

الرياضيات في الثانوية

تمارين متنوعة حول المقارنة و الحصر

مرفقة بحلول مفصلة

للسنة أولى ثانوي

كتابة الأستاذ :

حناش نبيل

Novembre 2021

## تمارين متنوعة في المقارنة والمجالات

التمرين رقم 01 :

- (1) بفرض  $a$  عدد حقيقي كفي ، قارن العددين الحقيقيين  $a^2 - 8a$  و  $-16$  .
- (2) استنتج دون استعمال الحاسبة ، مقارنة العددين الحقيقيين  $2 - 8\sqrt{2}$  و  $-16$  .

التمرين رقم 02 :

رتب تصاعديا الأعداد  $a$  و  $a^2$  و  $a^3$  في الحالتين :

$$a = \sqrt{2} - 1 \quad \bullet$$
$$a = \frac{3 + \sqrt{3}}{3} \quad \bullet$$

التمرين رقم 03 :

(1)  $x$  عدد حقيقي حيث :  $x \in ]0;1[$  ، قارن العددين  $(1-x)$  و  $(1-x)^3$  .

(2)  $x$  عدد حقيقي حيث :  $\frac{3}{2} < x < 2$  ، رتب تصاعديا الأعداد في كل حالة :

$$(2x-3)^3 \quad , \quad (2x-3)^2 \quad , \quad 2x-3 \quad \bullet$$
$$(4x+1)^3 \quad , \quad (4x+1)^2 \quad , \quad 4x+1 \quad \bullet$$

بفرض  $x < 0$  و  $y < 0$  ، أنقل ثم أكمل الجدول التالي :

التمرين رقم 04 :

لا يمكن الحكم	خاطئ	صحيح	
			$-2x < 0$
			$-x + y < 0$
			$x + y < 0$

			$-x - y > 0$
			$x - y < 0$

التمرين رقم 05 :

(1) بفرض  $a < b$  ، بين أن :

•  $2a + 1 < 2b + 1$

•  $3 - a > 3 - b$

(2) برهن أن :

•  $x \geq 3$  معناه  $2x + 1 \geq 7$

•  $x \geq 5$  معناه  $-x + 4 \leq -1$

التمرين رقم 06 :

$a$  ،  $b$  و  $c$  أعداد حقيقية موجبة تماما .

• بين أنه إذا كان  $a < b$  فإن :  $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

• بين أنه إذا كان  $a < b$  فإن :  $\frac{c}{b} < \frac{c}{a}$

التمرين رقم 07 :

عين المجالات التالية :

(1)  $[0; 2] \cap ]1; 6]$  (2)  $[-2; 2] \cap ]-2; +\infty[$  (3)  $[-1; 3] \cap ]3; +\infty[$

(4)  $]-\infty; \frac{1}{2}] \cap \left[\frac{1}{2}; +\infty[$

التمرين رقم 08 :

أكتب على شكل مجالات مجموعات الأعداد الحقيقية المعرفة بالمتباينات الآتية :

$$x > \sqrt{3} \quad (4) \quad x \leq -2 \quad (3) \quad -4 \leq x \leq 3 \quad (2) \quad 2 \leq x \leq 6 \quad (1)$$

$$1 \leq x \leq 5 \text{ أو } -4 < x < 1 \quad (6) \quad x \geq -1 \text{ و } x < 2 \quad (5)$$

التمرين رقم 09 :

أكتب على شكل مجالات أو اتحاد مجالات المجموعات الآتية :

$$\mathbb{R}_+^* , \mathbb{R}^* , \mathbb{R}^+ , \mathbb{R}^- , \mathbb{R}$$

التمرين رقم 10 :

(1) عين مركز و طول كل مجال :

$$[-\pi+1; \pi+1] , [-0,5; 0,1] , [-2; 2]$$

(2) عين حدا المجال المغلق الذي مركزه  $-5,3$  و طوله  $0,7$  .

التمرين رقم 11 :

أنقل ثم أكمل الجدول :

مجموعة الأعداد الحقيقية $x$	المجال
	$]-1; 2[$
$2 \leq x \leq 5$	
$x \geq 0$	
	$]-\infty; \frac{1}{2}]$
$-2 \leq x < 3$	
	$[5; +\infty[$
$x \leq -\sqrt{2}$	

التمرين رقم 12 :

أنقل ثم أكمل الجدول التالي :

$I$	$J$	$I \cap J$	$I \cup J$
$[2;5]$	$[1;+\infty[$		
$]-1;3]$	$]-5;5[$		
$]-\infty;\frac{1}{2}[$	$]-\frac{5}{2};\frac{1}{3}]$		
$[1;2]$	$]\frac{1}{2};2[$		

التمرين رقم 13 :

$A = \sqrt{20-6\sqrt{11}} - \sqrt{20+6\sqrt{11}}$  : عدد حقيقي حيث :

(1) قارن بين العددين  $\sqrt{20-6\sqrt{11}}$  و  $\sqrt{20+6\sqrt{11}}$  ( دون استعمال الحاسبة ) ثم استنتج إشارة  $A$  .

(2) أحسب  $A^2$  ثم استنتج قيمة مبسطة للعدد  $A$  .

التمرين رقم 14 :

$x$  عدد حقيقي موجب تماما . نضع :  $A = \frac{x-1}{x}$  و  $B = \frac{x}{x+1}$

(1) أحسب الفرق  $A-B$  .

(2) استنتج إشارة  $A-B$  ، ثم قارن بين العددين  $A$  و  $B$  .

(3) استنتج مقارنة بين العددين  $\sqrt{\frac{2020}{2021}}$  و  $\sqrt{\frac{2021}{2022}}$  .

التمرين رقم 15 :

$x$  و  $y$  عددان حقيقيان موجبان تماما .

(1) بين أن :  $\frac{1}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2xy}$

$$(2) \text{ استنتج أن : } \frac{x+y}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$$

التمرين رقم 16:

$a$  و  $b$  عدنان حقيقيان حيث :  $a \geq 2$  و  $b \geq 2$

نضع :  $x = \sqrt{ab} + 1$  و  $y = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

(1) بين أن :  $x^2 - y^2 = (a-1)(b-1)$

(2) قارن بين العددين  $x^2$  و  $y^2$  ثم استنتج مقارنة بين  $x$  و  $y$ .

(3) استنتج مقارنة بين العددين  $\sqrt{6}$  و  $\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1$ .

التمرين رقم 17:

$\alpha$  و  $\beta$  عدنان حقيقيان موجبان تماما . نعتبر الأعداد الحقيقية  $X$  ،  $Y$  و  $Z$  حيث :

$$Z = \frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta} , \quad Y = \sqrt{\alpha\beta} , \quad X = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

(1) قارن بين  $X^2$  و  $Y^2$  ، ثم استنتج مقارنة بين  $X$  و  $Y$ .

(2) بين أن :  $Y - Z = \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha + \beta} (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2$  ثم استنتج أن :  $Y \geq Z$

(3) استنتج مما سبق مقارنة بين الأعداد  $X$  ،  $Y$  و  $Z$ .

التمرين رقم 18:

$\alpha$  و  $\beta$  عدنان حقيقيان حيث  $\alpha \geq \beta > 0$

أثبت صحة المتباينتين في كل حالة مما يلي :

$$\frac{\sqrt{\alpha+\beta}}{3} + \alpha^2 \geq \frac{\sqrt{2\beta}}{3} + \alpha^2 \quad \bullet$$

$$-\left(\frac{\alpha^2+1}{\beta}\right) \leq -\left(\frac{\beta^2+1}{\beta}\right) \quad \bullet$$

## تمارين متنوعة في المبرهن

التمرين رقم 19:

(1)  $\alpha$  عدد حقيقي حيث:  $-1 < \alpha < 2$

أعط حصرًا لكل من الأعداد التالية:  $2\alpha+1$  ،  $5\alpha-2$  ،  $7-3\alpha$  ،  $\frac{1}{2\alpha-5}$

(2)  $\beta$  عدد حقيقي حيث:  $2 < \beta < 3$

أعط حصرًا للأعداد  $\beta^2$  ،  $\beta^2-3$  ،  $50-\beta^2$  ،  $\frac{2-\beta^2}{5}$  ،  $\sqrt{\beta+1}$  ،  $\frac{1}{\beta^2+2}$  ،  $\frac{2}{3-\beta^2}$

يعطى أيضا عدد  $\lambda$  حيث:  $1 < \lambda < 2$  ، أعط حصرًا للعدد  $\beta-2\lambda$  .

(3) علما أن:  $2,36 < A < 2,37$  و  $3,16 < B < 3,17$  ، أخصر الأعداد  $\frac{1+A}{2}$  و  $\frac{5-2B}{10}$

(4)  $x$  و  $y$  عدنان حقيقيان حيث:  $\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 1 \leq y \leq 2 \end{cases}$

أعط حصرًا للأعداد التالية:  $x+y$  ،  $5x+y$  ،  $7x+3y$  ،  $-x-y$  ،  $x-y$  ،  $y-x$

$3x^2+y$  ،  $x^2+y^2$  ،  $3x-2y$

(5)  $x$  و  $y$  عدنان حقيقيان حيث:  $\begin{cases} 1 \leq x \leq 5 \\ 1 \leq y \leq 4 \end{cases}$

أعط حصرًا للأعداد التالية:  $N = 3x - \sqrt{y}$  ،  $M = \frac{x^2-x}{4}$  ،  $K = \frac{(x-6)^2}{1+\sqrt{x+y}}$

(6) بفرض  $z$  عدد حقيقي يحقق :  $25 < z < 36$

أوجد حصرا للأعداد التالية :  $\frac{1}{z}$  ،  $\frac{1}{z^2}$  ،  $\frac{1}{\sqrt{z}}$

**التمرين رقم 20 :**

مستطيل طولاه  $a$  وعرضه  $b$  حيث  $a \in ]134;135[$  و  $b \in ]25;26[$

أوجد حصرا للمحيط  $P$  و للمساحة  $S$  و للقطر  $D$  لهذا المستطيل .

**التمرين رقم 21 ( رقم 89 ص 48 من الكتاب المدرسي ) :**

الهدف هو حصر  $\sqrt{1+x}$

بفرض  $x$  عدد حقيقي موجب تماما ، نضع :  $A = \sqrt{1+x}$  ،  $B = 1 + \frac{x}{2}$  ،  $C = \frac{x^2}{8} + \sqrt{1+x}$

(1) بين أن كلا من  $A$  و  $B$  و  $C$  أكبر تماما من 1 .

(2) قارن  $A^2$  و  $B^2$  و استنتج أن :  $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$

(3) بين أن :

$$C^2 - B^2 = \frac{x^2}{4} \left( \sqrt{1+x} + \frac{x^2}{16} - 1 \right)$$

(4) قارن  $B^2$  و  $C^2$  و استنتج أن :

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$$

**نطبق :** دون استعمال حاسبة ، أعط حصرا للعدد  $\sqrt{1,0002}$  .

**صفحة : الرياضيات في الثانوية**

## تمارين متنوعة في المقارنة والمجالات

### ملف التمرين رقم 01:

(1) بفرض  $a$  عدد حقيقي كفي ، المقارنة بين العددين الحقيقيين  $a^2 - 8a$  و  $-16$  :

للمقارنة بين العددين  $a^2 - 8a$  و  $-16$  نعلم على إشارة الفرق  $a^2 - 8a - (-16)$  :

$$\text{لدينا } a^2 - 8a - (-16) = a^2 - 8a + 16 = a^2 - 2(4)(a) + (4)^2$$

$$a^2 - 8a \leq -16 \quad \text{منه نستنتج أن } a^2 - 8a - (-16) = (a - 4)^2 \geq 0$$

(2) استنتاج دون استعمال الحاسبة ، مقارنة العددين الحقيقيين  $2 - 8\sqrt{2}$  و  $-16$  :

نستعمل نتيجة السؤال السابق من أجل  $a = \sqrt{2}$  فنجد :  $(\sqrt{2})^2 - 8\sqrt{2} \leq -16$  معناه  $2 - 8\sqrt{2} \leq -16$ .

### ملف التمرين رقم 02:

ترتيب تصاعديا الأعداد  $a$  و  $a^2$  و  $a^3$  في الحالتين :

✓ بما أن :  $a = \sqrt{2} - 1 \approx 0,41$  فإن قوى العدد  $a$  ترتب ترتيبا تنازليا و منه  $a^3 < a^2 < a$

✓ بما أن :  $a = \frac{3 + \sqrt{3}}{3} \approx 1,57$  فإن قوى العدد  $a$  ترتب ترتيبا تصاعديا و منه  $a < a^2 < a^3$

### التمرين رقم 03:

(1)  $x$  عدد حقيقي حيث :  $x \in ]0;1[$  ، المقارنة بين العددين  $(1-x)$  و  $(1-x)^3$  :

لدينا  $x \in ]0;1[$  معناه  $0 < x < 1$  و منه  $-1 < -x < 0$  و منه  $0 < 1-x < 1$  ، إذن قوى العدد  $1-x$

ترتب ترتيبا تنازليا و منه :  $(1-x)^3 < 1-x$

(2)  $x$  عدد حقيقي حيث :  $\frac{3}{2} < x < 2$  ، ترتيب تصاعديا الأعداد في كل حالة :

$$(2x-3)^3 , (2x-3)^2 , 2x-3 \bullet$$

لدينا  $\frac{3}{2} < x < 2$  و منه  $3 < 2x < 4$  و منه  $0 < 2x-3 < 1$  و بالتالي قوى العدد  $2x-3$  ترتب ترتيبا

$$(2x-3)^3 < (2x-3)^2 < 2x-3 : \text{تنازليا و منه :}$$

$$(4x+1)^3 , (4x+1)^2 , 4x+1 \bullet$$

لدينا  $\frac{3}{2} < x < 2$  و منه  $6 < 4x < 8$  و منه  $7 < 4x+1 < 9$  و بالتالي قوى العدد  $4x+1$  ترتب ترتيبا

$$4x+1 < (4x+1)^2 < (4x+1)^3 : \text{تصاعديا و منه :}$$

بفرض  $x < 0$  و  $y < 0$  ، إكمال الجدول التالي :

مله القريه رقم 04 :

لا يمكن الحكم	خاطئ	صحيح	
	×		$-2x < 0$
×			$-x + y < 0$
		×	$x + y < 0$
		×	$-x - y > 0$
×			$x - y < 0$

(1) بما أن  $x < 0$  ( سالب تماما ) فإن معاكسه  $-x$  موجب تماما أي  $-x > 0$

(2) بما أن  $-x > 0$  ( عدد موجب تماما ) و  $y < 0$  ( عدد سالب تماما ) فإنه لا يمكن الحكم على مجموعهما

(3) مجموع عددين سالبين تماما هو عدد سالب تماما .

(4) بما أن  $x < 0$  ( سالب تماما ) فإن معاكسه  $-x$  موجب تماما أي  $-x > 0$  و كذلك  $-y > 0$  موجب تماما

و بكتابة  $-x - y = -x + (-y) > 0$  لأن مجموع عددين موجبين تماما هو عدد موجب تماما .

(5)  $x < 0$  ( عدد سالب تماما ) و  $-y > 0$  ( عدد موجب تماما ) حيث  $x - y = x + (-y)$  مجموع عدد

سالب تماما و عدد موجب تماما ( لا يمكن الحكم على إشارة الناتج ) .

مله القريه رقم 05 :

(1) بفرض  $a < b$  ، نبين أن :

•  $2a+1 < 2b+1$

بما أن  $a < b$  و بضرب طرفي المتباينة في العدد الموجب تماما 2 ينتج :  $2a < 2b$  و إضافة نفس العدد 1 لطرفي المتباينة نجد :  $2a+1 < 2b+1$  و هو المطلوب .

•  $3-a > 3-b$

بما أن  $a < b$  و بضرب طرفي المتباينة في العدد السالب تماما -1 ينتج :  $-a > -b$  و إضافة نفس العدد 3 لطرفي المتباينة نجد :  $3-a > 3-b$  و هو المطلوب .

(2) إثبات أن :

•  $x \geq 3$  معناه  $2x+1 \geq 7$

بما أن  $x \geq 3$  فإنه بضرب الطرفين في العدد الموجب تماما 2 ينتج :  $2x \geq 6$  و بإضافة نفس العدد 1 للطرفين نجد :  $2x+1 \geq 7$  و هو المطلوب .

•  $x \geq 5$  معناه  $-x+4 \leq -1$

بما أن  $x \geq 5$  فإنه بضرب الطرفين في العدد السالب تماما -1 ينتج :  $-x \leq -5$  و بإضافة نفس العدد 4 للطرفين نجد :  $-x+4 \leq -1$  و هو المطلوب .

ملحوظة رقم 06:

$a$  ،  $b$  و  $c$  أعداد حقيقية موجبة تماما .

• إثبات أنه إذا كان  $a < b$  فإن :  $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

لدينا  $a < b$  حيث  $c > 0$  و منه  $\frac{1}{c} > 0$  ، إذن بضرب طرفي المتباينة  $a < b$  في نفس العدد الموجب

تماما  $\frac{1}{c}$  نجد :  $\frac{1}{c} \times a < \frac{1}{c} \times b$  أي  $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$  و هو المطلوب .

• إثبات أنه إذا كان  $a < b$  فإن :  $\frac{c}{b} < \frac{c}{a}$

لدينا  $0 < a < b$  و منه  $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$  ، و بضرب طرفي المتباينة  $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$  في نفس العدد الموجب تماما  $c$  نجد

:  $\frac{c}{b} < \frac{c}{a}$  و هو المطلوب .

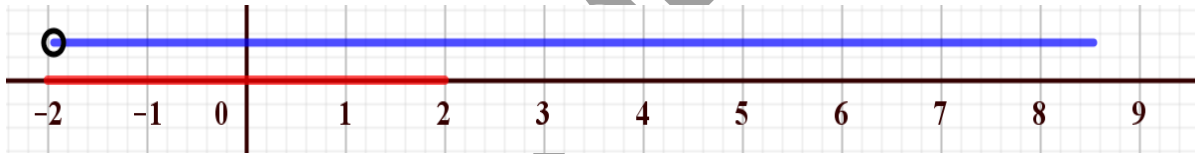
ملحوظة رقم 07:

تعيين المجالات التالية :

(1)  $[0;2] \cap ]1;6[ = ]1;2[$  باستعمال مستقيم عددي مدرج نجد



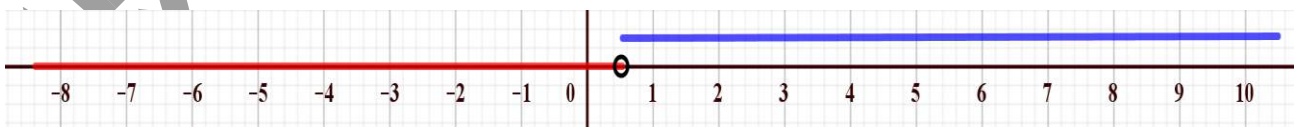
(2)  $[-2;2] \cap ]-2;+\infty[ = ]-2;2[$  باستعمال مستقيم عددي مدرج نجد



(3)  $[-1;3] \cap ]3;+\infty[ = \emptyset$  باستعمال مستقيم عددي مدرج نجد



(4)  $]-\infty; \frac{1}{2}[ \cap \left[ \frac{1}{2}; +\infty[ = \emptyset$  باستعمال مستقيم عددي مدرج نجد

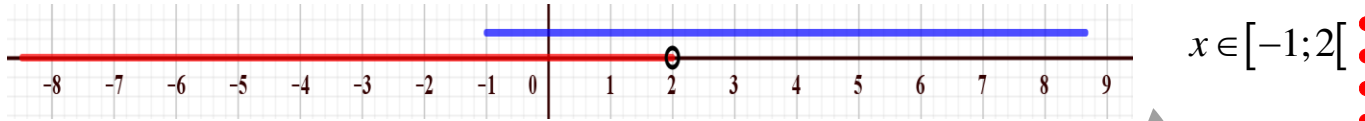


ملحوظة رقم 08:

كتابة على شكل مجالات مجموعات الأعداد الحقيقية المعرفة بالمتباينات الآتية :

$$x \in ]-\infty; -2] : x \leq -2 \quad (3) \quad x \in [-4; 3] : -4 \leq x \leq 3 \quad (2) \quad x \in [2; 6] : 2 \leq x \leq 6 \quad (1)$$

$$x \in ]-\infty; 2[ \cap [-1; +\infty[ : x \geq -1 \text{ و } x < 2 \quad (5) \quad x \in ]\sqrt{3}; +\infty[ : x > \sqrt{3} \quad (4)$$



$$x \in [-4; -1[ \cup [1; 5] : 1 \leq x \leq 5 \text{ أو } -4 < x < 1 \quad (6)$$

ملحوظة رقم 09:

كتابة على شكل مجالات أو اتحاد مجالات المجموعات الآتية :

$$\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[ , \quad \mathbb{R}^- = ]-\infty; 0] , \quad \mathbb{R} = ]-\infty; +\infty[$$

$$\mathbb{R}_+^* = ]0; +\infty[ , \quad \mathbb{R}^* = ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$$

ملحوظة رقم 10:

(1) تعيين مركز و طول كل مجال :

$$l = 2 - (-2) = 2 + 2 = 4 \text{ و طوله هو } c = \frac{-2+2}{2} = 0 \text{ هو } [-2; 2]$$

$$l = 0,1 - (-0,5) = 0,6 \text{ و طوله هو } c = \frac{-0,5+0,1}{2} = -0,2 \text{ هو } [-0,5; 0,1]$$

$$l = \pi + 1 - (-\pi + 1) = 2\pi \text{ و طوله هو } c = \frac{-\pi + 1 + \pi + 1}{2} = 1 \text{ هو } [-\pi + 1; \pi + 1]$$

(2) تعيين حدا المجال المغلق الذي مركزه  $-5,3$  و طوله  $0,7$  :

نضع  $I = [a; b]$  حيث  $a < b$  و باستعمال الشروط نعين العددين الحقيقيين  $a$  و  $b$  :

$$b - a = 0,7 \quad \text{طول المجال } I \text{ هو } 0,7 \text{ معناه :}$$

$$a + b = -10,6 \quad \text{أي } \frac{a+b}{2} = -5,3 \quad \text{معناه :}$$

إذن نتحصل على جملة معادلتين بمجهولين  $a$  و  $b$  هي :  $\begin{cases} b-a=0,7 \\ a+b=-10,6 \end{cases}$  و بالجمع طرفا طرفا نتحصل

على :  $b-a+a+b=0,7-10,6$  أي  $2b=-9,9$  و منه  $b=-4,95$

و بتعويض قيمة  $b$  في المعادلة  $a+b=-10,6$  نجد  $a+b=-10,6+4,95$  أي  $a=-5,65$

إذن :  $I = [-5,65 ; -4,95]$  مركزه و طوله يحققان المعطيات .

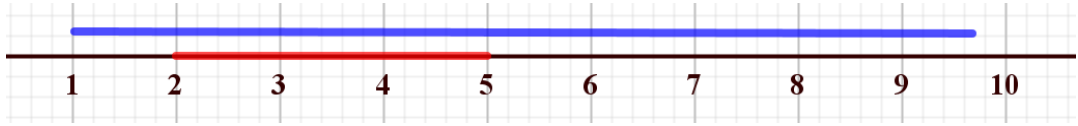
مله القيرنو رقم 11:

مجموعة الأعداد الحقيقية $x$	المجال
$-1 < x < 2$	$] -1 ; 2 [$
$2 \leq x \leq 5$	$[ 2 ; 5 ]$
$x \geq 0$	$[ 0 ; +\infty [$
$x \leq \frac{1}{2}$	$] -\infty ; \frac{1}{2} ]$
$-2 \leq x < 3$	$[ -2 ; 3 [$
$x \geq 5$	$[ 5 ; +\infty [$
$x \leq -\sqrt{2}$	$] -\infty ; -\sqrt{2} ]$

مله القيرنو رقم 12:

$I$	$J$	$I \cap J$	$I \cup J$
$[ 2 ; 5 ]$	$[ 1 ; +\infty [$	$[ 2 ; 5 ]$	$[ 1 ; +\infty [$
$] -1 ; 3 ]$	$] -5 ; 5 [$	$] -1 ; 3 ]$	$] -5 ; 5 ]$
$] -\infty ; \frac{1}{2} [$	$] -\frac{5}{2} ; \frac{1}{3} ]$	$] -\frac{5}{2} ; \frac{1}{3} ]$	$] -\infty ; \frac{1}{2} [$
$[ 1 ; 2 ]$	$] \frac{1}{2} ; 2 [$	$[ 1 ; 2 [$	$] \frac{1}{2} ; 2 ]$

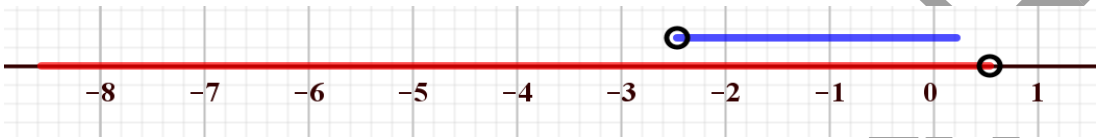
لتعيين تقاطع أو اتحاد مجالين يمكن الإعتماد على مستقيم عددي مدرج :



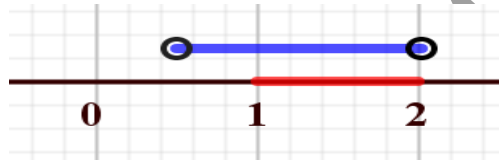
(1)



(2)



(3)



(4)

ملحوظة رقم 13:

$A = \sqrt{20-6\sqrt{11}} - \sqrt{20+6\sqrt{11}}$  عدد حقيقي حيث :

(1) المقارنة بين العددين  $\sqrt{20+6\sqrt{11}}$  و  $\sqrt{20-6\sqrt{11}}$  ( دون استعمال الحاسبة ) :

لدينا :  $0 < 20-6\sqrt{11} < 20+6\sqrt{11}$  و منه حسب قواعد المقارنة و بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

نحافظ على الترتيب فنجد :  $\sqrt{20-6\sqrt{11}} < \sqrt{20+6\sqrt{11}}$

بما أن  $\sqrt{20-6\sqrt{11}} < \sqrt{20+6\sqrt{11}} \in \mathbb{R}_+$  فإن  $\sqrt{20-6\sqrt{11}} < \sqrt{20+6\sqrt{11}}$  و منه نستنتج أن إشارة

$A$  سالبة تماما معناه  $A \in \mathbb{R}_-$  (  $A < 0$  ) .

(2) حساب  $A^2$  ثم استنتاج قيمة مبسطة للعدد  $A$  :

$$A^2 = \left( \sqrt{20-6\sqrt{11}} - \sqrt{20+6\sqrt{11}} \right)^2 = 20 - 6\sqrt{11} - 2\sqrt{20-6\sqrt{11}} \times \sqrt{20+6\sqrt{11}} + 20 + 6\sqrt{11}$$

و منه  $A^2 = 40 - 2\sqrt{(20-6\sqrt{11})(20+6\sqrt{11})}$  أي  $A^2 = 40 - 2\sqrt{(20)^2 - (6\sqrt{11})^2}$  أي

.  $A = -6$  فإن  $A < 0$  ، إذن بما أن  $A^2 = 36$  و  $A^2 = 40 - 2\sqrt{4}$

حل المسألة رقم 14:

(1) حساب الفرق  $A - B$  :

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  غير معدوم لدينا :  $A - B = \frac{x-1}{x} - \frac{x}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1) - x^2}{x(x+1)}$  أي

$$A - B = -\frac{1}{x(x+1)} \text{ و } A - B = \frac{x^2 - 1 - x^2}{x(x+1)}$$

(2) استنتاج إشارة  $A - B$  ، ثم مقارنة العددين  $A$  و  $B$  :

من السؤال السابق لدينا :

$A - B = -\frac{1}{x(x+1)}$  حيث من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما  $x$  فإن  $x(x+1) > 0$  و بما أن  $-1 < 0$

فإن  $-\frac{1}{x(x+1)} < 0$  أي  $A - B < 0$  معناه  $A - B \in \mathbb{R}_-^*$  (  $A - B$  عدد سالب تماما ) .

الاستنتاج : من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما  $x$  فإن  $A < B$  .

(3) استنتاج مقارنة بين العددين  $\sqrt{\frac{2020}{2021}}$  و  $\sqrt{\frac{2021}{2022}}$  :

تطبيق مباشر لنتيجة السؤال السابق من أجل  $x = 2021$  :  $A = \frac{2021-1}{2021} = \frac{2020}{2021}$  و

$B = \frac{2021}{2021+1} = \frac{2021}{2022}$  ، إذن  $A < B$  معناه  $\frac{2020}{2021} < \frac{2021}{2022}$  و حسب قواعد المقارنة و بأخذ الجذر

التربيعي للطرفين ( كلاهما عدد حقيقي موجب ) نحافظ على الترتيب فنجد :  $\sqrt{\frac{2020}{2021}} < \sqrt{\frac{2021}{2022}}$

حل المسألة رقم 15:

$$(1) \text{ إثبات أن : } \frac{1}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2xy}$$

من أجل كل  $x > 0$  و  $y > 0$  لدينا :  $(x - y)^2 \geq 0$  معناه  $x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$  وبإضافة العدد  $2xy$  للطرفين نتحصل على  $x^2 + y^2 \geq 2xy$  حيث  $2xy > 0$  و  $x^2 + y^2 > 0$  ( لأن  $x > 0$  و  $y > 0$  ) معناه أن العددين  $x^2 + y^2$  و  $2xy$  من نفس الإشارة ، إذن حسب قواعد المقارنة و بتطبيق المبرهنة (8) نتحصل على :

$$\frac{1}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2xy}$$

$$(2) \text{ استنتاج أن : } \frac{x+y}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$$

لدينا  $\frac{1}{y^2 + x^2} \leq \frac{1}{2xy}$  و بضرب الطرفين في نفس العدد الحقيقي الموجب تماما  $x + y$  نجد :

$$\frac{x+y}{y^2 + x^2} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{x}{xy} + \frac{y}{xy} \right) \text{ أي } \frac{x+y}{y^2 + x^2} \leq \frac{x}{2xy} + \frac{y}{2xy} \text{ أي } \frac{x+y}{y^2 + x^2} \leq \frac{x+y}{2xy} \text{ و منه}$$

$$\text{و هو المطلوب . } \frac{x+y}{y^2 + x^2} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$$

ملح التمرين رقم 16 :

$$(1) \text{ إثبات أن : } x^2 - y^2 = (a-1)(b-1)$$

$$\text{بالحساب لدينا : } x^2 - y^2 = (\sqrt{ab} + 1)^2 - (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = ab + 2\sqrt{ab} + 1 - (a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b)$$

$$x^2 - y^2 = ab - a - b + 1 \text{ أي } x^2 - y^2 = a(b-1) - (b-1) \text{ و منه بأخذ } (b-1) \text{ كعامل مشترك ينتج}$$

$$\text{و هو المطلوب . } x^2 - y^2 = (b-1)(a-1)$$

(2) مقارنة العددين  $x^2$  و  $y^2$  ثم استنتاج مقارنة بين  $x$  و  $y$  :

نعلم أن :  $a \geq 2$  و  $b \geq 2$  و منه  $a-1 \geq 1$  و  $b-1 \geq 1$  ، و منه ينتج :  $(a-1)(b-1) \geq 1$  معناه

$$\boxed{x^2 > y^2} \text{ معناه } x^2 - y^2 \in \mathbb{R}_+^* \text{ و منه } x^2 - y^2 \geq 1 > 0$$

حيث  $x = \sqrt{ab} + 1 > 0$  و  $y = \sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$  ، إذن  $x^2 > y^2$  يكافئ :  $\boxed{x > y}$

(3) استنتاج مقارنة بين العددين  $\sqrt{6}$  و  $\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1$  :

$x > y$  معناه  $\sqrt{ab} + 1 > \sqrt{a} + \sqrt{b}$  وبصفة خاصة من أجل  $\boxed{a=3}$  و  $\boxed{b=2}$  نجد :

$$\boxed{\sqrt{6} > \sqrt{3} + \sqrt{2} - 1} \text{ : منه نستنتج أن } \sqrt{6} + 1 > \sqrt{3} + \sqrt{2} \text{ أي } \sqrt{3 \times 2} + 1 > \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

ملحوظة رقم 17 :

(1) مقارنة  $X^2$  و  $Y^2$  ، ثم استنتاج مقارنة بين  $X$  و  $Y$  :

ندرس إشارة الفرق  $X^2 - Y^2$  :

$$\text{لدينا : } X^2 - Y^2 = \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 - \sqrt{\alpha\beta}^2 = \frac{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 4\alpha\beta}{4} = \frac{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2}{4}$$

$$\boxed{X^2 \geq Y^2} \text{ : معناه } X^2 - Y^2 \in \mathbb{R}^+ \text{ و منه } X^2 - Y^2 = \frac{(\alpha - \beta)^2}{4} = \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2 \geq 0$$

بما أن  $X$  و  $Y$  عدنان حقيقيان موجبان فإن  $X^2 \geq Y^2$  يكافئ :  $\boxed{X \geq Y}$

(2) إثبات أن :  $Y - Z = \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha + \beta} (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2$  ثم استنتاج أن :  $Y \geq Z$

$$Y - Z = \sqrt{\alpha\beta} - \frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta} = \sqrt{\alpha\beta} - \frac{2\sqrt{\alpha\beta}\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha + \beta} = \sqrt{\alpha\beta} \left(1 - \frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha + \beta}\right) = \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha + \beta} (\alpha + \beta - 2\sqrt{\alpha\beta})$$

$$\boxed{Y - Z = \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha + \beta} (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2} \text{ معناه } Y - Z = \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha + \beta} (\sqrt{\alpha}^2 + \sqrt{\beta}^2 - 2\sqrt{\alpha} \times \sqrt{\beta}) \text{ أي}$$

الاستنتاج : بما أن  $\alpha$  و  $\beta$  عدنان موجبان تماما فإن العددين  $\alpha + \beta$  و  $\sqrt{\alpha\beta}$  موجبان تماما و

عدد موجب و منه فالعدد  $Y-Z$  موجب ( من أجل  $Y-Z=0$  ) و منه نستنتج أن  $\boxed{Y \geq Z}$ .

(3) استنتاج مقارنة بين الأعداد  $X$  ،  $Y$  و  $Z$  :

من الأسئلة السابقة نتحصل على :  $\boxed{X \geq Y \geq Z}$

ملح القريز رقم 18 :

إثبات صحة المتباينتين في كل حالة مما يلي :

$$\bullet \quad \frac{\sqrt{\alpha+\beta}}{3} + \alpha^2 \geq \frac{\sqrt{2\beta}}{3} + \alpha^2$$

لدينا :  $\alpha \geq \beta$  و منه بإضافة نفس العدد الحقيقي  $\beta$  للطرفين نجد  $\alpha + \beta \geq 2\beta$  ( مبرهنة 2 ) و منه بإدخال الجذر التربيعي على الطرفين ( مبرهنة 7 ) حيث  $\alpha + \beta$  و  $2\beta$  عدان حقيقيان موجبان تماما ينتج

$$\bullet \quad \sqrt{\alpha+\beta} \geq \sqrt{2\beta} \quad \text{ثم بضرب طرفي المتباينة في العدد الموجب تماما } \frac{1}{3} \quad \text{( مبرهنة 4 )}$$

$$\bullet \quad \text{ينتج : } \frac{\sqrt{\alpha+\beta}}{3} \geq \frac{\sqrt{2\beta}}{3} \quad \text{و بإضافة نفس العدد الحقيقي } \alpha^2 \quad \text{( مبرهنة 2 ) للطرفين ينتج :}$$

$$\bullet \quad \text{و هو المطلوب . } \quad \boxed{\frac{\sqrt{\alpha+\beta}}{3} + \alpha^2 \geq \frac{\sqrt{2\beta}}{3} + \alpha^2}$$

$$\bullet \quad -\left(\frac{\alpha^2+1}{\beta}\right) \leq -\left(\frac{\beta^2+1}{\beta}\right)$$

بما أن  $\alpha > 0$  و  $\beta > 0$  فإن  $\alpha \geq \beta$  يكافئ  $\alpha^2 \geq \beta^2$  و بإضافة نفس العدد الحقيقي 1 ( مبرهنة 2 )

لطرفين ينتج :  $\alpha^2 + 1 \geq \beta^2 + 1$  ثم بضرب الطرفين في نفس العدد الحقيقي الموجب تماما  $\frac{1}{\beta}$  ينتج :

$$\bullet \quad \text{( مبرهنة 4 ) } \frac{\alpha^2+1}{\beta} \geq \frac{\beta^2+1}{\beta} \quad \text{و بضرب المتباينة في نفس العدد الحقيقي السالب تماما } -1 \quad \text{ينتج :}$$

$$\bullet \quad \text{( مبرهنة 4 ) } \quad \boxed{-\left(\frac{\alpha^2+1}{\beta}\right) \leq -\left(\frac{\beta^2+1}{\beta}\right)} \quad \text{و هو المطلوب .}$$

## تمارين متنوعة في الحصر

ملحوظة القارئ رقم 19:

(1)  $\alpha$  عدد حقيقي حيث :  $-1 < \alpha < 2$

إعطاء حصر للأعداد التالية :  $2\alpha + 1$  ،  $5\alpha - 2$  ،  $7 - 3\alpha$  ،  $\frac{1}{2\alpha - 5}$

لدينا :  $-1 < \alpha < 2$  و منه  $-1 \times 2 < 2\alpha < 2 \times 2$  أي  $-2 < 2\alpha < 4$  و منه  $-2 + 1 < 2\alpha + 1 < 4 + 1$

إذن  $-1 < 2\alpha + 1 < 5$  هو حصر للعدد  $2\alpha + 1$  .

لدينا :  $-1 < \alpha < 2$  و منه  $-1 \times 5 < 5\alpha < 2 \times 5$  أي  $-5 < 5\alpha < 10$  و منه

$-5 - 2 < 5\alpha - 2 < 10 - 2$  ، إذن  $-7 < 5\alpha - 2 < 8$  هو حصر للعدد  $5\alpha - 2$  .

لدينا :  $-1 < \alpha < 2$  و منه  $(-1) \times (-3) > -3\alpha > 2(-3)$  أي  $3 > -3\alpha > -6$  و منه

$7 + 3 > 7 - 3\alpha > 7 - 6$  أي  $10 > 7 - 3\alpha > 1$  ، إذن  $1 < 7 - 3\alpha < 10$  هو حصر للعدد  $7 - 3\alpha$  .

لدينا :  $-1 < \alpha < 2$  و منه  $2 \times (-1) < 2\alpha < 2 \times 2$  أي  $-2 < 2\alpha < 4$  و منه

$-2 - 5 < 2\alpha - 5 < 4 - 5$  ، إذن  $-7 < 2\alpha - 5 < -1$  و بما أن الأعداد  $-7$  ،  $2\alpha - 5$  ،  $-1$  من نفس

الإشارة ( سالبة تماما ) فإن  $-1 < \frac{1}{2\alpha - 5} < -\frac{1}{7}$  هو حصر للعدد  $\frac{1}{2\alpha - 5}$  .

(2)  $\beta$  عدد حقيقي حيث :  $2 < \beta < 3$

إعطاء حصر للأعداد  $\beta^2$  ،  $\beta^2 - 3$  ،  $50 - \beta^2$  ،  $\frac{2 - \beta^2}{5}$  ،  $\sqrt{\beta + 1}$  ،  $\frac{1}{\beta^2 + 2}$  ،  $\frac{2}{3 - \beta^2}$  :

لدينا :  $2 < \beta < 3$  حيث  $2$  ،  $\beta$  ،  $3$  أعداد حقيقية موجبة و منه  $4 < \beta^2 < 9$  هو حصر للعدد  $\beta^2$  .

بما أن  $4 < \beta^2 < 9$  فإن  $4 - 3 < \beta^2 - 3 < 9 - 3$  ، إذن  $1 < \beta^2 - 3 < 6$  هو حصر للعدد  $\beta^2 - 3$  .

بما أن  $4 < \beta^2 < 9$  فإن  $-4 > -\beta^2 > -9$  و منه  $50 - 4 > 50 - \beta^2 > 50 - 9$  أي  $46 > 50 - \beta^2 > 41$

إذن  $41 < 50 - \beta^2 < 46$  هو حصر للعدد  $50 - \beta^2$ .

بما أن  $-4 > -\beta^2 > -9$  فإن  $2 - 4 > 2 - \beta^2 > 2 - 9$  أي  $2 - 4 > 2 - \beta^2 > 2 - 9$  معناه

$-7 < 2 - \beta^2 < -2$  و بضرب الأطراف في العدد الموجب تماما  $\frac{1}{5}$  نجد  $-\frac{7}{5} < \frac{2 - \beta^2}{5} < -\frac{2}{5}$  و هو حصر

للعدد  $\frac{2 - \beta^2}{5}$ .

لدينا :  $2 < \beta < 3$  و منه  $2 + 1 < \beta + 1 < 3 + 1$  أي  $3 < \beta + 1 < 4$  حيث  $3$  ،  $\beta + 1$  ،  $4$  أعداد حقيقية

موجبة و منه  $\sqrt{3} < \sqrt{\beta + 1} < 2$  هو حصر للعدد  $\sqrt{\beta + 1}$ .

بما أن  $4 < \beta^2 < 9$  فإن  $4 + 2 < \beta^2 + 2 < 9 + 2$  أي  $6 < \beta^2 + 2 < 11$  و بما أن الأعداد  $6$  ،  $\beta^2 + 2$  ،

$11$  من نفس الإشارة ( موجبة تماما ) فإن :  $\frac{1}{11} < \frac{1}{\beta^2 + 2} < \frac{1}{6}$  هو حصر للعدد  $\frac{1}{\beta^2 + 2}$ .

بما أن  $-4 > -\beta^2 > -9$  فإن  $3 - 4 > 3 - \beta^2 > 3 - 9$  أي  $-1 > 3 - \beta^2 > -6$  معناه  $-6 < 3 - \beta^2 < -1$

حيث  $-6$  ،  $3 - \beta^2$  ،  $-1$  أعداد حقيقية سالبة تماما و منه  $-1 < \frac{1}{3 - \beta^2} < -\frac{1}{6}$  هو حصر للعدد  $\frac{1}{3 - \beta^2}$ .

يعطى أيضا عدد  $\lambda$  حيث :  $1 < \lambda < 2$  ، إعطاء حصر للعدد  $\beta - 2\lambda$  :

لدينا :  $1 < \lambda < 2$  و منه  $1(-2) > -2\lambda > 2(-2)$  أي  $-2 > -2\lambda > -4$  معناه  $-4 < -2\lambda < -2$

و بما أن  $2 < \beta < 3$  و حيث  $\beta - 2\lambda = \beta + (-2\lambda)$  ، إذن بالجمع طرفا لطرفا نتحصل على :

$2 + (-4) < \beta - 2\lambda < 3 + (-2)$  و منه  $-2 < \beta - 2\lambda < 1$  هو حصر للعدد  $\beta - 2\lambda$ .

(3) علما أن :  $2,36 < A < 2,37$  و  $3,16 < B < 3,17$  ، إعطاء حصر للعدد  $\frac{1+A}{2}$  و  $\frac{5-2B}{10}$  :

لدينا :  $2,36 < A < 2,37$  و منه  $1 + 2,36 < 1 + A < 1 + 2,37$  أي  $3,36 < 1 + A < 3,37$  و منه

إذن  $1,68 < \frac{1+A}{2} < 1,685$  هو حصر للعدد  $\frac{1+A}{2}$  ،  $\frac{3,36}{2} < \frac{1+A}{2} < \frac{3,37}{2}$ .

لدينا :  $3,16 < B < 3,17$  و منه  $-2 \times 3,16 > -2B > -2 \times 3,17$  أي  $-6,32 > -2B > -6,34$  و منه

$$-\frac{1,32}{10} > \frac{5-2B}{10} > -\frac{1,34}{10} \text{ و منه } -1,32 > 5-2B > -1,34 \text{ أي } 5-6,32 > 5-2B > 5-6,34$$

أي  $-0,132 > \frac{5-2B}{10} > -0,134$  ، إذن  $-0,134 < \frac{5-2B}{10} < -0,132$  هو حصر للعدد  $\frac{5-2B}{10}$  .

(4)  $x$  و  $y$  عدنان حقيقيان حيث : 
$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 1 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

إعطاء حصر للأعداد التالية :  $x+y$  ،  $5x+y$  ،  $7x+3y$  ،  $-x-y$  ،  $x-y$  ،  $y-x$

$3x-2y$  ،  $x^2+y^2$  ،  $3x^2+y$  ،  $x+\sqrt{y}$  :

بالجمع طرفا لطرف نتحصل على :  $-1+1 \leq x+y \leq 1+2$  معناه  $0 \leq x+y \leq 3$  هو حصر للعدد  $x+y$

بما أن  $-1 \leq x \leq 1$  فإن  $-5 \leq 5x \leq 5$  و بالجمع طرفا لطرف مع  $1 \leq y \leq 2$  نجد

$-5+1 \leq 5x+y \leq 5+2$  ، إذن  $-4 \leq 5x+y \leq 7$  هو حصر للعدد  $5x+y$  .

بما أن  $-1 \leq x \leq 1$  و  $1 \leq y \leq 2$  فإن  $-7 \leq 7x \leq 7$  و  $3 \leq 3y \leq 6$  و بالجمع طرفا لطرف ينتج :

$-7+3 \leq 7x+3y \leq 7+6$  ، إذن  $-4 \leq 7x+3y \leq 13$  هو حصر للعدد  $7x+3y$  .

بما أن  $-1 \leq x \leq 1$  و  $1 \leq y \leq 2$  فإن  $1 \geq -x \geq -1$  و  $-1 \geq -y \geq -2$  و بالجمع طرفا لطرف ينتج :

$0 \geq -x-y \geq -3$  أي  $-3 \leq -x-y \leq 0$  ، إذن  $-3 \leq -x-y \leq 0$  هو حصر للعدد  $-x-y$  .

بكتابة  $x-y = x+(-y)$  حيث  $-1 \leq x \leq 1$  و  $-2 \leq -y \leq -1$  فإنه بالجمع طرفا لطرف ينتج :

$-1-2 \leq x+(-y) \leq 1-1$  ، إذن  $-3 \leq x-y \leq 0$  هو حصر للعدد  $x-y$  .

بكتابة  $y-x = y+(-x)$  حيث  $1 \leq y \leq 2$  و  $-1 \leq -x \leq 1$  فإنه بالجمع طرفا لطرف ينتج :

$1-1 \leq y+(-x) \leq 2+1$  ، إذن  $0 \leq y-x \leq 3$  هو حصر للعدد  $y-x$  .

بكتابة  $3x-2y = 3x+(-2y)$  حيث  $-1 \leq x \leq 1$  و  $-2 \leq -y \leq -1$  و منه  $-3 \leq 3x \leq 3$  و

و بالجمع طرفا لطرف ينتج :  $-4 \leq -2y \leq -2$  و  $-3-4 \leq 3x+(-2y) \leq 3-2$  ، إذن

هو حصر للعدد  $3x-2y$   $-7 \leq 3x-2y \leq 1$  .

• تعيين حصر للعدد  $x^2 + y^2$  : لدينا  $1 \leq y \leq 2$  حيث  $1, y, 2$  أعداد حقيقية موجبة و منه ينتج :  
( مبرهنة 6 ) .  $1 \leq y^2 \leq 4$

لتعيين حصر للعدد  $x^2$  **نفضل الحالات** : لدينا  $-1 \leq x \leq 1$  معناه  $-1 \leq x \leq 0$  أو  $0 \leq x \leq 1$  ؛

إذا كان  $-1 \leq x \leq 0$  فإن :  $(-1)^2 \leq x^2 \leq (0)^2$  (نعكس الترتيب) أي  $0 \leq x^2 \leq 1$  و إذا كان  $0 \leq x \leq 1$

فإن  $(0)^2 \leq x^2 \leq (1)^2$  (نحافظ على الترتيب) أي  $0 \leq x^2 \leq 1$  - مبرهنة 6 -

إذن نستنتج أنه إذا كان  $-1 \leq x \leq 1$  فإن  $0 \leq x^2 \leq 1$  و منه نجد  $0+1 \leq x^2 + y^2 \leq 1+4$  ، إذن

هو حصر للعدد  $x^2 + y^2$   $1 \leq x^2 + y^2 \leq 5$  .

بما أن  $0 \leq x^2 \leq 1$  فإن  $0 \leq 3x^2 \leq 3$  حيث  $1 \leq y \leq 2$  ، و بالجمع طرفا لطرف نجد :

إذن  $0+1 \leq 3x^2 + y \leq 3+2$  ، إذن هو حصر للعدد  $3x^2 + y$   $1 \leq 3x^2 + y \leq 5$  .

لدينا :  $1 \leq y \leq 2$  (الأعداد موجبة) و منه حسب المبرهنة (7) ينتج  $1 \leq \sqrt{y} \leq \sqrt{2}$  ، و منه بالجمع

طرفا لطرف نجد  $-1+1 \leq x + \sqrt{y} \leq 1 + \sqrt{2}$  ، إذن هو حصر للعدد  $x + \sqrt{y}$   $0 \leq x + \sqrt{y} \leq \sqrt{2} + 1$  .

(5) بفرض  $z$  عدد حقيقي يحقق :  $25 < z < 36$

إيجاد حصر للأعداد التالية :  $\frac{1}{z}$  ،  $\frac{1}{z^2}$  ،  $\frac{1}{\sqrt{z}}$

الأعداد  $25, z, 36$  من نفس الإشارة ( موجبة تماما ) و منه حسب المبرهنة (8) ينتج  $\frac{1}{25} \geq \frac{1}{z} \geq \frac{1}{36}$

إذن هو حصر للعدد  $\frac{1}{z}$   $\frac{1}{36} \leq \frac{1}{z} \leq \frac{1}{25}$  .

لدينا :  $\frac{1}{36} \leq \frac{1}{z} \leq \frac{1}{25}$  حيث  $\frac{1}{25}, \frac{1}{z}, \frac{1}{36}$  أعداد حقيقية موجبة و منه حسب المبرهنة (6) ينتج :

هو حصر للعدد  $\frac{1}{z^2}$  .  $\boxed{\frac{1}{36^2} \leq \frac{1}{z^2} \leq \frac{1}{25^2}}$  ( نحافظ على الترتيب ) ، إذن  $\left(\frac{1}{36}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{z}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{25}\right)^2$

**طريقة 2 :** لدينا  $\frac{1}{36} \leq \frac{1}{z} \leq \frac{1}{25}$  و كذلك  $\frac{1}{36} \leq \frac{1}{z} \leq \frac{1}{25}$  حيث  $\frac{1}{25}$  ،  $\frac{1}{z}$  ،  $\frac{1}{36}$  أعداد حقيقية موجبة

تماما و منه حسب المبرهنة (4) و بالضرب طرفا لطرف نتحصل على  $\frac{1}{36} \times \frac{1}{36} \leq \frac{1}{z} \times \frac{1}{z} \leq \frac{1}{25} \times \frac{1}{25}$

معناه  $\frac{1}{z^2}$  هو حصر للعدد  $\frac{1}{36^2} \leq \frac{1}{z^2} \leq \frac{1}{25^2}$  .

لدينا :  $\frac{1}{36} \leq \frac{1}{z} \leq \frac{1}{25}$  حيث  $\frac{1}{25}$  ،  $\frac{1}{z}$  ،  $\frac{1}{36}$  أعداد حقيقية موجبة تماما ، و منه حسب المبرهنة (8) ينتج

حصر للعدد  $\frac{1}{\sqrt{z}}$  .  $\boxed{\frac{1}{6} \leq \frac{1}{\sqrt{z}} \leq \frac{1}{5}}$  ( نحافظ على الترتيب ) أي  $\sqrt{\frac{1}{36}} \leq \sqrt{\frac{1}{z}} \leq \sqrt{\frac{1}{25}}$

**طريقة 2 :** لدينا  $25 \leq z \leq 36$  حيث  $25$  ،  $z$  ،  $36$  أعداد حقيقية موجبة تماما ، و منه حسب المبرهنة

(8) ينتج  $\sqrt{25} \leq \sqrt{z} \leq \sqrt{36}$  أي  $5 \leq \sqrt{z} \leq 6$  ( نحافظ على الترتيب ) و بما أن الأعداد  $5$  ،  $\sqrt{z}$  ،  $6$  ،

من نفس الإشارة ( موجبة تماما ) فإنه حسب المبرهنة (8) ينتج  $\boxed{\frac{1}{6} \leq \frac{1}{\sqrt{z}} \leq \frac{1}{5}}$  (نعكس الترتيب) .

(6)  $x$  و  $y$  عدنان حقيقيان حيث :  $\begin{cases} 1 \leq x \leq 5 \\ 1 \leq y \leq 4 \end{cases}$

إيجاد حصر للأعداد التالية :  $N = 3x - \sqrt{y}$  ،  $M = \frac{x^2 - x}{4}$  ،  $K = \frac{(x-6)^2}{1 + \sqrt{x+y}}$

لدينا :  $1 \leq x \leq 5$  و منه  $3 \leq 3x \leq 15$  ( لأن  $3 > 0$  ) و بما أن الأعداد  $1$  ،  $y$  ،  $4$  موجبة تماما فإن

$1 \leq y \leq 4$  يكافئ  $1 \leq \sqrt{y} \leq 2$  (مبرهنة 8) و منه  $-1 \geq -\sqrt{y} \geq -2$  معناه  $-2 \leq -\sqrt{y} \leq -1$  ، و

بكتابة  $3x - \sqrt{y} = 3x + (-y)$  و بالجمع طرفا لطرف نتحصل على :  $3 - 2 \leq 3x + (-y) \leq 15 - 1$  ، إذن

$1 \leq 3x - \sqrt{y} \leq 14$  هو حصر للعدد  $3x - \sqrt{y}$  و منه  $\boxed{1 \leq N \leq 14}$  .

بما أن  $1 \leq x \leq 5$  و الأعداد 1 ، x ، 5 موجبة فإنه حسب المبرهنة (6) ينتج  $1 \leq x^2 \leq 25$  ، و من جهة أخرى فإن  $-5 \leq -x \leq -1$  معناه  $-1 \geq -x \geq -5$  و بكتابة  $x^2 - x = x^2 + (-x)$  و بالجمع طرفا لطرف (

مبرهنة 3 ) ينتج  $1-5 \leq x^2 + (-x) \leq 25-1$  أي  $-4 \leq x^2 - x \leq 24$  و منه  $-\frac{4}{4} \leq \frac{x^2 - x}{4} \leq \frac{24}{4}$  ،

إذن  $-1 \leq \frac{x^2 - x}{4} \leq 6$  هو حصر للعدد  $\frac{x^2 - x}{4}$  و منه  $\boxed{-1 \leq M \leq 6}$  .

لدينا :  $1 \leq x \leq 5$  و منه  $1-6 \leq x-6 \leq 5-6$  ( مبرهنة 2 ) أي  $-5 \leq x-6 \leq -1$  حيث أن الأعداد

$-5$  ،  $x-6$  ،  $-1$  سالبة تماما و منه حسب المبرهنة (6) ينتج  $(-5)^2 \leq (x-6)^2 \leq (-1)^2$  ( نعكس

الترتيب ) أي  $1 \leq (x-6)^2 \leq 25$  ..... (\*)

و من جهة أخرى لدينا :  $1 \leq x \leq 5$  و  $1 \leq y \leq 4$  و منه بالجمع طرفا لطرف ( مبرهنة 3 ) ينتج :

$1+1 \leq x+y \leq 4+5$  أي  $2 \leq x+y \leq 9$  و كون الأعداد 2 ،  $x+y$  ، 9 موجبة تماما فإنه حسب

المبرهنة (7) ينتج :  $\sqrt{2} \leq \sqrt{x+y} \leq 3$  ( نحافظ على الترتيب ) و منه حسب المبرهنة (2) و بإضافة

العدد 1 إلى جميع الأطراف ينتج :  $\sqrt{2}+1 \leq 1+\sqrt{x+y} \leq 4$  و كون الأعداد  $\sqrt{2}+1$  ،  $1+\sqrt{x+y}$  ،

4 من نفس الإشارة ( موجبة تماما ) فإنه حسب المبرهنة (8) ينتج :

..... (\*\*\*)  $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{1+\sqrt{x+y}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}+1}$  ، إذن من العلاقتين (\*) و (\*\*\*) و بالضرب طرفا لطرف حسب

المبرهنة (4) ينتج ( لاحظ أنه جميع الأعداد في (\*) و (\*\*\*) موجبة تماما ) :

إذن :  $\frac{1}{4} \leq \frac{(x-6)^2}{1+\sqrt{x+y}} \leq \frac{25}{\sqrt{2}+1}$  أي  $1 \times \frac{1}{4} \leq (x-6)^2 \times \frac{1}{1+\sqrt{x+y}} \leq 25 \times \frac{1}{\sqrt{2}+1}$

$$\boxed{\frac{1}{4} \leq K \leq \frac{25}{\sqrt{2}+1}}$$

ملحوظة القارئ رقم 20 :

$a \in ]134;135[$  و  $b \in ]25;26[$  معناه  $134 < a < 135$  و  $25 < b < 26$  :

محيط المستطيل يعطى بالقانون :  $P = 2(a+b)$

و بما أن  $134 < a < 135$  و  $25 < b < 26$  فإنه بالجمع طرفا طرف ( مبرهنة 3 ) ينتج :

$134 + 25 < a + b < 135 + 26$  أي  $159 < a + b < 161$  و بما أن  $2 > 0$  فإنه ينتج :

$318 < P < 322$  ، إذن نستنتج أن :

مساحة المستطيل تعطى بالقانون :  $S = a \times b$

و بما أن  $134 < a < 135$  و  $25 < b < 26$  حيث أن جميع الأعداد في أطراف المتباينتين هي أعداد موجبة

تماما و منه بالضرب طرفا طرف ( مبرهنة 5 ) ينتج :  $134 \times 25 < a \times b < 135 \times 26$  أي

$3350 < S < 3510$  ، إذن نستنتج أن :

ليكن  $D$  قطرا لهذا المستطيل ، من نظرية فيثاغورس في المثلث القائم ينتج :  $D^2 = a^2 + b^2$  معناه

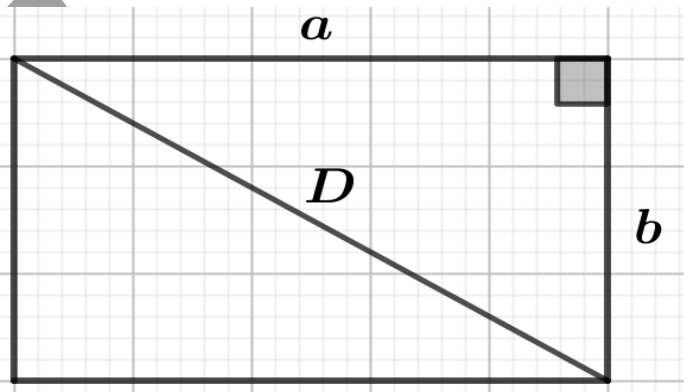
$D = \sqrt{a^2 + b^2}$  ، إذن إيجاد حصر لـ  $D$  معناه إيجاد حصر لـ  $\sqrt{a^2 + b^2}$  :

لدينا :  $134 < a < 135$  و  $25 < b < 26$  ( جميع الأعداد موجبة في المتباينتين ) و منه حسب المبرهنة

(6) ينتج :  $134^2 < a^2 < 135^2$  و  $25^2 < b^2 < 26^2$  أي  $17956 < a^2 < 18225$  و  $625 < b^2 < 676$

و بالجمع طرفا طرف ينتج :  $18581 < a^2 + b^2 < 18901$  ( جميع الأعداد موجبة في المتباينة ) و منه

حسب المبرهنة (7) ينتج :  $136,31 < \sqrt{a^2 + b^2} < 137,48$  ، إذن نستنتج أن :  $136,31 < D < 137,48$



ملح القرين رقم 21 : ( رقم 89 من الكتاب المدرسي )

(1) نبين أن كلا من  $A$  و  $B$  و  $C$  أكبر تماما من 1 :

$x$  عدد حقيقي موجب تماما معناه  $x > 0$  و منه  $1+x > 1$  و منه  $\sqrt{1+x} > \sqrt{1}$  أي  $\sqrt{1+x} > 1$  ، إذن  $A > 1$  .

$x > 0$  و منه  $\frac{1}{2} \times x > \frac{1}{2} \times 0$  أي  $\frac{x}{2} > 0$  و منه  $1 + \frac{x}{2} > 1 + 0$  أي  $1 + \frac{x}{2} > 1$  ، إذن  $B > 1$  .

$\frac{x^2}{8} > 0$  و بما أن  $\sqrt{1+x} > 1$  فإنه بالجمع طرفا لطرف ينتج : معناه  $C > 1$  .  $\frac{x^2}{8} + \sqrt{1+x} > 1$

(2) مقارنة  $A^2$  و  $B^2$  و استنتاج أن :  $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$

لمقارنة  $A^2$  و  $B^2$  ندرس إشارة الفرق :

$$A^2 - B^2 = -\frac{x^2}{4} \text{ أي } A^2 - B^2 = 1+x - \left(1 + \frac{x^2}{4} + 2 \times 1 \times \frac{x}{2}\right) \text{ معناه } A^2 - B^2 = \sqrt{1+x}^2 - \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2$$

و بما أن  $-\frac{x^2}{4} < 0$  ( عدد حقيقي سالب تماما ) فإن  $A^2 - B^2 \in \mathbb{R}^*$  و بالتالي  $A^2 < B^2$  .

$A$  و  $B$  عددان حقيقيان موجبان تماما ، إذن  $A^2 < B^2$  يكافئ  $A < B$  معناه  $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$

(3) إثبات أن :  $C^2 - B^2 = \frac{x^2}{4} \left( \sqrt{1+x} + \frac{x^2}{16} - 1 \right)$

$$\text{لدينا : } C^2 - B^2 = \left( \frac{x^2}{8} + \sqrt{1+x} \right)^2 - \left( 1 + \frac{x}{2} \right)^2 = \frac{x^4}{64} + 1 + x + \frac{x^2 \sqrt{1+x}}{4} - 1 - \frac{x^2}{4} - x$$

$$\cdot C^2 - B^2 = \frac{x^2}{4} \left( \sqrt{1+x} + \frac{x^2}{16} - 1 \right) \text{ و منه } C^2 - B^2 = \frac{x^4}{64} + \frac{x^2 \sqrt{1+x}}{4} - \frac{x^2}{4}$$

(4) مقارنة  $B^2$  و  $C^2$  و استنتاج أن :  $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$

بما أن  $\frac{x^2}{4} > 0$  ( عدد حقيقي موجب تماما ) فإن إشارة الفرق  $C^2 - B^2$  من إشارة  $\sqrt{1+x} + \frac{x^2}{16} - 1$  ، حيث

من السؤال 1- نعلم أن  $\sqrt{1+x} > 1$  و بما أن  $\frac{x^2}{16} > 0$  ( عدد حقيقي موجب تماما ) فإنه بالجمع طرفا لطرف

$$\text{ينتج } \sqrt{1+x} + \frac{x^2}{16} > 1 \text{ و منه } \sqrt{1+x} + \frac{x^2}{16} - 1 > 1 - 1 \text{ أي } \sqrt{1+x} + \frac{x^2}{16} - 1 > 0 \text{ معناه}$$

$$\sqrt{1+x} + \frac{x^2}{16} - 1 \in \mathbb{R}_+^* \text{ ، إذن } C^2 - B^2 \in \mathbb{R}_+^* \text{ و بالتالي } \boxed{C^2 > B^2} .$$

$$\boxed{\frac{x^2}{8} + \sqrt{1+x} > 1 + \frac{x}{2}} \text{ معناه } \boxed{C > B} \text{ يكافئ } C^2 > B^2 \text{ إذن } C > B^2 \text{ معناه}$$

$$\boxed{\sqrt{1+x} > 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}} \text{ و منه نكتب :}$$

$$\boxed{1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}} \text{ : من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ موجب تماما فإن : } \boxed{\text{الإستنتاج :}}$$

**نطبق :** دون استعمال حاسبة ، إعطاء حصر للعدد  $\sqrt{1,0002}$  :

$$\boxed{x = 0,0002} \text{ معناه } \sqrt{1,0002} = \sqrt{1+0,0002} \text{ من الشكل } \sqrt{1+x} \text{ كما يلي :}$$

$$\boxed{1 + \frac{0,0002}{2} - \frac{0,0002^2}{8} \leq \sqrt{1,0002} \leq 1 + \frac{0,0002}{2}} \text{ إذن حسب الإستنتاج أعلاه فإن :}$$

لا ننسونا من صالح دعائكم ...



صفحة : الرياضيات في الثانوية