الرياضيات في الثانوية

تمارين نماذج فروض و إختبارات
في محور الدوال المرجعية (الجزء 2)
(الدالة جيب + الدالة جيب تمام)

06 تمارين مرفقة بحل مفصل

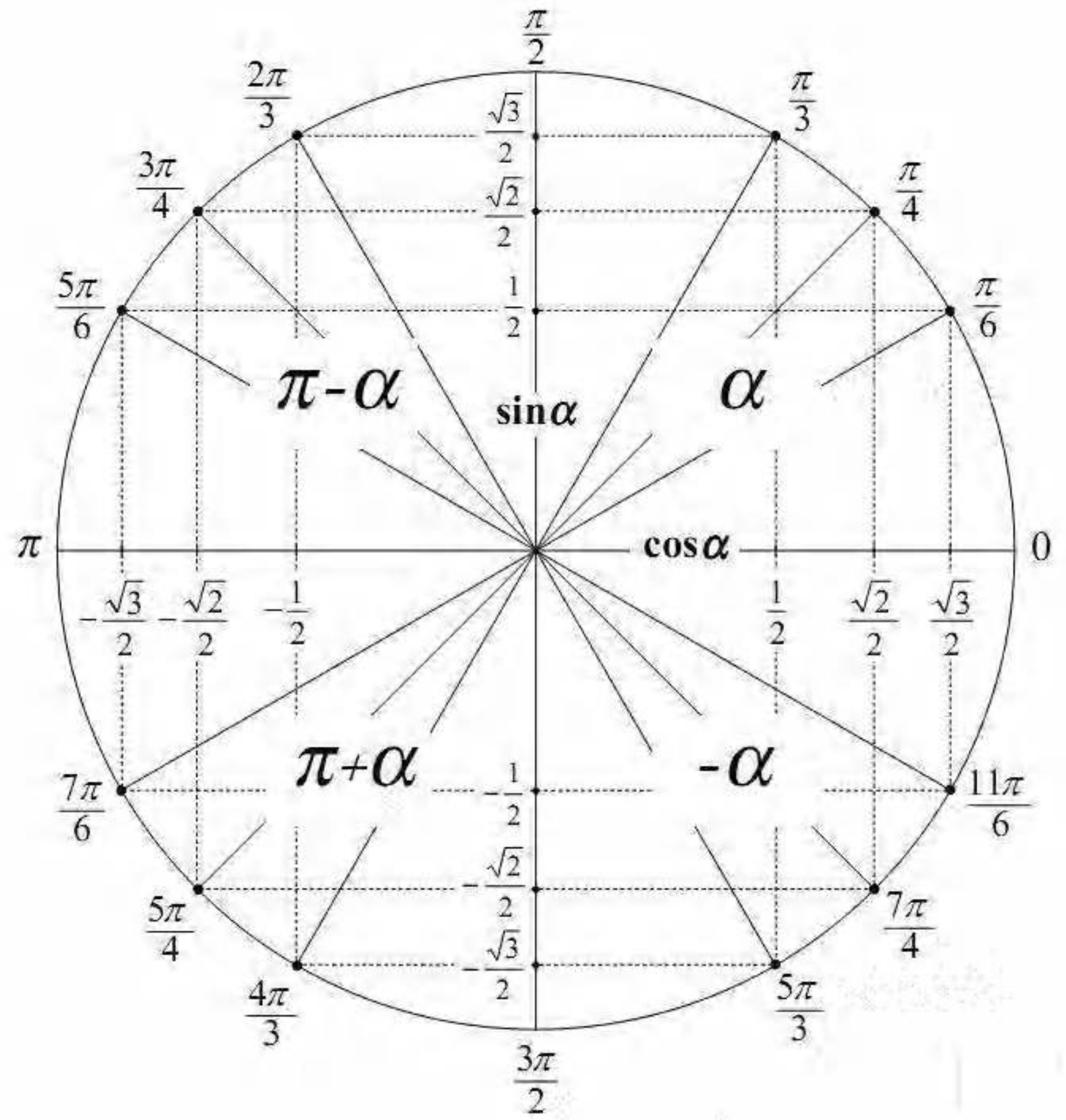
للسنة أولى ثانوي

كتابة و إعداد :

الأستاذ حنــاش نبيــل

ثانوية : زيناي الحاج بلقاسم - عين البيضاء -

Mai 2021



بعض العلاقات المثلثية	
$-1 \le \sin x \le 1$	$-1 \le \cos x \le 1$
$\sin(x+2\pi k)=\sin(x)$	$\cos(x+2\pi k)=\cos(x)$
$\sin(-x)=-\sin(x)$	$\cos(-x)=\cos(x)$
$\sin(\pi-x)=\sin(x)$	$\cos(\pi-x)=-\cos(x)$
$\sin(\pi+x)=-\sin(x)$	$\cos(\pi+x)=-\cos(x)$
$\cos^2 x+\sin^2 x=1$	

جدول القيم المضبوطة لجيب تمام و جيب الأقياس الشهيرة (للحفظ) :

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0

<u>التمرين رقم 01</u> :

1- عين صور الأعداد التالية على الدائرة المثلثية مع الشرح :

$-\pi/4$ ، $2\pi/3$ ، $3\pi/2$ ، $7\pi/2$ ، $11\pi/4$ ، $-29\pi/4$ ، $-133\pi/3$ ، $2019\pi/3$ ، $-2021\pi/2$ ،

3001π ، 2020π ، $25\pi/6$

$11\pi/3$ ، $-31\pi/4$.

2- أحسب القيم المضبوطة لجيب تمام و جيب الأعداد السابقة .

3- إذا كان $\sin x = \frac{3}{5}$ حيث $\pi/2 \le x \le 3\pi/2$ أوجد قيمة $\cos x$.

<u>حل مقترح</u> :

1- التعليم على الدائرة المثلثية :

$-\pi/4$ عدد سالب ، إذن A تتحرك في الإتجاه غير المباشر و تقطع قوسا طوله $\pi/4$.

$2\pi/3$ عدد موجب ، إذن B تتحرك في الإتجاه المباشر و تقطع قوسا طوله $2\pi/3$ و نكتب :

$\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi - \pi}{3} = 2\pi/3$ ، و منه صورتا العددين $\frac{\pi}{3}$ و $2\pi/3$ متناظرتان بالنسبة إلى محور التراتيب .

$3\pi/2$ عدد موجب ، إذن C تتحرك في الإتجاه المباشر و تقطع قوسا طوله $3\pi/2$ و نكتب :

$3\pi/2 = \frac{4\pi-\pi}{2} = \frac{4\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 2\pi - \frac{\pi}{2}$ ، و منه للعددين $3\pi/2$ و $-\frac{\pi}{2}$ نفس الصورة على الدائرة المثلثية و هي النقطة C لأن 2π يمثل دورة .

$7\pi/2$ عدد موجب ، إذن D تتحرك في الإتجاه المباشر و تقطع قوسا طوله $7\pi/2$ و نكتب :

$7\pi/2 = \frac{8\pi-\pi}{2} = \frac{8\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 4\pi - \frac{\pi}{2}$ ، و منه للعددين $-\frac{\pi}{2}$ و $7\pi/2$ نفس الصورة على الدائرة المثلثية و هي النقطة D .

$11\pi/4$ عدد موجب ، إذن E تتحرك في الإتجاه المباشر و تقطع قوسا طوله $11\pi/4$ و نكتب :

$11\pi/4 = \frac{8\pi+3\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = 2\pi + \frac{3\pi}{4}$ ، و منه للعددين $\frac{3\pi}{4}$ و $11\pi/4$ نفس الصورة على الدائرة المثلثية و هي النقطة E بحيث : $3\pi/4 = \frac{4\pi-\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$ أي أن صورتي العددين $3\pi/4$ و $\frac{\pi}{4}$ متناظرتان بالنسبة إلى محور التراتيب .

$-29\pi/4$ عدد سالب ، إذن F تتحرك في الإتجاه غير المباشر و تقطع قوسا طوله $29\pi/4$ و نكتب :

$-29\pi/4 = \frac{-32\pi+3\pi}{4} = -8\pi + \frac{3\pi}{4}$ ، و منه للعددين $\frac{3\pi}{4}$ و $-29\pi/4$ نفس الصورة على الدائرة المثلثية و هي النقطة F بحيث :

$3\pi/4 = \frac{4\pi-\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$ و منه صورتا العددين $\frac{\pi}{4}$ و $3\pi/4$ متناظرتان بالنسبة إلى محور التراتيب .

$-133\pi/3$ عدد سالب ، إذن G تتحرك في الإتجاه غير المباشر و تقطع قوسا طوله $133\pi/3$ و نكتب :

$-133\pi/3 = -\frac{44\times 3\pi+\pi}{3} = -44\pi+\frac{\pi}{3}$ ، و منه للعددين $-133\pi/3$ و $\frac{\pi}{3}$ نفس الصورة على الدائرة المثلثية و هي النقطة G (لأن -44π يمثل 22 دورة في الإتجاه غير المباشر) .

$2019\pi/3$ عدد موجب ، إذن H تتحرك في الإتجاه المباشر و تقطع قوسا طوله $2019\pi/3$ و نكتب :

$2019\pi/3 = \frac{673\times 3\pi}{3} = 673\pi = 672\pi+\pi$ ، و منه للعددين $2019\pi/3$ و π نفس الصورة على الدائرة المثلثية و هي النقطة H (لأن 672π يمثل 336 دورة في الإتجاه المباشر) .

$-2021\pi/2$ عدد سالب ، إذن N تتحرك في الإتجاه غير المباشر و تقطع قوسا طوله $2021\pi/2$ و نكتب :

$-2021\pi/2 = -\frac{1010\times 2\pi+\pi}{2} = -1010\pi-\frac{\pi}{2}$ ، و منه للعددين $-2021\pi/2$ و $-\frac{\pi}{2}$ نفس الصورة على الدائرة المثلثية و هي النقطة N (لأن -1010π يمثل 505 دورة في الإتجاه غير المباشر) .

3001π عدد موجب ، إذن M تتحرك في الإتجاه المباشر و تقطع قوسا طوله 3001π و نكتب :

$3001\pi = 3000\pi+\pi = 1500\times 2\pi+\pi$ و منه للعددين 3001π و π نفس الصورة على الدائرة المثلثية و هي النقطة M لأن $1500\times 2\pi$ يمثل 1500 دورة في الإتجاه المباشر .

2020π عدد موجب ، إذن P تتحرك في الإتجاه المباشر و تقطع قوسا طوله 2020π و نكتب :

$2020\pi = 1010\times 2\pi+0$ و منه للعددين 2020π و 0 نفس الصورة على الدائرة المثلثية و هي النقطة P لأن $1010\times 2\pi$ يمثل 1010 دورة في الإتجاه المباشر .

$25\pi/6$ عدد موجب ، إذن Q تتحرك في الإتجاه المباشر و تقطع قوسا طوله $25\pi/6$ و نكتب :

$25\pi/6 = \frac{24\pi+\pi}{6} = 4\pi+\frac{\pi}{6}$ و منه للعددين $25\pi/6$ و $\frac{\pi}{6}$ نفس الصورة على الدائرة المثلثية و هي النقطة Q لأن 4π يمثل دورتين في الإتجاه المباشر .

$11\pi/3$ عدد موجب ، إذن R تتحرك في الإتجاه المباشر و تقطع قوسا طوله $11\pi/3$ و نكتب :

$11\pi/3 = \dfrac{12\pi - \pi}{3} = 4\pi - \dfrac{\pi}{3}$ و منه للعددين $11\pi/3$ و $-\dfrac{\pi}{3}$ نفس الصورة على الدائرة المثلثية و هي النقطة R لأن $4\pi = 2\times 2\pi$ يمثل دورتين في الإتجاه المباشر .

$-31\pi/4$ عدد سالب ، إذن S تتحرك في الإتجاه غير المباشر و تقطع قوسا طوله $31\pi/4$ و نكتب :

$-31\pi/4 = \dfrac{-32\pi + \pi}{4} = -8\pi + \dfrac{\pi}{4}$ و منه للعددين $-31\pi/4$ و $\dfrac{\pi}{4}$ نفس الصورة على الدائرة المثلثية و هي النقطة S لأن $-8\pi = 4\times(-2\pi)$ يمثل 4 دورات في الإتجاه غير المباشر .

2- حساب جيب تمام و جيب الأعداد السابقة :

$$\cos\left(-\pi/4\right) = \cos \pi/4 = \sqrt{2}/2 \quad \text{و} \quad \sin\left(-\pi/4\right) = -\sin \pi/4 = -\sqrt{2}/2$$

$$\cos\left(2\pi/3\right) = \cos\left(\pi - \pi/3\right) = -\cos \pi/3 = -1/2$$

$$\sin\left(2\pi/3\right) = \sin\left(\pi - \pi/3\right) = \sin \pi/3 = \sqrt{3}/2$$

$$\cos\left(3\pi/2\right) = \cos\left(\pi + \pi/2\right) = -\cos \pi/2 = 0$$

$$\sin\left(3\pi/2\right) = \sin\left(\pi + \pi/2\right) = -\sin \pi/2 = -1$$

$$\cos\left(7\pi/2\right) = \cos\left(4\pi - \pi/2\right) = \cos\left(-\pi/2\right) = \cos \pi/2 = 0$$ أو نكتب

$$\cos\left(7\pi/2\right) = \cos\left(3\pi + \pi/2\right) = \cos\left(2\pi + \left(\pi + \pi/2\right)\right) = \cos\left(\pi + \pi/2\right) = -\cos \pi/2 = 0$$

$$\sin\left(7\pi/2\right) = \sin\left(4\pi - \pi/2\right) = \sin\left(-\pi/2\right) = -\sin \pi/2 = -1$$ أو نكتب

$$\sin\left(\frac{7\pi}{2}\right)=\sin\left(3\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(2\pi+\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\frac{\pi}{2}=-1$$

$$\cos\left(\frac{11\pi}{4}\right)=\cos\left(2\pi+\frac{3\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{11\pi}{4}\right)=\sin\left(2\pi+\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{-29\pi}{4}\right)=\cos\left(-8\pi+\frac{3\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$$

أو نكتب كمايلي : (لأن الدالة جيب تمام $x\mapsto\cos x$ زوجية)

$$\cos\left(\frac{-29\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{29\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{28\pi+\pi}{4}\right)=\cos\left(7\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{-29\pi}{4}\right)=\sin\left(-8\pi+\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

أو نكتب كمايلي : (لأن الدالة جيب $x\mapsto\sin x$ فردية)

$$\sin\left(\frac{-29\pi}{4}\right)=-\sin\left(\frac{29\pi}{4}\right)=-\sin\left(\frac{28\pi+\pi}{4}\right)=-\sin\left(7\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{-133\pi}{3}\right)=\cos\left(-44\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

و $\sin\left(\frac{-133\pi}{3}\right)=\sin\left(-44\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cos\left(\frac{2019\pi}{3}\right)=\cos\left(673\pi\right)=\cos\left(672\pi+\pi\right)=\cos\pi=-1$$

و $\sin\left(\frac{2019\pi}{3}\right)=\sin\left(673\pi\right)=\sin\left(672\pi+\pi\right)=\sin\pi=0$

$$\cos\left(-\frac{2021\pi}{2}\right)=\cos\left(-1010\pi-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0$$

أو نكتب : $\cos\left(-2021\pi/2\right)=\cos\left(2021\pi/2\right)=\cos\left(1010\pi+\pi/2\right)=\cos\pi/2=0$

أو نكتب : $\sin\left(-2021\pi/2\right)=\sin\left(-1010\pi-\pi/2\right)=\sin\left(-\pi/2\right)=-\sin\pi/2=-1$

$$\sin\left(-2021\pi/2\right)=-\sin\left(2021\pi/2\right)=-\sin\left(1010\pi+\pi/2\right)=-\sin\pi/2=-1$$

$$\cos(3001\pi)=\cos(3000\pi+\pi)=\cos\pi=-1$$

و $\sin(3001\pi)=\sin(3000\pi+\pi)=\sin\pi=0$

بما أن $2020\pi=2\times1010\pi+0$ فإن : $\cos(2020\pi)=\cos 0=1$ و كذلك

$\sin(2020\pi)=\sin 0=0$.

$\cos\left(25\pi/6\right)=\cos\left(4\pi+\pi/6\right)=\cos\pi/6=\sqrt{3}/2$ و كذلك

$\sin\left(25\pi/6\right)=\sin\left(4\pi+\pi/6\right)=\sin\pi/6=1/2$.

<u>ملاحظة هامة</u> : بالنسبة لتعليم النقط على الدائرة المثلثية و كذلك بالنسبة لحساب قيم الـ cos و الـ sin ليست مجبرا على إتباع أي صيغة موجودة في الحل لأن صيغة تعيين الـ cos و الـ sin ليست وحيدة مثلا :

لحساب $\sin\frac{3\pi}{2}$ يمكن ملاحظة الصيغة : $\frac{3\pi}{2}=\pi+\frac{\pi}{2}$ و منه

$\sin\frac{3\pi}{2}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\frac{\pi}{2}=-1$ أو ملاحظة الصيغة :

$\frac{3\pi}{2}=\frac{4\pi-\pi}{2}=\frac{4\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=2\pi-\frac{\pi}{2}$ و منه

$\sin\frac{3\pi}{2}=\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\frac{\pi}{2}=-1$.

3- إذا كان $\sin x=\dfrac{3}{5}$ حيث $\pi/2\le x\le 3\pi/2$ ؛ إيجاد قيمة $\cos x$:

نعلم أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ و منه من أجل $\sin x=\dfrac{3}{5}$ ينتج :

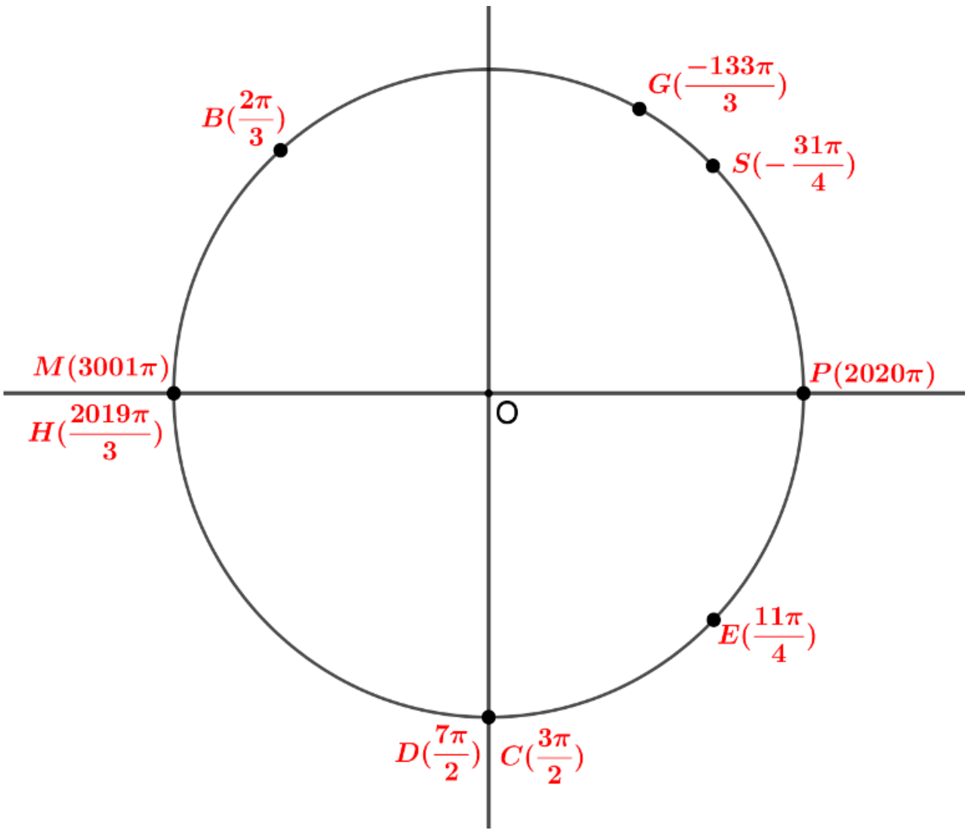
$\cos^2 x=1-\left(3/5\right)^2$ أي $\cos^2 x=1-9/25$ أي $\cos^2 x=16/25$ و منه نجد :

$\cos x=4/5$ أو $\cos x=-4/5$ ؛ لكن $x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$ (الربعين الثاني و الثالث من الدائرة المثلثية)

أين يكون جيب تمام الأعداد سالبا تماما و منه $\cos x\le 0$ ؛ إذن $\cos x=4/5$ <u>مرفوضة</u> لأن $4/5\ge 0$.

<u>نتيجة</u> : $\cos x=-4/5$

تعليم بعض النقاط السابقة على الدائرة المثلثية :



التمرين رقم 02 :

1- x عنصر من المجال $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ ؛ إذا علمت أن $\sin x=\frac{2}{3}$ ، أحسب $\cos x$.

2- x عنصر من المجال $\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$ ؛ إذا علمت أن $\cos x=-\frac{3}{5}$ ، أحسب $\sin x$.

3- x عنصر من المجال $\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$ ؛ إذا علمت أن $\cos x=\frac{2}{7}$ ، أحسب $\sin x$.

4- باستعمال الدائرة المثلثية ؛ حل في المجال $\left[0,2\pi\right]$ المعادلات التالية :

أ) $\cos x=0$ ب) $\cos x={1}/{2}$ جـ) $\cos x=-{\sqrt{3}}/{2}$ د) $\cos x=-1$ هـ) $\cos x={1}/{\sqrt{2}}$.

أ) $\sin x={1}/{2}$ ب) $\sin x=-{\sqrt{3}}/{2}$ جـ) $\sin x=1$ د) $\sin x=-1$

حل مقترح :

1- نستعمل العلاقة المثلثية الشهيرة : من أجل كل عدد حقيقي x : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

إذن من أجل $\sin x=\frac{2}{3}$ نجد : $\cos^2 x=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2$ أي $\cos^2 x=1-\frac{4}{9}$ أي $\cos^2 x=\frac{5}{9}$ و منه نجد

$\cos x=\frac{\sqrt{5}}{3}$ أو $\cos x=-\frac{\sqrt{5}}{3}$ ، لكن $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ (الربع الثاني) أين يكون $\cos x\le 0$ و بالتالي

فإن $\cos x=\frac{\sqrt{5}}{3}$ <u>مرفوضة</u> ؛ إذن نتحصل على : $\cos x=-\frac{\sqrt{5}}{3}$.

2- نستعمل العلاقة المثلثية الشهيرة : من أجل كل عدد حقيقي x : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

إذن من أجل $\cos x=-\frac{3}{5}$ نجد : $\sin^2 x=1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2$ أي $\sin^2 x=1-\frac{9}{25}$ أي $\sin^2 x=\frac{16}{9}$ و

منه نجد $\sin x=\frac{4}{3}$ أو $\sin x=-\frac{4}{3}$ ، لكن $x\in\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$ (الربع الثالث) أين يكون $\sin x\le 0$ ؛ و

بالتالي فإن $\sin x=\frac{4}{3}$ مرفوضة ؛ إذن نتحصل على : $\sin x=-\frac{4}{3}$.

3- نستعمل العلاقة المثلثية الشهيرة : من أجل كل عدد حقيقي x : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

إذن من أجل $\cos x=\frac{2}{7}$ نجد : $\sin^2 x=1-\left(\frac{2}{7}\right)^2$ أي $\sin^2 x=1-\frac{4}{49}$ أي $\sin^2 x=\frac{45}{49}$ و منه

نجد $\sin x=\frac{\sqrt{45}}{7}$ أو $\sin x=-\frac{\sqrt{45}}{7}$ معناه : $\sin x=\frac{3\sqrt{5}}{7}$ أو $\sin x=-\frac{3\sqrt{5}}{7}$ ؛

لكن $x\in\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$ (الربع الأخير) أين يكون $\sin x\le 0$ و بالتالي فإن $\sin x=\frac{3\sqrt{5}}{7}$ مرفوضة ؛ إذن

نتحصل على : $\sin x=-\frac{3\sqrt{5}}{7}$.

4- باستعمال الدائرة المثلثية ؛ حل في المجال $[0,\pi]$ المعادلات التالية :

المجال $[0,2\pi]$ يوافق دورة كاملة على الدائرة المثلثية حيث :

أ) $\cos x=0$: محققة إذا و فقط إذا كان : $x=\pi/2$ أو $x=\frac{\pi}{2}+\pi$ أي $x=\frac{3\pi}{2}$.

ب) $\cos x=1/2$: محققة إذا و فقط إذا كان : $x=\frac{\pi}{3}$ أو $x=2\pi-\frac{\pi}{3}$ (لأن جيب التمام يكون موجبا

فقط في الربعين الأول و الرابع) ؛ أي : $x=\frac{\pi}{3}$ أو $x=\frac{5\pi}{3}$.

ج) $\cos x = -\sqrt{3}/2$: محققة إذا و فقط إذا كان : $x = \pi - \frac{\pi}{6}$ (الربع الثاني) أو $x = \pi + \frac{\pi}{6}$ (الربع الثالث) ؛ أي : $x = \frac{5\pi}{6}$ أو $x = \frac{7\pi}{6}$.

د) $\cos x = -1$: محققة إذا و فقط إذا كان : $x = \pi$ ***(سهلة جدا)***

ماذا عن المعادلة $\cos x = 1$ ؟؟؟ (<u>الجواب</u> : لا شك أنك قد عرفت الإجابة و هي : $x = 0$ أو $x = 2\pi$) .

هـ) $\cos x = 1/\sqrt{2}$: بتطبيق المقام نتحصل على المعادلة الأوضح و هي : $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ؛ إذن $x = \frac{\pi}{4}$ أو $x = 2\pi - \frac{\pi}{4}$ (لأن جيب التمام يكون موجبا فقط في الربعين الأول و الرابع) ؛ أي : $x = \frac{\pi}{4}$ أو $x = \frac{7\pi}{4}$.

أ) $\sin x = 1/2$: محققة إذا و فقط إذا كان : $x = \frac{\pi}{6}$ أو $x = \pi - \frac{\pi}{6}$ (لأن الجيب يكون موجبا فقط في الربعين الأول و الثاني من الدائرة المثلثية) ؛ أي : $x = \frac{\pi}{6}$ أو $x = \frac{5\pi}{6}$.

ب) $\sin x = -\sqrt{3}/2$: محققة إذا و فقط إذا كان : $x = \pi + \frac{\pi}{3}$ أو $x = 2\pi - \frac{\pi}{3}$ (لأن الجيب يكون سالبا فقط في الربعين الثالث و الرابع من الدائرة المثلثية) ؛ أي : $x = \frac{4\pi}{3}$ أو $x = \frac{5\pi}{3}$.

<u>ملاحظة</u> : القيس الشهير α بحيث : $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ هو $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

جـ) $\sin x = 1$: محققة إذا و فقط إذا كان : $x = \frac{\pi}{2}$ ***(سهلة جدا)***

لكن ماذا عن المعادلة $\sin x = -1$ ؟؟؟ (<u>الجواب</u> : لا شك أنك قد عرفت الإجابة و هي : $x = \frac{3\pi}{2}$) .

التمرين رقم 03 :

x عدد حقيقي . $A(x)$ و $B(x)$ عبارتان معرفتان بـ :

$$A(x)=\cos\left(\frac{17\pi}{2}\right)-\sin(\pi+x)+\cos(11\pi+x)$$
$$B(x)=\cos(-x)+\sin(7\pi-x)-\sin(3\pi)$$

1- بين أن : $A(x)=\sin x-\cos x$ و $B(x)=\cos x+\sin x$

2- بين أن : $A(x).B(x)=1-2\cos^2 x$

3- أحسب $\cos x$ و $\sin x$ علما أن : $A(x)=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ و $B(x)=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ و $x\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$

ثم إستنتج $\tan x$.

حل مقترح :

1- نبين أن : $A(x)=\sin x-\cos x$ و $B(x)=\cos x+\sin x$

بكتابة : $\frac{17\pi}{2}=\frac{16\pi+\pi}{2}=8\pi+\frac{\pi}{2}$ نتحصل على : $\cos\left(\frac{17\pi}{2}\right)=\cos\left(8\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}$ ؛

إذن : $\cos\left(\frac{17\pi}{2}\right)=0$.

نعلم أن : $\sin(\pi+x)=-\sin x$ و بكتابة : $11\pi+x=10\pi+(\pi+x)$ ينتج :

$\cos(11\pi+x)=\cos(10\pi+(\pi+x))=\cos(\pi+x)=-\cos x$ ؛ إذن تصبح العبارة $A(x)$ من

الشكل : $A(x)=0-(-\sin x)-\cos x$ ، معناه : $\boxed{A(x)=\sin x-\cos x}$ و هو المطلوب .

نعلم أنه من أجل عدد حقيقي x فإن : $\cos(-x)=\cos x$ (الدالة cos زوجية) و من جهة أخرى :

و منه نجد : $7\pi - x = 6\pi + (\pi - x)$ أي $\sin(7\pi - x) = \sin(6\pi + (\pi - x)) = \sin(\pi - x)$

. $\sin(7\pi - x) = \sin x$

من جهة أخرى : $\sin(3\pi) = 0$ لأن : $\sin(3\pi) = \sin(2\pi + \pi) = \sin\pi = 0$ ؛ و بصفة عامة فإنه

من أجل كل عدد $k \in \mathbb{Z}$ ؛ لدينا : $\sin(k\pi) = 0$ و $\cos(k\pi) = 1$ إذا كان k زوجيا و

. $\cos(k\pi) = -1$ إذا كان k فرديا .

إذن نتحصل على : $B(x) = \cos x + \sin x - 0$ أي : $\boxed{B(x) = \cos x + \sin x}$ و هو المطلوب .

2- نبين أن : $A(x).B(x) = 1 - 2\cos^2 x$

من السؤال 1- نعلم أن : $A(x) = \sin x - \cos x$ و $B(x) = \cos x + \sin x$ ؛ إذن نجد :

$A(x).B(x) = (\sin x - \cos x)(\cos x + \sin x)$ و بالنشر نتحصل على :

$A(x).B(x) = \sin x\cos x + \sin^2 x - \cos^2 x - \cos x\sin x$ أي $A(x).B(x) = \sin^2 x - \cos^2 x$

؛ بحيث نعلم أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

أي $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ و منه نجد : $A(x).B(x) = 1 - \cos^2 x - \cos^2 x$ أي

$\boxed{A(x).B(x) = 1 - 2\cos^2 x}$ و هو المطلوب .

3- حساب $\cos x$ و $\sin x$ علما أن : $A(x) = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$ و $B(x) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ و $x \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$

ثم إستنتاج $\tan x$:

نستغل نتيجة السؤال 2- فنجد : $\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right)\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = 1 - 2\cos^2 x$ أي $\dfrac{\sqrt{3}^2 - 1^2}{4} = 1 - 2\cos^2 x$

أي $\dfrac{2}{4} = 1 - 2\cos^2 x$ أي $2\cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}$ أي $2\cos^2 x = \frac{1}{2}$ و منه $\cos^2 x = \frac{1}{4}$ ؛ إذن :

$\cos x = \frac{1}{2}$ أو $\cos x = -\frac{1}{2}$ ؛ لكن بما أن $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ (الربع الثاني من الدائرة المثلثية) فإن

$\cos x < 0$ و بالتالي : $\cos x = \frac{1}{2}$ مرفوضة ؛ إذن نجد : $\boxed{\cos x = -\frac{1}{2}}$.

لإيجاد قيمة $\sin x$ يمكن إستعمال العلاقة $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ، أو باستعمال العبارة $A(x)$ أو $B(x)$:

$A(x) = \sin x - \cos x$ تكافئ $\frac{\sqrt{3}+1}{2} = \sin x - \left(-\frac{1}{2}\right)$ أي $\sin x = \frac{\sqrt{3}+1}{2} - \frac{1}{2}$ و منه نجد

$\boxed{\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}}$.

كما هو معلوم فإنه إذا كان $\cos x \neq 0$ فإن : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ؛ و منه $\tan x = \frac{\sqrt{3}/2}{-1/2}$ أي

$\boxed{\tan x = -\sqrt{3}}$. (لاحظ أن الظل **<u>لا يحقق</u>** بالضرورة الحصر $-1 \leq \tan x \leq 1$) .

التمرين رقم 04 :

1- مثل صورة α على الدائرة المثلثية حيث : $\alpha = \dfrac{521\pi}{3}$.

2- إستنتج القيم المضبوطة لكل من : $\cos\alpha$ و $\sin\alpha$.

3- نضع : $A(x)=\cos(3\pi-x)-2\sin(x-\pi)+\cos(80\pi+x)-2\cos(-x)$

أ) بين أن : $A(x)=2(\sin x-\cos x)$ ثم عين قيمة $A\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

ب) باستعمال الدائرة المثلثية حل المعادلة : $A(x)=\sqrt{3}-1$ علما أن : $x\in[0,\pi]$.

حل مقترح :

1- تمثيل صورة α على الدائرة المثلثية حيث $\alpha = \dfrac{521\pi}{3}$:

لتكن M هي صورة العدد α على الدائرة المثلثية ؛ إذن بكتابة :

$\dfrac{521\pi}{3}=\dfrac{522\pi-\pi}{3}=\dfrac{522\pi}{3}-\dfrac{\pi}{3}=174\pi-\dfrac{\pi}{3}$ ؛ بما أن $174\pi=87\times2\pi$ أي أن 174π يمثل 87 دورة فإن : M هي صورة العدد $\boxed{-\dfrac{\pi}{3}}$.

2- إستنتاج القيم المضبوطة لكل من : $\cos\alpha$ و $\sin\alpha$.

$\cos\alpha=\cos\left(\dfrac{521\pi}{3}\right)=\cos\left(174\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\dfrac{\pi}{3}$ لأن الدالة $\cos$ دورية و دورها هو 2π ثم لأن الدالة $\cos$ هي دالة زوجية ؛ و بالتالي نتحصل على : $\cos\alpha = {}^{1}\!/_{2}$.

$\sin\alpha=\sin\left(\dfrac{521\pi}{3}\right)=\sin\left(174\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sin\dfrac{\pi}{3}$ لأن الدالة $\sin$ دورية و دورها هو

2π ثم لأن الدالة $\sin$ هي دالة فردية ؛ و بالتالي نتحصل على : $\sin\alpha = -\sqrt{3}/2$.

3- نضع : $A(x) = \cos(3\pi - x) - 2\sin(x-\pi) + \cos(80\pi + x) - 2\cos(-x)$

أ) نبين أن : $A(x) = 2(\sin x - \cos x)$ ثم نعين قيمة $A\left(\frac{3\pi}{4}\right)$:

بكتابة : $3\pi - x = 2\pi + (\pi - x)$ نجد :

$\cos(3\pi - x) = \cos(2\pi + (\pi - x)) = \cos(\pi - x) = -\cos x$ و كذلك نكتب :

$\sin(x-\pi) = \sin(-(\pi - x)) = -\sin(\pi - x) = -\sin x$ لأن الدالة $\sin$ فردية ثم لأنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $\sin(\pi - x) = \sin x$.

$\cos(80\pi + x) = \cos x$ لأن الدالة $\cos$ دورية و دورها هو 2π ($80\pi = 2k\pi$ حيث $k = 40$) .

$\cos(-x) = \cos x$ لأن الدالة $\cos$ هي دالة زوجية .

إذن ينتج : $A(x) = -\cos x + 2\sin x + \cos x - 2\cos x$ تكافئ $A(x) = 2\sin x - 2\cos x$ تكافئ $A(x) = 2(\sin x - \cos x)$.

- تعيين قيمة $A\left(\frac{3\pi}{4}\right)$:

$A\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2\left(\sin\frac{3\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{4}\right)$ ؛ إذن بكتابة : $\frac{3\pi}{4} = \frac{4\pi - \pi}{4} = \frac{4\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$ نجد :

$\sin\frac{3\pi}{4} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\cos\frac{3\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ؛

إذن نجد : $A\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ أي $\boxed{A\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}}$.

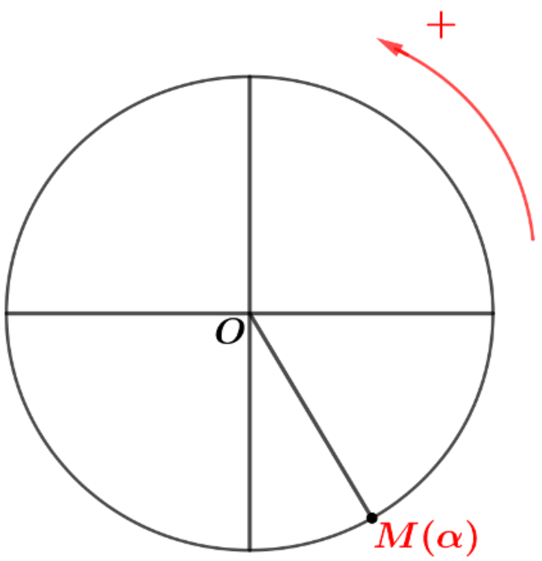
ب) باستعمال الدائرة المثلثية نحل المعادلة : $A(x)=0$ علما أن : $x\in[0,2\pi]$.

$A(x)=0$ تكافئ : $2(\sin x-\cos x)=0$ تكافئ $\sin x-\cos x=0$ تكافئ $\cos x=\sin x$

أي أن جيب تمام العدد x من المجال $[0,2\pi]$ و جيبه متساويان في القيمة ؛ باستعمال الدائرة المثلثية نجد أن :

$x=\frac{\pi}{4}$ (في الربع الأول حيث $\cos\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}/2$) أو $x=\pi+\frac{\pi}{4}$ أي $x=\frac{5\pi}{4}$ (في الربع الثالث حيث $\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\sqrt{2}/2$ و $\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=-\sqrt{2}/2$) .

إذن مجموعة حلول المعادلة $\cos x=\sin x$ في المجال $[0,2\pi]$ هي : $S=\left\{\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right\}$



التمرين رقم 05 :

إذا علمت أن : $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

✓ عين القيمة المضبوطة لـ : $\cos\frac{\pi}{12}$ ، $\tan\frac{\pi}{12}$.

✓ إستنتج القيم المضبوطة لـ : $\sin\frac{11\pi}{12}$ ، $\sin\left(-\frac{11\pi}{12}\right)$ ، $\cos\frac{13\pi}{12}$ ، $\cos\left(-\frac{13\pi}{12}\right)$ ، $\sin\frac{61\pi}{12}$ ، $\tan\frac{2017\pi}{12}$.

حل مقترح :

✓ تعيين القيمة المضبوطة لـ : $\cos\frac{\pi}{12}$ ، $\tan\frac{\pi}{12}$:

لدينا : $\cos^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{\pi}{12}=1$ و منه نجد $\cos^2\frac{\pi}{12}=1-\sin^2\frac{\pi}{12}$ أي $\cos^2\frac{\pi}{12}=1-\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2$ أي $\cos^2\frac{\pi}{12}=1-\frac{6-2\sqrt{6}\times\sqrt{2}+2}{16}$ أي $\cos^2\frac{\pi}{12}=1-\frac{8-2\sqrt{12}}{16}$ أي $\cos^2\frac{\pi}{12}=\frac{8+4\sqrt{3}}{16}$ أي $\cos^2\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+2}{4}$ و منه نجد $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}$ أو $\cos\frac{\pi}{12}=-\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}$ ؛ لكن $\frac{\pi}{12}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ (الربع الأول) و بالتالي فإن $\cos\frac{\pi}{12}\geq 0$ ؛ إذن $\cos\frac{\pi}{12}=-\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}$ مرفوضة ؛ فنجد : $\boxed{\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}}$.

نعلم أنه إذا كان $\cos x\neq 0$ فإن ظل العدد الحقيقي x هو النسبة : $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ و منه نجد

أي $\tan\frac{\pi}{12}=\frac{\sin\pi/12}{\cos\pi/12}$ و منه $\tan\frac{\pi}{12}=\frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}}$ $\boxed{\tan\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2\sqrt{\sqrt{3}+2}}}$.

✓ إستنتاج القيم المضبوطة لـ : $\sin\frac{11\pi}{12}$ ، $\sin\left(-\frac{11\pi}{12}\right)$ ، $\cos\frac{13\pi}{12}$ ، $\cos\left(-\frac{13\pi}{12}\right)$ ، $\sin\frac{61\pi}{12}$ ، $\tan\frac{2017\pi}{12}$:

بكتابة : $\pi-\frac{\pi}{12}=\frac{12\pi}{12}-\frac{\pi}{12}=\frac{12\pi-\pi}{12}=\frac{11\pi}{12}$ نجد :

$\sin\frac{11\pi}{12}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{12}\right)=\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ؛ و بما أنه من أجل كل عدد حقيقي x نعلم أن :

$\sin(-x)=-\sin x$ فإن : $\sin\left(-\frac{11\pi}{12}\right)=-\sin\frac{11\pi}{12}=-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

بكتابة : $\pi+\frac{\pi}{12}=\frac{12\pi}{12}+\frac{\pi}{12}=\frac{12\pi+\pi}{12}=\frac{13\pi}{12}$ نجد :

$\cos\frac{13\pi}{12}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{12}\right)=-\cos\frac{\pi}{12}=-\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}$ ؛ و بما أنه من أجل كل عدد حقيقي x نعلم أن

: $\cos(-x)=\cos x$ فإن : $\cos\left(-\frac{13\pi}{12}\right)=\cos\frac{13\pi}{12}=-\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}$.

بكتابة : $5\pi+\frac{\pi}{12}=\frac{12\times5\pi+\pi}{12}=\frac{61\pi}{12}$ ينتج :

$\sin\left(\pi+\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(4\pi+\left(\pi+\frac{\pi}{12}\right)\right)=\sin\left(5\pi+\frac{\pi}{12}\right)=\sin\frac{61\pi}{12}$ لأنه من أجل كل عدد

$k\in\mathbb{Z}$ نعلم أن : $\sin(2\pi k+x)=\sin x$ (هنا $x=\pi+\frac{\pi}{12}$ و $k=2$) حيث :

$\sin(\pi+x)=-\sin x$ فإنه ينتج : $\sin\frac{61\pi}{12}=-\sin\frac{\pi}{12}=-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

$\boxed{\tan\frac{2017\pi}{12}=\frac{\sin\frac{2017\pi}{12}}{\cos\frac{2017\pi}{12}}}$ ؛ و بكتابة : $\frac{2017\pi}{12}=\frac{12\times168\pi+\pi}{12}=168\pi+\frac{\pi}{12}$ نتحصل على

$\sin\frac{2017\pi}{12}=\sin\left(168\pi+\frac{\pi}{12}\right)=\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ لأنه من أجل كل عدد $k\in\mathbb{Z}$ نعلم أن :

$\sin(2\pi k+x)=\sin x$ (هنا $x=\frac{\pi}{12}$ و $k=84$) و كذلك :

$\cos\frac{2017\pi}{12}=\cos\left(168\pi+\frac{\pi}{12}\right)=\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}$ لأنه من أجل كل عدد $k\in\mathbb{Z}$ نعلم أن :

$\cos(x+2\pi k)=\cos x$ (هنا $x=\frac{\pi}{12}$ و $k=84$) و منه ينتج : $\boxed{\tan\frac{2017\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2\sqrt{\sqrt{3}+2}}}$.

التمرين رقم 06 :

I- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن :

- $\sin^2 x-\cos^2 x=1-2\cos^2 x$
- $\cos^2 x-\sin^2 x=1-2\sin^2 x$
- $\sin^4 x-\cos^4 x=\sin^2 x-\cos^2 x$

II- 1- حول من الدرجة إلى الراديان : $20°$ ، $140°$

2- حول من الراديان إلى الدرجات : $\frac{\pi}{5}rad$ ، $\frac{3\pi}{8}rad$

حل مقترح :

I- نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن :

- $\sin^2 x-\cos^2 x=1-2\cos^2 x$

نعلم أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ و منه ينتج : $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ ؛ إذن

$\sin^2 x-\cos^2 x=1-\cos^2 x-\cos^2 x$ يكافئ : $\boxed{\sin^2 x-\cos^2 x=1-2\cos^2 x}$ و هو المطلوب .

- $\cos^2 x-\sin^2 x=1-2\sin^2 x$

نعلم أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ و منه ينتج : $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ ؛ إذن

$\cos^2 x-\sin^2 x=1-\sin^2 x-\sin^2 x$ يكافئ : $\boxed{\cos^2 x-\sin^2 x=1-2\sin^2 x}$ و هو المطلوب .

- $\sin^4 x-\cos^4 x=\sin^2 x-\cos^2 x$

نلاحظ أن : $\sin^4 x-\cos^4 x=\left(\sin^2 x\right)^2-\left(\cos^2 x\right)^2$ و باستعمال التحليل بالمتطابقة الشهيرة

الثالثة نجد : $\sin^4 x-\cos^4 x=\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)$ بحيث نعلم أنه من أجل كل عدد

حقيقي x فإن : $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ ؛ إذن ينتج : $\boxed{\sin^4 x-\cos^4 x=\sin^2 x-\cos^2 x}$ و هو المطلوب .

II – 1– التحويل من الدرجة إلى الراديان : $20°$ ، $140°$

$180° \rightarrow \pi\, rad$
$20° \rightarrow x\, rad$
و منه نتحصل على : $x=\dfrac{20\times\pi\, rad}{180}$ أي : $\boxed{x=\dfrac{\pi}{9} rad}$

$180° \rightarrow \pi\, rad$
$140° \rightarrow x\, rad$
و منه نتحصل على : $x=\dfrac{140\times\pi\, rad}{180}$ أي : $\boxed{x=\dfrac{7\pi}{9} rad}$

2– التحويل من الراديان إلى الدرجات : $\dfrac{\pi}{5} rad$ ، $\dfrac{3\pi}{8} rad$

$180° \rightarrow \pi\, rad$
$x° \rightarrow \dfrac{\pi}{5} rad$
و منه نتحصل على : $x=\dfrac{180\times\dfrac{\pi}{5}}{\pi}$ أي $x=\dfrac{180}{5}$ أي : $\boxed{x=36°}$

$180° \rightarrow \pi\, rad$
$x° \rightarrow \dfrac{3\pi}{8} rad$
و منه نتحصل على : $x=\dfrac{180\times\dfrac{3\pi}{8}}{\pi}$ أي $x=\dfrac{180\times 3}{8}$ أي : $\boxed{x=67,5°}$

وفقكم الله في إختبار الفصل الثاني ...

<u>الأستاذ</u> : حناش .ن