي نعتبر العبارة: $A(x) = 3|x+2| - 3|x-3|$

$$\textcircled{1} \text{ أحسب } A(\sqrt{3}+5) \text{ و } A(2-\sqrt{5})$$

$$\textcircled{2} \text{ عين قيم } x \text{ بحيث: } -2 \leq x \leq 3 \text{ و } P(x) = x+2$$

$$\textcircled{3} \text{ عين قيم } x \text{ بحيث: } -2 \leq x \leq 3 \text{ و } P(x) > 3$$

التمرين السابع

x عدد حقيقي

$$\textcircled{1} \text{ بسط العبارة التالية: } P(x) = |x-2| \times |x+3|$$

$$\textcircled{2} \text{ عين قيم } x \text{ بحيث: } -3 \leq x \leq 2 \text{ و } P(x) = -x^2$$

$$\textcircled{3} \text{ أحسب } P\left(\frac{\sqrt{3}+5}{3}\right) \text{ و } P(1-\sqrt{2})$$

النجاح قمت لا يرتقي سلمها إلا أصحاب الهمم العلية
لأن هممتهم تودهم للمواصلة وإن تعثرت
خطهم



القيمة المطلقة والمجالات

تذكير: a و b عدنان حقيقيان حيث $a \neq 0$ إشارة ثنائي

الحد $ax+b$ هي:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
إشارة $ax+b$	عكس إشارة a	0	نفس إشارة a

التمرين الأول حل في \mathbb{R} المتراجحات التالية:

$$|x+2| < 2 \quad * \quad |x| > \sqrt{3} \quad * \quad |x| > 1 \quad * \quad |-x| \leq \frac{1}{2} \quad *$$

$$* \quad |1-x| > 1 \quad * \quad |3+x| > 2 \quad * \quad |x-1| < 4 \quad * \quad |x-3| > 2$$

$$|5-x| < \frac{1}{3}$$

التمرين الثاني

x عدد حقيقي علما أن $|x-2| < 3$ ، قم بحصر كل من: x ،

$$4-5x, 2x+1$$

إذا كان $|2-x| < 3$ ، هل يتغير حصر العبارات السابقة؟ مع

التعليل.

التمرين الثالث x عدد حقيقي، أتم الجدول التالي:

القيمة المطلقة	المسافة	المجال	الحصر
$ \dots \leq \dots$	$d(\dots; \dots) \leq \dots$	$x \in \dots$	$1 \leq x \leq 5$
.....	$0 < x < 3$
.....	$-2 < x < 2$
.....	$d(x; 3) < 2$
.....	$d(1; x) > 1$
.....	$d(x; -2) < 3$
$ x < \sqrt{2}$
$ x-1 \geq 1$
$\left x+\frac{3}{2}\right < \frac{1}{2}$

الحصر والمجالات

حل التمرين الأول

المقارنة بين كل عددين مما يلي

$$\text{✪ } (x+1)^2 \text{ و } (x+2)^2$$

بما أن $x > 1$ ، فإن: $0 < x+1 < x+2$

بتربيع الأطراف الموجبة نجد: $(x+1)^2 < (x+2)^2$

$$\text{✪ } (1-x)^2 \text{ و } (2-3x)^2$$

من أجل كل عدد حقيقي $x > 1$ لدينا: $2x > x$

بضرب طرفي المتباينة في العدد السالب (-1) نجد: $-2x < -x$

.....(المتباينة تعكس الترتيب)

بإضافة العدد (+2) إلى الطرفين نجد: $2-2x < 2-x$

ولدينا أيضا: $x > 1$ معناه $-x < -1$

بجمع المتباينتين طرفا لطرف نجد:

$$2-3x < 1-x < 0$$

بتربيع الأطراف السالبة نجد: $(2-3x)^2 < (1-x)^2$

$$\text{✪ } \sqrt{x+9} \text{ و } \sqrt{x+8}$$

بما أن: $x > 1$ فإن: $0 < x+8 < x+9$

بأخذ الجذر التربيعي للأطراف الموجبة نجد: $\sqrt{x+8} < \sqrt{x+9}$

$$\text{✪ } \sqrt{x+\frac{157}{50}} \text{ و } \sqrt{x+\pi}$$

لدينا: $\frac{157}{50} < \pi$

ومنه: $0 < x+\frac{157}{50} < x+\pi$

بأخذ الجذر التربيعي للأطراف الموجبة نجد: $\sqrt{x+\frac{157}{50}} < \sqrt{x+\pi}$

حل التمرين الثاني

الحالة الأولى:

لدينا: $2 < x < \frac{3}{2}$

بالبضرب في العدد الموجب 2 نجد: $3 < 2x < 4$

بإضافة العدد (-3) نجد: $0 < 2x-3 < 1$

ومنه:

$$(2x-3)^3 < (2x-3)^2 < (2x-3)$$

الحالة الثانية:

لدينا: $\frac{3}{2} < x < 2$

بالضرب في العدد الموجب 4 نجد: $6 < 4x < 8$

بإضافة العدد 1 نجد: $1 < 7 < 4x+1 < 9$

ومنه: $(4x+1)^3 > (4x+1)^2 > (4x+1)$

حل التمرين الثالث

مقارنة كل عددين دون استعمال الآلة الحاسبة ومع التبرير:

$$\text{① } \frac{3}{72} < \frac{5}{72} \text{ (لأن لهما نفس المقام ، إذن تبقى فقط المقارنة بين البسطين)}$$

$$\text{② } -\frac{105}{47} < \frac{151}{68} \text{ (العدد السالب دوما أقل من أي عدد موجب)}$$

$$\text{④ } \frac{13}{28} < \frac{13}{17}$$

(بما أن: $28 > 17$ فإن: $\frac{1}{28} < \frac{1}{17}$.) (بالضرب في العدد الموجب

13 نتحصّل على النتيجة)

$$\text{⑦ } -10^{-2} < -10^{-1}$$

(بما أن: $10^1 < 10^2$ بأخذ مقلوب الطرفين: $\frac{1}{10^1} > \frac{1}{10^2}$ أي:

$$10^{-1} > 10^{-2}$$

ومنه بالضرب في العدد السالب (-1) نجد: $-10^{-2} < -10^{-1}$

حل التمرين 4

نفس سؤال التمرين السابق:

$$\text{① } \frac{1}{3\sqrt{5}} > \frac{1}{5\sqrt{3}}$$

التبرير: لدينا: $5\sqrt{3} = \sqrt{25}\sqrt{3} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{75}$ و $3\sqrt{5} = \sqrt{9}\sqrt{5} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{45}$

$$3\sqrt{5} = \sqrt{9}\sqrt{5} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{45}$$

ومنه: $\sqrt{45} < \sqrt{75}$ أي: $3\sqrt{5} < 5\sqrt{3}$

بأخذ مقلوب الطرفين نتحصّل على النتيجة

$$\text{② } \frac{1}{3\sqrt{2}} < \frac{1}{2\sqrt{3}} \text{ التبرير: بنفس طريقة التبرير السابق.}$$

$$\text{③ } \sqrt{3} + \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$$

$$\text{④ } 2\sqrt{5} + 3\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10} - 3}$$

تلميح: لتبرير كل من: ③ و ④ يكفي ضرب الكسر في مرافق المقام.

$$\text{⑤ } \sqrt{9+4\sqrt{3}} > 2 + \sqrt{3}$$

التبرير: لدينا: $2 + \sqrt{3} = \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2} = \sqrt{7+2\sqrt{3}}$

وبما أن: $9+4\sqrt{3} > 7+2\sqrt{3}$

فإن: $\sqrt{9+4\sqrt{3}} > \sqrt{7+2\sqrt{3}}$

ومنه نستنتج أن: $\sqrt{9+4\sqrt{3}} > 2 + \sqrt{3}$

$$\text{⑥ } \sqrt{10+6\sqrt{2}} = 3 + \sqrt{2}$$

بضرب كل من المتباينتين في العدد السالب (-1) نجد:

$$\begin{cases} 1 > -x > -1 \\ -1 > -y > -2 \end{cases}$$

بالجمع طرفاً لطرف نجد: $0 > -x - y > -3$

$$\text{أو } -3 < -x - y < 0$$

$$\star \text{ حصر: } x + 2y^2$$

بتربيع المتباينة $1 < y < 2$ نجد: $1 < y^2 < 4$

بالضرب في العدد الموجب 2 نجد: $2 < 2y^2 < 8$

بالجمع مع المتباينة $-1 < x < 1$ نجد: $1 < x + 2y^2 < 9$

حل التمرين 8

$$(A) \quad 1 < x < 5$$

$$(B) \quad 1 < y < 4$$

$$\star \text{ حصر: } N = 3x - \sqrt{y}$$

بضرب المتباينة (A) في العدد الموجب 3 نجد:

$$(C) \quad 3 < 3x < 15$$

بأخذ الجذر التربيعي لأطراف المتباينة (B) نجد: $1 < \sqrt{y} < 2$

بالضرب في العدد السالب (-1) نجد:

$$(D) \quad -2 < -\sqrt{y} < -1$$

بجمع المتباينتين (C) و (D) نجد: $1 < 3x - \sqrt{y} < 14$

$$\star \text{ حصر: } M = \frac{x^2 - x}{4}$$

بتربيع أطراف المتباينة (A) نجد:

$$(C) \quad 1 < x^2 < 25$$

بضرب أطراف المتباينة (A) في العدد السالب (-1) نجد:

$$(D) \quad -5 < -x < -1$$

بجمع المتباينتين (C) و (D) نجد: $-4 < x^2 - x < 24$

بالضرب في العدد الموجب $\frac{1}{4}$ نجد: $-1 < \frac{x^2 - x}{4} < 6$

$$\star \text{ حصر: } P = \frac{(x-6)^2}{1 - \sqrt{x+y}}$$

بإضافة العدد (-6) إلى طرفي المتباينة (A) نجد $-5 < x - 6 < -1$

بتربيع الإطراف السالبة نجد: $25 > (x-6)^2 > 1$

$$\text{أي: (C) } 1 < (x-6)^2 < 25$$

بجمع (A) و (B) طرفاً لطرف نجد: $2 < x + y < 9$

بأخذ الجذر التربيعي للأطراف نجد: $\sqrt{2} < \sqrt{x+y} < 3$

التبرير: بنفس الطريقة السابقة.

$$\star 7 \quad \sqrt{11 + 2\sqrt{35}} < 12 + 2\sqrt{35}$$

التبرير: بنفس الطريقة السابقة.

$$\star 8 \quad \sqrt{1 - 10^{-18}} < \sqrt{1 - 10^{-19}}$$

تلميح: يكفي المقارنة بين $1 - 10^{-18}$ و $1 - 10^{-19}$

حل التمرين 5

$$\star 1 \text{ حصر } 3x + 2$$

$$\text{لدينا: } -2 < x < 3$$

بالضرب في العدد الموجب 3 نجد: $-6 < 3x < 9$

بإضافة العدد: 2 نجد: $-4 < 3x + 2 < 11$

ملاحظة: الأمثلة: 2، 3، 4. تحل بنفس الطريقة.

$$\star 7 \text{ حصر: } \frac{1}{7-x}$$

$$\text{لدينا: } -2 < x < 3$$

بضرب المتباينة في العدد السالب (-1) نجد: $2 > -x > -3$

بإضافة العدد: 7 نجد: $9 > 7 - x > 4$

بأخذ مقلوب أطراف المتباينة (الأطراف لها نفس الإشارة) نجد: $\frac{1}{9} < \frac{1}{7-x} < \frac{1}{4}$

$$\frac{1}{7-x} < \frac{1}{4}$$

الأمثلة 5 و 6 تحل بنفس الطريقة.

حل التمرين 6

$$\star 4 \text{ حصر } 10 - y^2$$

$$\text{لدينا: } 2 \leq y \leq 6$$

بالضرب في العدد السالب (-1) نجد: $-2 \geq -y \geq -6$

بإضافة العدد 10 نجد: $8 \geq 10 - y \geq 4$

$$\star 7 \text{ حصر: } \frac{3}{2-y^2}$$

$$\text{لدينا: } 2 \leq y \leq 6$$

بالضرب في العدد السالب (-1) نجد: $-2 \geq -y \geq -6$

بإضافة العدد 2 نجد: $0 \geq 2 - y \geq -4$

$$\text{بأخذ المقلوب نجد: } \frac{1}{y-2} \leq -\frac{1}{4}$$

حل التمرين 7

$$\begin{cases} -1 < x < 1 \\ 1 < y < 2 \end{cases} \text{ و } x \text{ و } y \text{ عددان حقيقيان حيث:}$$

$$\star \text{ حصر } -x - y$$

$$[-2; +\infty[\cup]-\infty; \frac{1}{2}] = \text{و} \quad [-2; +\infty[\cap]-\infty; \frac{1}{2}] = [-2; \frac{1}{2}] \text{ ③}$$

$$]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$$

$$[\sqrt{2}; +\infty[\cup]-2; \frac{3}{2}] = \text{و} \quad [\sqrt{2}; +\infty[\cap]-2; \frac{3}{2}] = [\sqrt{2}; \frac{3}{2}] \text{ ④}$$

$$]-2; +\infty[$$

$$]-4; 1[\cup]\sqrt{2}; +\infty[=]-4; 1[\cup \text{و} \quad]-4; 1[\cap]\sqrt{2}; +\infty[= \phi \text{ ⑤}$$

$$[\sqrt{2}; +\infty[$$

$$[4; +\infty[\cup]-\infty; 4] = \mathbb{R} \text{ و} \quad]-\infty; 4[\cap [4; +\infty[= \{4\} \text{ ⑥}$$

$$]-\infty; 3[\cap]3; +\infty[= \phi \text{ ⑦}$$

$$]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[= \mathbb{R} \text{ و}$$

$$]-4; 5[\cap]-\infty; +\infty[= \mathbb{R} \text{ و} \quad]-4; 5[\cap]-\infty; +\infty[=]-4; 5[\text{ ⑧}$$

حل التمرين 10

$$x \in]-2; +\infty[\cap]5; +\infty[= [5; +\infty[\text{ ①}$$

$$x \in]-\infty; 4[\cap]2; +\infty[= [2; 4[\text{ ②}$$

$$x \in]-\infty; 0[\cap]1; +\infty[= \phi \text{ ③}$$

$$x \in]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[= \mathbb{R} \text{ ④}$$

$$x \in]-1; +\infty[\cup]3; +\infty[=]-1; +\infty[\text{ ⑤}$$

$$x \in]-\infty; \sqrt{3}[\cup]\frac{3}{2}; +\infty[= \mathbb{R} \text{ ⑥}$$

القيمة المطلقة والمجالات

التمرين الأول

$$|x+2| < 2 \text{ حل المتراجحة ②}$$

$$|x+2| < 2 \text{ معناه: } -2 < x+2 < 2 \text{ أي:}$$

$$-4 < x < 0 \text{ (بإضافة } -2 \text{ إلى أطراف المتباينات)}$$

$$x \in [-4; 0] \text{ ومنه:}$$

إذن: حلول المتراجحة هي المجال $]-4; 0[$

🌟 **تنبيه:** عند حل متراجحات من الشكل $|x+a| \geq b$ أو أكبر

تماما نستعين بجدول الاشارة

$$|x-3| > 2 \text{ حل المتراجحة ②}$$

جدول الاشارة

بالضرب في العدد السالب (-1) نجد: $-3 < -\sqrt{x+y} < -\sqrt{2}$

بإضافة العدد 1 نجد: $-2 < 1 - \sqrt{x+y} < 1 - \sqrt{2}$

بأخذ مقلوب الأطراف نجد:

$$\frac{1}{1-\sqrt{2}} < \frac{1}{1-\sqrt{x+y}} < \frac{-1}{2} \quad (D)$$

المتباينتين: (C) و (D) مباشرة (ليست كل الحدود موجبة)

بضرب أطراف المتباينة (D) في (-1) نجد:

$$\frac{1}{2} < -\frac{1}{1-\sqrt{x+y}} < \frac{1}{\sqrt{2}-1} \quad (E)$$

$$\frac{1}{2} < -\frac{(x-6)^2}{1-\sqrt{x+y}} < \frac{25}{\sqrt{2}-1} \text{ نجد: (E) و (C)}$$

$$\text{❖ حصر } \frac{-y^2+x^3}{\sqrt{\frac{xy}{5}}}$$

بتكعيب المتباينة (A) نجد $1 < x^3 < 125$

بتربيع المتباينة (B) وضربها في (-1) نجد: $-16 < -y^2 < -1$

بجمع المتباينتين طرفا لطرف نجد: $-15 < -y^2 + x^3 < 124$ (C)

بضرب المتباينتين (A) و (B) نجد: $1 < xy < 20$

بالضرب في العدد الموجب $\frac{1}{5}$ نجد: $\frac{1}{5} < \frac{xy}{5} < 4$

بأخذ الجذر التربيعي للأطراف نجد:

$$\sqrt{\frac{1}{5}} < \sqrt{\frac{xy}{5}} < 2$$

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{\frac{xy}{5}}} < \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{5}}} \quad (D)$$

نلاحظ أنه لانستطيع ضرب المتباينتين (C) و (D) مباشرة، إذن:

نفصل الحالات

$$\text{لما: } 0 < y^2 - x^3 < 15 \text{ أي: } -15 < -y^2 + x^3 < 0$$

$$\text{ومنه بالضرب نجد: } 0 < \frac{y^2 - x^3}{\sqrt{\frac{xy}{5}}} < \frac{15}{\sqrt{\frac{1}{5}}}$$

$$\text{ومنه بالضرب في } (-1) \text{ نجد: } -\frac{15}{\sqrt{\frac{1}{5}}} < \frac{-y^2 + x^3}{\sqrt{\frac{xy}{5}}} < 0$$

$$\text{لما: } 0 < -y^2 + x^3 < 124$$

$$\text{بضرب المتباينتين طرفا لطرف نجد: } 0 < \frac{-y^2 + x^3}{\sqrt{\frac{xy}{5}}} < \frac{124}{\sqrt{\frac{1}{5}}}$$

ومنه بجمع الحالتين نجد:

$$-\frac{15}{\sqrt{\frac{1}{5}}} < \frac{-y^2 + x^3}{\sqrt{\frac{xy}{5}}} < \frac{124}{\sqrt{\frac{1}{5}}}$$

حل التمرين 9

$$[-1; 3] \cup [1; 5] = [-1; 5] \text{ و} \quad [-1; 3] \cap [1; 5] = [1; 3] \text{ ①}$$

$$]3; 8[\cup]-5; 4[= [-5; 8] \text{ و} \quad]3; 8[\cap]-5; 4[=]3; 4[\text{ ②}$$

$c - r \leq x \leq c + r$ (في صيغة حصر)

$d(c; x) \leq r$ (في صيغة مسافة)

$|x - c| \leq r$ (في صيغة قيمة مطلقة)

✪ إتمام الجدول

الحصر	المجال	المسافة	القيمة المطلقة
$1 \leq x \leq 5$	$x \in [1; 5]$	$d(x; 3) \leq 2$	$ x - 3 \leq 2$
$0 < x < 3$	$x \in]0; 3[$	$d(x; \frac{3}{2}) < \frac{3}{2}$	$ x - \frac{3}{2} < \frac{3}{2}$
$-2 < x < 2$	$x \in]-2; 2[$	$d(x; 0) < 2$	$ x < 2$
$-5 < x < -1$	$x \in]-5; -1[$	$d(x; -3) < 2$	$ x + 3 < 2$
$x < 0$ أو $x > 2$	$x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$	$d(1; x) > 1$	$ 1 - x > 1$
$-5 < x < 1$	$x \in]-5; 1[$	$d(x; -2) < 3$	$ x + 2 < 3$
$-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$	$x \in]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$	$d(x; 0) < \sqrt{2}$	$ x < \sqrt{2}$
$x < 0$ أو $x > 2$	$x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$	$d(x; 1) > 1$	$ x - 1 \geq 1$
$-2 < x < -1$	$x \in]-2; -1[$	$d(x; \frac{3}{2}) < \frac{1}{2}$	$ x + \frac{3}{2} < \frac{1}{2}$

✪ كتابة C دون رمز القيمة المطلقة

للإجابة على مثل هذه الاستئلة دوما نستعين بجدول الإشارة

جدول الإشارة	$+\infty$	4	3	$-\infty$	x
		+	+		إشارة $x-3$
		+	-		إشارة $x-4$
		x-3	x-3		$ x-3 $
		x-4	4-x		$ x-4 $
		$(x-3)+2(x-4)$	$(x-3)+2(4-x)$		C

x	$-\infty$	3	$+\infty$
إشارة $x-3$	-	0	+
$ x-3 $	3-x	0	x-3
$ x-3 > 2$	3-x > 2		x-3 > 2

على المجال $]-\infty; 3]$ المتراجحة تصبح: $3 - x > 2$ أي: $x < 1$ ومنه
الحلول تنتمي إلى المجال $]-\infty; 1[$

نتيجة: حلول المتراجحة على $]-\infty; 3]$ هي تقاطع المجالين:

$]-\infty; 3] \cap]-\infty; 1[=]-\infty; 1[$ *.....

على المجال $]3; +\infty[$ المتراجحة تصبح $x - 3 > 2$ أي: $x > 5$ ومنه
الحلول تنتمي إلى المجال $]5; +\infty[$

نتيجة: حلول المتراجحة على $]5; +\infty[$ هي تقاطع المجالين:

$]3; +\infty[\cap]5; +\infty[=]5; +\infty[$ ☆.....

من ☆ و * نستنتج أن حلول المتراجحة على \mathbb{R} هي:

$]-\infty; 1[\cup]5; +\infty[$

باقي الأمثلة تناقش بنفس الطريقة مع المثالين السابقين

التمرين الثاني

✪ حصر x: لدينا: $|x - 2| < 3$ أي:

$-3 < x - 2 < 3$ معناه: $-1 < x < 5$ (بإضافة 2 إلى كل طرف)

✪ حصر $2x + 1$: لدينا من السؤال السابق $-1 < x < 5$ أي:

$-2 < 2x < 10$ (بضرب كل طرف في العدد 2 الموجب) ومنه:

$-1 < 2x + 1 < 11$ (بإضافة 1 إلى كل طرف)

✪ حصر $4 - 5x$: لدينا من السؤال السابق $-1 < x < 5$ أي:

$-25 < -5x < 5$ (بضرب كل طرف في (-5) السالب)

ومنه: $-21 < 4 - 5x < 9$ (بإضافة 4 إلى كل طرف)

لا تتغير نتيجة الحصر السابق لأن: $|x - 2| = |2 - x|$

التمرين الثالث

تذكير: c عدد حقيقي و r عدد حقيقي موجب، من أجل

كل عدد حقيقي x النصوص الاتية متكافئة:

$x \in [c - r, c + r]$ (في صيغة مجال)

حل المعادلة $C=5$

✓ على المجال $]-\infty; 3[$ المعادلة تصبح:

$$5 = 3 - x + 8 - 2x \quad \text{أي: } -3x = -6 \quad \text{ومنه: } x = 2 \quad \text{و }]-\infty; 3[$$

نتيجة: حلول المعادلة على المجال $]-\infty; 3[$ هي: $x = 2$

✓ على المجال: $[3; 4[$ المعادلة تصبح:

$$5 = x - 3 + 8 - 2x \quad \text{أي: } x = 0 \quad \text{لكن: } 0 \notin [3; 4[\quad \text{ومنه المعادلة لا تقبل}$$

حلول على المجال: $[3; 4[$

✓ على المجال: $]4; +\infty[$ المعادلة تصبح:

$$5 = x - 3 + 2x - 8 \quad \text{أي } 3x = 16 \quad \text{ومنه: } x = \frac{16}{3} \quad \text{و }]4; +\infty[\in \frac{16}{3}$$

نتيجة: حلول المعادلة على $]4; +\infty[$ هي: $x = \frac{16}{3}$

إذن مجموعة حلول المعادلة على \mathbb{R} هي: $S = \left\{ 2; \frac{16}{3} \right\}$

بأبي الأمثلة تناقش بنفس الطريقة

التمرين الخامس

✓ $P\left(\frac{1}{2}\right) = |2\left(\frac{1}{2}\right) - 3| - 5 = |-2| - 5 = 2 - 5 = -3$

بنفس الطريقة نجد:

✓ $P(\sqrt{5}) = 2\sqrt{5} - 8$ ✓ $P(0) = -2$ ✓ $P(-2) = 2$

✳ إيجاد قيم x بحيث: $P(x) = x$

✳ $P(x) = x$ معناه: $|2x - 3| - 5 = x$

جدول الإشارة

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
إشارة $2x - 3$	-	0	+
$ 2x - 3 $	$3 - 2x$	0	$2x - 3$
$P(x)$	$3 - 2x - 5$		$2x - 3 - 5$
$P(x) = x$	$3 - 2x - 5 = x$		$2x - 3 - 5 = x$

✓ على المجال: $]-\infty; \frac{3}{2}[$ المعادلة تصبح: $-3x = 2$

أي: $x = -\frac{2}{3}$ و $]-\infty; \frac{3}{2}[\in -\frac{2}{3}$

نتيجة: حلول المعادلة على المجال $]-\infty; \frac{3}{2}[$ هي: $x = -\frac{2}{3}$

✓ على المجال $]\frac{3}{2}; +\infty[$ المعادلة تصبح: $2x - 8 = x$ أي $x = 8$

و $]\frac{3}{2}; +\infty[\in 8$

نتيجة: حلول المعادلة على المجال $]\frac{3}{2}; +\infty[$ هي: $x = 8$

إذن مجموعة قيم x التي تحقق $P(x) = x$ هي: $S = \left\{ -\frac{2}{3}; 8 \right\}$

✳ حل المعادلة $P(x) = 2$

$x \leq \frac{3}{2}$ معناه: $]-\infty; \frac{3}{2}[$ من جدول الإشارة السابق لدينا:

✓ على المجال $]-\infty; \frac{3}{2}[$ تصبح المعادلة: $-2x - 2 = 2$ أي $x = -2$

و $]-\infty; \frac{3}{2}[\in -2$

نتيجة: حلول المعادلة على المجال $]-\infty; \frac{3}{2}[$ هي: $x = -2$

✳ حل المتراجحة $P(x) \leq 2x - 5$

من جدول الإشارة السابق لدينا:

✓ على المجال $]-\infty; \frac{3}{2}[$ المتراجحة تصبح: $-2x - 2 \leq 2x - 5$ أي:

$4x \geq 3$ أي: $x \geq \frac{3}{4}$ ومنه: $x \in [\frac{3}{4}; +\infty[$ (مجال انتماء الحلول)

نتيجة: حلول المتراجحة على $]-\infty; \frac{3}{2}[$ هي تقاطع المجالين:

$$]-\infty; \frac{3}{2}[\cap [\frac{3}{4}; +\infty[= [\frac{3}{4}; \frac{3}{2}[$$

✓ على المجال: $]\frac{3}{2}; +\infty[$ المتراجحة تصبح: $2x - 8 \leq 2x - 5$

أي: $-5 \leq -8$ (تناقض) ومنه: ليس للمعادلة حلول على هذا

المجال.

إذن: حلول المتراجحة على \mathbb{R} هي المجال $[\frac{3}{4}; \frac{3}{2}[$

✳ حل المتراجحة: $P(x) \leq 10^{-3}$

من جدول الإشارة السابق لدينا:

✓ على المجال $]\frac{3}{2}; +\infty[$ المتراجحة تصبح:

$2x - 8 \leq 10^{-3}$ أي: $x \leq \frac{10^{-3} + 8}{2}$ ومنه:

$x \in]-\infty; \frac{10^{-3} + 8}{2}[$ (مجال انتماء الحلول)

نتيجة: حلول المتراجحة على $]\frac{3}{2}; +\infty[$ هي تقاطع المجالين:

$$]\frac{3}{2}; +\infty[\cap]-\infty; \frac{10^{-3} + 8}{2}[= \left[\frac{3}{2}; \frac{10^{-3} + 8}{2} \right]$$

لا تعطني سمكة
بل
علمني كيف اصطادها

