الأستاذ حسان طيبي — education-onec-dz.blogspot.com — الموسم الدراسي: 2022/2021

سلسلة تمارين حول: عموميات على الدوال — المستوى: 1 ج.م.ع

01 عين في $\mathbb{R}$ مجموعة تعريف الدوال الآتية :

1) $f(x)=2x+3$ 2) $g(x)=\dfrac{3}{x-1}$

3) $h(x)=\sqrt{x+4}$ 4) $k(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$

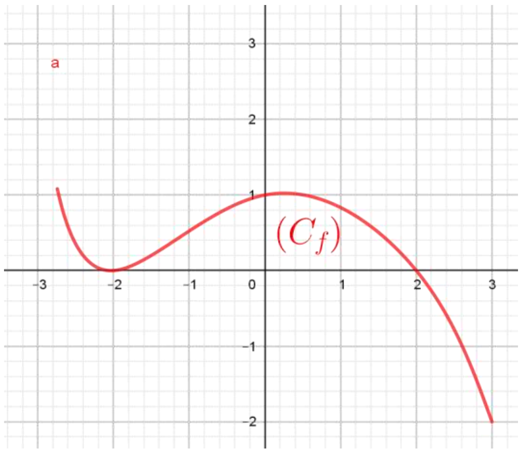
5) $i(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$.

02 لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=1-2x$

1) عين صور الأعداد : -2 ، 3 ، $\dfrac{3}{2}$

2) عين إن وجدت سوابق الأعداد : 0 ، 2 ، -1

03 f الدالة المعرفة بتمثيلها البياني التالي :



بقراءة بيانية عين :

1) $f(-1)$ ، $f(3)$ ، $f(2)$ و $f(-2)$

2) عين السوابق المكنة للأعداد: 0 و 2

3) حل بيانيا المعادلة $f(x)=0$ والمتراجحة

$f(x)-1\leq -1$

04 أدرس اتجاه تغير الدالة g على I في كل حالة من الحالات الآتية:

$g(x)=-\dfrac{2}{5}x+4 \quad , \quad I=\mathbb{R}$

$g(x)=2\sqrt{x}-4 \quad , \quad I=[0,+\infty[$

$g(x)=-x^2+1 \quad , \quad I=]-\infty,0]$

$g(x)=\dfrac{4}{x-2}+1 \quad , \quad I=]2;+\infty[$

$g(x)=\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2-4 \quad , \quad I=\left[\dfrac{1}{3},+\infty\right[$

$g(x)=2(x+4)^2-1 \quad , \quad I=]-\infty,-4]$

05 لتكن f الدالة المعرفة بـ: $f(x)=1-\dfrac{1}{x+1}$ ، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أثبت أن $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$

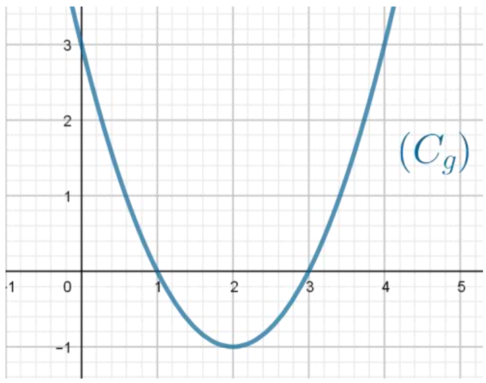
2) أحسب -إن أمكن- $f(0)$ ، $f(1)$ ، $f(-1)$ ، $f(\sqrt{2})$

3) جد السوابق الممكنة للعدد 0 .

4) عين قيمتي العددين a و b حتى تكون النقطتان $A(0,a)$ و $B(2,b)$ تنتميان إلى (C_f)

5) أدرس تغيرات الدالة f على المجال $]-1,+\infty[$ وعلى المجال $]-\infty,-1[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

06 g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بتمثيلها البياني الآتي:



بقراءة بيانية، أجب عن ما يلي:

1) عين صور الأعداد التالية بالدالة g : 1 ، 3 ، 4 و 0 .

2) عين السوابق الممكنة بالدالة g للأعداد 0 ثم -1 .

3) شكل جدول تغيرات الدالة g .

4) عين القيم الحدية للدالة g.

5) حل المعادلة $g(x)=0$ ثم استنتج إشارة الدالة g على مجال تعريفها.

6) قارن بين $g(2)$ و $g(4)$ مع التعليل ، ثم قارن بين $g(\dfrac{1}{2})$ و $g(1)$.

- هل يمكن المقارنة بين $g(4)$ و $g(1)$ ؟

7) أرسم في نفس المعلم السابق المستقيم (Δ) ذو المعادلة $(\Delta): y = x - 1$

أ) حل بيانيا المعادلة $g(x) = x - 1$

ب) استنتج حلول المتراجحة $g(x) < x - 1$

8) حدد مع التعليل شفعية الدالة g

07 f الدالة المعرفة بجدول تغيراتها الآتي :

x	-4		-2		1		2		5
$f(x)$	-2	↘	-3	↗	0	↗	4	↘	1

1- عين مجموعة تعريف الدالة f.

2- عين اتجاه تغير الدالة f .

3- عين القيم الحدية للدالة f ومن أجل أي قيم لـ x تبلغها ؟.

4- حل في المجال $[-4;5]$ المعادلة $f(x) = 0$.

5- حدد إشارة الدالة f على المجال $[-4;5]$.

6- قارن بين العددين $f(0)$ و $f(1)$ وبين العددين $f(3)$ و $f(4)$ مع التبرير.

7- أرسم (C_f) المنحنى البياني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

8- حدّد شفعية الدالة f مع التعليل.

اللهم إنّي أسألك أن تُيّسرلي أموري، وتكتب لي القبول والتوفيق في كل أمر

صدقة جارية علي وعلى والديّ حفظهما الله

الأستاذ حسان طيبي

01 تعيين مجموعة تعريف لكل دالة من الدوال المعطاة :

1) $f(x)=2x+3$

بما أن f لا تحتوي على جذور ولا كسور فمجموعة تعريف الدالة f هي $\mathbb{R}$

2) $g(x)=\frac{3}{x-1}$

الدالة f معرفة إذا كان المقام لا ينعدم أي $x-1\neq 0$ أي $x\neq 1$ ومنه $D_g=\mathbb{R}-\{1\}$

3) $h(x)=\sqrt{x+4}$

الدالة h معرفة إذا كان ما بداخل الجذر التربيعي موجب أي $x+4\geq 0$ معناه $x\geq -4$ ومنه $D_h=[-4;+\infty[$

4) $k(x)=\frac{1}{x^2-1}$

الدالة k معرفة إذا كان المقام غير معدوم أي $x^2-1\neq 0$ ومنه $x^2\neq 1$ أي $x\neq 1$ أو $x\neq -1$ ومنه $D_k=\mathbb{R}-\{-1,1\}$

5) $i(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$

الدالة i معرفة إذا كان المقام لا ينعدم وما بداخل الجذر التربيعي موجب أي $x-1>0$ ومنه $x>1$ إذاً : $D_i=]1;+\infty[$

02 لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=1-2x$

1) حساب الصور

$$f(-2)=1-2(-2)=5$$
$$f(3)=1-2\times 3=-5$$
$$f\left(\frac{3}{2}\right)=1-2\frac{3}{2}=-2$$

2) تعيين السوابق الممكنة للأعداد المعطاة

لتعيين السوابق الممكنة للعدد 0 نحل المعادلة $f(x)=0$

$f(x)=0$ معناه $1-2x=0$ أي $x=\frac{1}{2}$

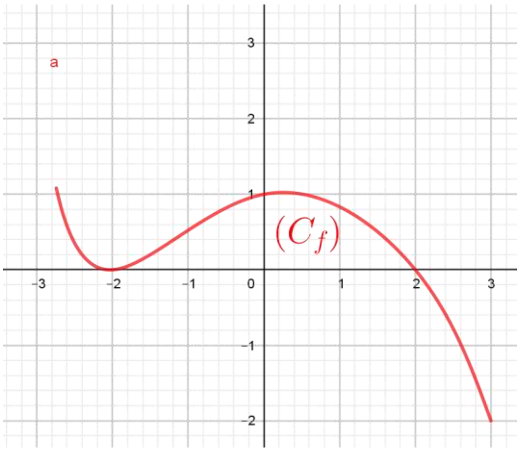
ومنه السوابق الممكنة للعدد 0 هي $\left\{\frac{1}{2}\right\}$

بنفس الطريقة نعين السوابق الممكنة لـ 2 و -1

$f(x)=2$ معناه $1-2x=2$ أي $2x=-1$ ومنه $x=\frac{-1}{2}$

$f(x)=-1$ معناه $1-2x=-1$ ومنه $x=1$

03



بقراءة بيانية نجد :

1) $f(-1)=\frac{1}{2}$ ، $f(3)=-2$ ، $f(2)=0$ و $f(-2)=0$

2) السوابق الممكنة لـ 0 هي 2 و -2

السوابق الممكنة لـ 2 : لا توجد

3) بيانيا المعادلة $f(x)=0$ تقبلُ حلّين هما 2 و -2

حلول المتراجحة $f(x)-1\leq -1$:

$f(x)-1\leq -1$ تكافئ $f(x)\leq -1+1$ أي $f(x)\leq 0$

حلول المتراجحة $f(x)\leq 0$ بيانياً : هي المجال المغلق $[2;3]$.

ملاحظة: لو طُلِب منا حلول المتراجحة $f(x)<0$ يكون المجال الحلول هو $]2;3[$

04 دراسة اتجاه تغير الدالة g على I في كل حالة من الحالات الآتية:

$g(x)=-\frac{2}{5}x+4 \quad , \quad I=\mathbb{R}$

ليكن x_1 و x_2 من $\mathbb{R}$ بحيث: $x_1<x_2$

ومنه $\frac{-2}{5}x_1>\frac{-2}{5}x_2$

(تتغير اتجاه المتراجحة لأننا ضربنا في عدد سالب $\frac{-2}{5}$)

وعليه $\frac{-2}{5}x_1+4>\frac{-2}{5}x_2+4$

ومنه $g(x_1)>g(x_2)$

ومنه نستنتج أن الدالة g متناقصة تماماً على $\mathbb{R}$.

$$g(x)=2\sqrt{x}-4 \quad , \quad I=[0,+\infty[$$

ليكن x_1 و x_2 من $[0;+\infty[$ بحيث : $x_1<x_2$

ومنه $\sqrt{x_1}<\sqrt{x_2}$

بالضرب في (2) $2\sqrt{x_1}<2\sqrt{x_2}$

بإضافة (-4) $2\sqrt{x_1}-4<2\sqrt{x_2}-4$

نجد $g(x_1)<g(x_2)$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$

$$g(x)=-x^2+1 \quad , \quad I=]-\infty,0]$$

ليكن x_1 و x_2 من $]-\infty;0]$ بحيث : $x_1<x_2\leq 0$

بتربيع الطرفين "يتغير اتجاه المتراجحة لأن العددان x_1 و x_2 كلاهُما سالبان " ومنه نجد: $x_1^2>x_2^2$

بالضرب في العدد (-1) : $-x_1^2<-x_2^2$

بإضافة العدد 1 : $-x_1^2+1<-x_2^2+1$

ومنه : $g(x_1)<g(x_2)$

أي أن الدالة g متزايدة تماماً على المجال $]-\infty;0]$

$$g(x)=\frac{4}{x-2}+1 \quad , \quad I=]2;+\infty]$$

ليكن x_1 و x_2 من $]-\infty;0]$ بحيث : $2<x_1<x_2$

ومنه $2-2<x_1-2<x_2-2$

بالمرور المقلوب $\frac{1}{x_1-2}>\frac{1}{x_2-2}$

وعليه بضرب الطرفين في 4 $\frac{4}{x_1-2}>\frac{4}{x_2-2}$

ومنه $\frac{4}{x_1-2}+1>\frac{4}{x_2-2}+1$

وعليه $g(x_1)>g(x_2)$ ومنه الدالة g متناقصة تماما على $]2;+\infty]$

$$g(x)=\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-4 \quad , \quad I=\left[\frac{1}{3},+\infty\right[$$

ليكن x_1 و x_2 من $\left[\frac{1}{3},+\infty\right[$ بحيث : $\frac{1}{3}\leq x_1<x_2$

ومنه $0\leq x_1-\frac{1}{3}<x_2-\frac{1}{3}$

بتربيع الطرفين $\left(x_1-\frac{1}{3}\right)^2<\left(x_2-\frac{1}{3}\right)^2$

وعليه $\left(x_1-\frac{1}{3}\right)^2-4<\left(x_2-\frac{1}{3}\right)^2-4$

ومنه $g(x_1)\leq g(x_2)$ ومنه الدالة g متزايدة تماما على المجال $\left[\frac{1}{3},+\infty\right[$.

$$g(x)=2(x+4)^2-1 \quad , \quad I=]-\infty,-4]$$

نتبع نفس الطريقة السابقة فنجد أن الدالة g متناقصة تماما على $]-\infty,-4]$

05 لتكن f الدالة المعرفة بـ: $f(x)=1-\frac{1}{x+1}$، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) إثبات أن $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$

f معرفة إذا كان $x+1\neq 0$ أي $x\neq -1$ ومنه

$$D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$$

2) حساب $f(0)$ ، $f(1)$ ، $f(-1)$ ، $f(\sqrt{2})$

$$f(0)=1-\frac{1}{0+1}=1-1=0$$

$$f(1)=1-\frac{1}{1+1}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

لا يمكن حساب $f(-1)$ لأن -1 لا ينتمي إلى D_f.

3) ايجاد السوابق الممكنة للعدد 0 :

نحل المعادلة $f(x)=0$.

$f(x)=0$ معناه $1-\frac{1}{x+1}=0$ أي $1=\frac{1}{x+1}$

ومنه $x+1=1$ معناه $x=0$

4) تعيين قيمتي العددين a و b حتى تكون النقطتان $A(0,a)$ و $B(2,b)$ تنتميان إلى (C_f)

$A(0,a)$ و $B(2,b)$ تنتميان إلى (C_f) معناه $f(0)=a$ و $f(2)=b$

وجدنا سابقاً أن $f(0)=0$ ومن جهة أخرى $f(0)=a$ بالمطابقة $a=0$

$f(2)=1-\frac{1}{2+1}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}=b$ إذا $b=\frac{2}{3}$

5) دراسة اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1,+\infty[$ وعلى المجال $]-\infty,-1[$ ، ثم تشكيل جدول تغيراتها.

على المجال $]-1,+\infty[$:

ليكن x_1 و x_2 من المجال $]-1,+\infty[$ حيث $x_1<x_2$

ومنه $x_1+1<x_2+1$

وعليه $\dfrac{1}{x_1+1}>\dfrac{1}{x_2+1}$

بالضرب في (-1) $\dfrac{-1}{x_1+1}<\dfrac{-1}{x_2+1}$

وعليه $1-\dfrac{1}{x_1+1}<1-\dfrac{1}{x_2+1}$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$

على المجال $]-\infty;-1[$:

ليكن x_1 و x_2 من المجال $]-\infty;-1[$ حيث $x_1<x_2$

ومنه $x_1+1<x_2+1$

وعليه $\dfrac{1}{x_1+1}>\dfrac{1}{x_2+1}$

بالضرب في (-1) $\dfrac{-1}{x_1+1}<\dfrac{-1}{x_2+1}$

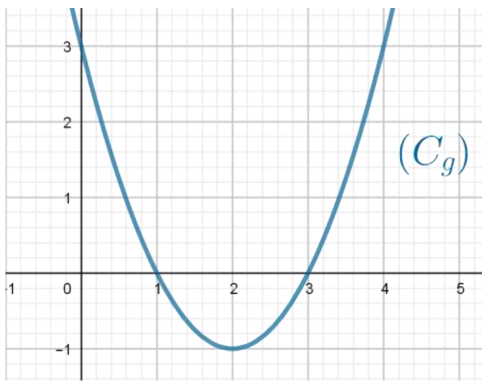
وعليه $1-\dfrac{1}{x_1+1}<1-\dfrac{1}{x_2+1}$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-1[$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	↗	‖	↗

06 الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بتمثيلها البياني الآتي:



بيانياً:

1) $f(1)=f(3)=0$ و $f(4)=f(0)=3$

$f(2)=-1$

2) السوابق الممكنة بالدالة g لـ 0 هي 1 و 3

السوابق الممكنة بالدالة g لـ -1 هي 2

3) جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	↘	-1	↗

4) القيم الحدية للدالة g:

القيمة الحدية للدالة g هي -1 من أجل $x=2$

5) حل المعادلة $g(x)=0$:

حلول المعادلة $g(x)=0$ هي فواصل نقط تقاطع (C_g) مع المستقيم ذو المعادلة $y=0$ (محور الفواصل)

نجد $x=1$ أو $x=3$

إشارة الدالة g :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

6) المقارنة بين $g(2)$ و $g(4)$:

نعلم أن $2<4$ لكن الدالة g متزايدة على المجال $[2;+\infty[$ ومنه $g(2)<g(4)$

المقارنة بين $g(1)$ و $g\left(\dfrac{1}{2}\right)$:

نعلم أن $\dfrac{1}{2}<1$ لكن الدالة g متناقصة على المجال $]-\infty;2]$ إذاً: $g\left(\dfrac{1}{2}\right)>g(1)$

- هل يمكن المقارنة بين $g(4)$ و $g(1)$ ؟

لا، لانهما من مجالين مختلفين والدالة g تغير اتجاه تغيرها.

7) أرسم في نفس المعلم السابق المستقيم (Δ) ذو المعادلة $(\Delta): y=x-1$

أ) حل بيانيا المعادلة $g(x)=x-1$

ب) استنتج حلول المتراجحة $g(x)<x-1$

8) حدد مع التعليل شفعية الدالة g

f الدالة المعرفة بجدول تغيراتها الآتي :

x	-4	-2	1	2	5
$f(x)$	-2 ↘	-3 ↗	0 ↗	4 ↘	1

-1 تعيين مجموعة تعريف الدالة f .

نلاحظ أن $D_f=[-4;5]$

-2 تعيين اتجاه تغير الدالة f :

الدالة f متزايدة على المجال $[-2;2]$

الدالة f متناقصة على المجال $[-4;-2]$ وعلى المجال $[2;5]$

-3 تعيين القيم الحدية للدالة f :

القيمة الحدية العظمى للدالة f هي 4 ، تبلغها الدالة من أجل $x=2$

القيمة الحدية الصغرى للدالة f هي -3 وتبلغها الدالة من أجل $x=-2$

-4 حلول المعادلة $f(x)=0$:

حسب جدول التغيرات ، نجد $x=1$

-5 تحديد إشارة الدالة f على المجال $[-4;5]$:

$f(x)\leq 0$ إذا كان $x\in[-4;1]$

$f(x)>0$ إذا كان $x\in]1;5]$

-6 المقارنة بين العددين $f(0)$ و $f(1)$ وبين العددين $f(3)$ و $f(4)$:

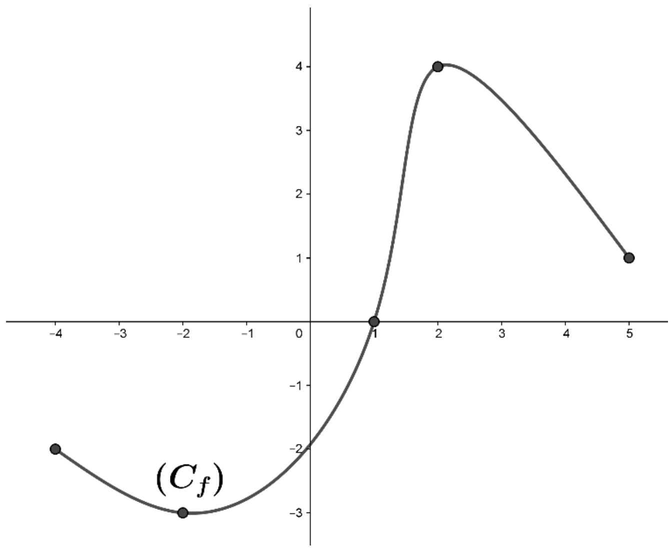
- بين العددين $f(0)$ و $f(1)$:

لدينا $0<1$ وبما أن الدالة f متزايدة على المجال $[-2;2]$ فإن $f(0)<f(1)$

-7 - وبين العددين $f(3)$ و $f(4)$:

لدينا $3<4$ وبما أن الدالة f متناقصة على المجال $[2;5]$ فإن $f(3)>f(4)$

-8 رسم (C_f)



-9 تحديد شفعية الدالة f مع التعليل:

الدالة f لا زوجية ولا فردية لأن تمثيلها البياني (C_f) غير متناظر بالنسبة إلى حامل محور التراتيب وغير متناظر بالنسبة إلى المبدأ.

اللهم إنّي أسألك أن تُيّسر لي أموري، وتكتب لي القبول والتوفيق في كل أمر

صدقة جارية علي وعلى والديّ حفظهما الله

الأستاذ حسان طيبي