الرياضيات في الثانوية

تمارين نموذجية في الحساب الشعاعي
مرفقة بحلول مفصلة

20 تمرين

للسنة أولى ثانوي

كتابة و إعداد :

الأستاذ حنــاش نبيــل

ثانوية : زيناي الحاج بلقاسم - عين البيضاء -

Mars 2021

التمرين رقم 01 :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ ، α عدد حقيقي .

لتكن النقط : $A(1;3)$ ، $B(-2;-3)$ ، $C(1;-1)$ ، $D(3;\alpha)$.

1) أحسب مركبتي كل شعاع من الأشعة التالية :

$\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AC}$.

2) أحسب مركبتي الشعاع : $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}$

3) عين العدد α حتى يكون الشعاعان $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطين خطيا .

التمرين رقم 02 :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ ، α عدد حقيقي .

لتكن النقط : $A\left(-5;\dfrac{1}{2}\right)$ ، $B\left(\alpha;\dfrac{3}{2}\right)$ ، $C(3;2)$.

1) عين قيمة α حتى تكون النقطة B منتصف $[AC]$.

2) عين α حتى يكون الشعاع $\overrightarrow{AB}$ موازيا للشعاع $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$.

3) عين إحداثيي النقطة D بحيث :

$2\overrightarrow{DA}+3\overrightarrow{DC}=\vec{0}$.

التمرين رقم 03 :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ ، m عدد حقيقي .

نعتبر النقط : $A(2;-3)$ ، $B\left(-1;\dfrac{3}{2}\right)$ ، $C(m;2)$.

1) أكتب معادلة للمستقيم (AC) .

2) عين قيم m حتى تكون $B\in(AC)$.

3) عين قيم m بحيث يكون المستقيم (AC) يوازي حامل محور التراتيب .

4) عين قيم m بحيث يكون معامل توجيه المستقيم (AC) يساوي 1 .

5) أكتب معادلة للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة I منتصف $[AB]$ و يوازي الشعاع $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$.

التمرين رقم 04 :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. نعتبر النقط A ، B و C حيث :

$\overrightarrow{AB}=-4\vec{i}-2\vec{j}$ ، $\overrightarrow{OA}=2\vec{i}+\vec{j}$ ، $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix}$

1) بين أن : $B(-2;-1)$ و $C(-2;5)$.

2) برهن أن النقط B ، A ، O في إستقامية .

3) عين إحداثيي النقطة D حتى يكون الرباعي

$ABCD$ متوازي أضلاع ثم عين إحداثيي مركزه I

4) ليكن (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطتين A و C

أ- عين معامل توجيه المستقيم (Δ) ثم أكتب معادلة له

ب- عين إحداثيي M نقطة تقاطع المستقيم (Δ) مع حامل محور الفواصل .

التمرين رقم 05 :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. نعتبر النقط A ، B و C حيث :

$\overrightarrow{OA}=-\vec{i}-\vec{j}$ ، $\overrightarrow{OB}=2\vec{i}+6\vec{j}$ ،

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$.

1) عين إحداثيي النقطتين B و C ثم علم النقط A ، B و C .

2) أ- أحسب الأطوال AB ، AC و BC .

ب- إستنتج نوع المثلث ABC .

3) أحسب إحداثيي النقطة N منتصف $[BC]$.

4- عين إحداثيي النقطة M المعرفة بالعلاقة :

$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{OC}$ ثم أنشئها .

التمرين رقم 06 :

لتكن A ، B و C ثلاث نقط من المستوي مختلفة مثنى مثنى .

1) علم النقطة D بحيث : $\overrightarrow{DA}-3\overrightarrow{DC}=\vec{0}$

2) علم النقطة E بحيث : $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}$

3) برهن أن $AEDB$ متوازي أضلاع .

4) برهن أنه من أجل كل نقطة M من المستوي لدينا :

$$\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MC}=-2\overrightarrow{MD}$$

5) ليكن O مركز متوازي الأضلاع $AEDB$.

برهن أن : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AO}$

التمرين رقم 07 :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

نعتبر النقط : $C(3;2)$ ، $B(\alpha;-1)$ ، $A(2;3)$ حيث α عدد حقيقي .

1) عين α حتى تكون النقط B ، A ، O في إستقامية .

2) نعتبر أن : $\alpha=2$

عين إحداثيي النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع .

3) نعتبر النقطة $E\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right)$.

بين أن النقطة E هي مركز متوازي الأضلاع $ABCD$.

4) أ- أكتب معادلة للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A و يوازي المستقيم (BC) .

ب- عين إحداثيي N نقطة تقاطع (Δ) مع حامل محور الفواصل .

جـ- (Δ') المستقيم الذي معادلته : $y=x+1$ ،

أوجد إحداثيي نقطة تقاطع (Δ) و (Δ') .

التمرين رقم 08 :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

نعتبر النقط : $A(-1;2)$ ، $B(2;0)$ ، $C(\alpha^2+1;\alpha)$ حيث α عدد حقيقي .

1) عين قيم α حتى تكون النقط A ، B و C في إستقامية .

2) أكتب معادلة المستقيم (AB) .

3) أكتب معادلة المستقيم (Δ) الذي معامل توجيهه 2 و يشمل النقطة $I(1;5)$.

4) عين $(AB)\cap(\Delta)$.

التمرين رقم 09 :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

لتكن النقط : $A(1;0)$ ، $B(3;-2)$ ، $C(3;2)$ ، $E(5;0)$.

1) جد أطوال أضلاع المثلث ABC ثم إستنتج نوعه .

2) عين قيمة α حتى تكون النقط A ، B و $D(\alpha;\alpha+1)$ في إستقامة واحدة .

3) بين أن الرباعي $ABEC$ مربع .

4) أ- جد معادلة المستقيم (Δ_1) الذي يشمل B و يوازي (AC) .

ب- جد إحداثيي نقطتي تقاطع (Δ_1) مع محوري الإحداثيات .

5) أكتب معادلة المستقيم (Δ_2) الذي يمر بالنقطة O و يوازي المستقيم ذو المعادلة : $3x+2y+1=0$

6) جد إحداثيي نقطة تقاطع (Δ_1) و (Δ_2) .

التمرين رقم 10 :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. نعتبر النقط A ، B و C حيث :

$A(2;-2)$ ، $\overrightarrow{OB}=-3\vec{i}-5\vec{j}$ ، $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-6\\2\end{pmatrix}$.

1) عين إحداثيي النقطة C، ثم علم النقط A ، B و C .

2) عين إحداثيي النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع .

3) لتكن M منتصف القطعة $[BC]$ و النقطة N التي تحقق العلاقة الشعاعية : $\overrightarrow{DM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DN}$

أ- إستنتج أن النقط D ، M و N في إستقامية .

ب- عين إحداثيي النقطة N .

4) أكتب معادلة للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة B و يوازي المستقيم (AC) .

5) لتكن النقطة $E(-2;-4)$. أحسب أطوال أضلاع المثلث ACE ثم إستنتج طبيعته .

التمرين رقم 11 :

$\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ معلم متعامد و متجانس للمستوي .

نعتبر النقط : $A\left(2;1\right)$ ، $B\left(3;2\right)$ ، $C\left(0;3\right)$.

1) علم النقط A ، B و C .

2) أحسب أطوال أضلاع المثلث ABC ثم حدد طبيعته مع التعليل .

3) أحسب معامل توجيه المستقيم $\left(AB\right)$ ثم أكتب معادلة له .

4) نعتبر النقطة $F\left(-1;\alpha\right)$.

حدد قيمة α حتى تكون النقط A ، B ، F في إستقامية .

5) أرسم المستقيم $\left(\Gamma\right)$ الذي معادلته : $y=5x+3$

6) حدد نقطة تقاطع المستقيمين $\left(\Gamma\right)$ و $\left(AB\right)$ بيانيا .

II- نعتبر جملة المعادلتين $\left(S\right)$ التالية :

$$\left(S\right)\begin{cases}x-y=1\\5x-y=-3\end{cases}$$

1) تحقق أن الجملة $\left(S\right)$ تقبل حلا وحيدا .

2) حل الجملة $\left(S\right)$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

التمرين رقم 12 :

نريد حل جملة المعادلتين $\left(S\right)$ التالية :

$$\left(S\right)\begin{cases}2z^2-t^2=-1\\3z^2+t^2=21\end{cases}$$

1) أ- بوضع $x=z^2$ و $y=t^2$ أكتب جملة معادلتين $\left(S'\right)$ تكافئ الجملة $\left(S\right)$.

ب- حل جملة المعادلتين $\left(S'\right)$.

2) إستنتج حلول الجملة $\left(S\right)$.

التمرين رقم 13 :

بمناسبة انتقاله إلى الثانوية نظم يوسف وليمة دعا إليها تلاميذ قسمه . لاحظ أنه لو يجلس كل 5 تلاميذ حول طاولة فإن 3 منهم لا يجد لهم أماكن للجلوس ، و لو يجلس كل 6 تلاميذ حول طاولة فإن 4 أماكن تبقى شاغرة .

ما هو عدد التلاميذ الذين دعاهم يوسف ؟ و ما هو عدد الطاولات ؟

التمرين رقم 14 :

$\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ معلم متعامد و متجانس للمستوي .

نعتبر المستقيم $\left(D_1\right)$ الذي معادلته : $y=x+1$ و المستقيم $\left(D_2\right)$ الذي معادلته : $y=-x+3$

1) أرسم المستقيمين $\left(D_1\right)$ و $\left(D_2\right)$.

2) ما هو معامل توجيه كل من $\left(D_1\right)$ و $\left(D_2\right)$ ؟

3) هل $\left(D_1\right)$ و $\left(D_2\right)$ متوازيان ؟ علل .

4) هل النقطتان $A\left(1;1\right)$ و $B\left(1;2\right)$ تنتميان إلى المستقيم $\left(D_1\right)$ ؟ و هل تنتميان إلى المستقيم $\left(D_2\right)$ ؟

5) نعتبر الجملة (S) التالية : $\begin{cases} x-y+1=0 \\ x+y-3=0 \end{cases}$

بين لماذا تقبل الجملة (S) حلا وحيدا ، و عين مما سبق حل هذه الجملة .

تمارين نماذج فروض و إختبارات سابقة

التمرين رقم 15 :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

نعتبر النقط : $A(2;1)$ ، $B(3;-1)$ ، $C(1;-4)$.

1) أ- أحسب مركبتي الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

ب- هل النقط A ، B و C في إستقامية ؟

2) عين إحداثيي I منتصف القطعة $[AC]$.

3) أ- أوجد معادلة المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة C و $\overrightarrow{AB}$ شعاع توجيه له .

ب- هل النقطة $D(0;1)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ) ؟

4) أوجد معادلة المستقيم (Δ_1) الذي يشمل النقطة A و يوازي محور التراتيب .

5) أوجد معادلة المستقيم (Δ_2) الذي يشمل النقطة A و يوازي محور الفواصل .

6) عين معامل توجيه المستقيم الذي معادلته : $5x-3y-2=0$

7) نعتبر النقطة $E(2x;x)$ حيث x عدد حقيقي .

عين قيمة x التي من أجلها :

أ- تكون النقط A ، B و E في إستقامية .

ب- يكون المثلث EBA متساوي الساقين في E .

جـ- يكون : $AE=\sqrt{5}$.

8) عين إحداثيي النقطة M بحيث : $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{MB}$

9) عين إحداثيي النقطة F حتى يكون الرباعي $ABCF$ متوازي أضلاع .

10) هل المثلث ABC قائم ؟ علل .

التمرين رقم 16 :

1) تحقق أن الجملة (S) التالية تقبل حلا ثم حل الجملة

$$(S) : \begin{cases} x-y=-3 \\ -3x+y=-1 \end{cases}$$

2) أكتب معادلة المستقيمين (D_1) و (D_2) حيث :

- المستقيم (D_1) يشمل النقطتين $A(-2;1)$ و $B(2;5)$.

- المستقيم (D_2) يشمل النقطة $C\left(\frac{1}{3};0\right)$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ شعاع توجيه له .

3) أ- أرسم بعناية المستقيمين (D_1) و (D_2) .

ب- من البيان عين نقطة تقاطع (D_1) و (D_2) .

- ماذا تستنتج ؟

التمرين رقم 17 :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) علم النقط $A\left(1;2\right)$ ، $B\left(3;0\right)$ ، $C\left(-3;-4\right)$ ، $D\left(0;1\right)$.

2) عين إحداثيي النقطة M حتى يكون الرباعي $BMCA$ متوازي أضلاع .

3) عين معادلة المستقيم $\left(\Delta\right)$ الذي يشمل A و $\overrightarrow{BC}$ شعاع توجيه له .

4) عين إحداثيي نقطة تقاطع المستقيم $\left(\Delta\right)$ مع حامل محور الفواصل ، ثم مع حامل محور التراتيب .

5) عين إحداثيي النقطة N بحيث B هي نظيرة A بالنسبة لـ N .

6) أحسب الأطوال AB ، AD ، DB ، ثم إستنتج نوع المثلث ABD .

7) عين E مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABD .

8) إستنتج المسافة EN .

التمرين رقم 18 :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

نعتبر النقط : $A\left(3;-1\right)$ ، $B\left(1;\alpha\right)$ ، $C\left(-1;2\right)$ حيث α عدد حقيقي .

1) عين العدد الحقيقي α حتى تكون النقط A ، B ، C في إستقامية .

2) عين إحداثيي النقطة D حتى يكون الرباعي $AOCD$ متوازي أضلاع .

- عين عندئذ طبيعة المثلث OCD .

3) عين العدد الحقيقي α حتى يكون معامل توجيه المستقيم $\left(BC\right)$ هو 2 .

4) عين العدد الحقيقي α حتى يكون المستقيم $\left(BC\right)$ يوازي المستقيم الذي معادلته : $y=\frac{1}{2}x-3$

التمرين رقم 19 :

ABC مثلث قائم في A حيث : $AB=8cm$ و $AC=4cm$.

1) أنشئ النقط L و K حيث : $\overrightarrow{AL}=\frac{5}{4}\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AK}=-\frac{5}{2}\overrightarrow{AC}$.

2) أحسب $\left\|\overrightarrow{AK}\right\|$ و $\left\|\overrightarrow{AL}\right\|$ ثم إستنتج $\left\|\overrightarrow{KL}\right\|$.

3) M نقطة من المستوي تحقق العلاقة :

$$-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$$

أ- عبر عن الشعاع $\overrightarrow{AM}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ثم أنشئ النقطة M .

ب- إستنتج أن : $\overrightarrow{AM}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AL}-\frac{1}{5}\overrightarrow{AK}$.

التمرين رقم 20 :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

و لتكن $\left(\Delta_m\right)$ مجموعة النقط $M\left(x;y\right)$ من المستوي التي تحقق :

$mx+\left(m-1\right)y+2=0$ حيث m عدد حقيقي .

1) بين أن من أجل كل عدد حقيقي m فإن : $\left(\Delta_m\right)$ مستقيم .

2) بين أن النقطة $A\left(-2;2\right)$ تنتمي إلى المستقيم $\left(\Delta_m\right)$ من أجل كل عدد حقيقي m .

3) عين قيمة العدد m حتى تكون النقطة $B\left(1;1\right)$ تنتمي إلى المستقيم $\left(\Delta_m\right)$.

4) نفرض أن $m\neq 1$: عين معامل توجيه المستقيم $\left(\Delta_m\right)$.

5) عين قيمة العدد m حتى يكون المستقيم $\left(\Delta_m\right)$ يوازي المستقيم $\left(d\right)$ ذو المعادلة :

$$10x+8y+5=0$$

6) أرسم المستقيمات : $\left(\Delta_0\right)$ ، $\left(\Delta_1\right)$ ، $\left(\Delta_2\right)$ في نفس المعلم .

يقول الشاعر :

ما كل ما يتمناه المرء يدركه

تجري الرياح بما لا تشتهي السفن

حل التمرين رقم 01 :

1) حساب مركبتي كل شعاع :

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\-6\end{pmatrix}$

2) حساب مركبتي الشعاع : $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}$

نضع $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}=\vec{w}$ فنجد : $\vec{w}\begin{pmatrix}-3\\-6\end{pmatrix}$

3) تعيين العدد α حتى يكون الشعاعان $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطين خطيا :

لدينا : $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}2\\\alpha+1\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\-6\end{pmatrix}$

إذن حتى يكون الشعاعان $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطين خطيا يكفي أن يتحقق : $-3(\alpha+1)+6\times 2=0$ أي

$-3\alpha+9=0$ و منه نجد : $\alpha=3$

حل التمرين رقم 02 :

1) تعيين قيمة α حتى تكون النقطة B منتصف $[AC]$:

النقطة B منتصف $[AC]$ معناه :

$x_B=\alpha=\dfrac{x_A+x_C}{2}=\dfrac{-5+3}{2}$ و منه $\alpha=-1$

2) تعيين α حتى يكون الشعاع $\overrightarrow{AB}$ موازيا للشعاع $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$:

لدينا : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\alpha+5\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$

من الشرط : $2(\alpha+5)-0\times\dfrac{1}{2}=0$ نجد :

$\alpha=-5$.

3) تعيين إحداثيي النقطة D بحيث :

$2\overrightarrow{DA}+3\overrightarrow{DC}=\vec{0}$.

نضع : $D(x_D\,;y_D)$ و منه يكون :

$2\begin{pmatrix}-5-x_D\\1-y_D\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}3-x_D\\2-y_D\end{pmatrix}=\vec{0}$ و منه :

$\begin{cases}-1-5x_D=0\\8-5y_D=0\end{cases}$ أي : $\begin{cases}x_D=-\dfrac{1}{5}\\y_D=\dfrac{8}{5}\end{cases}$

فنجد : $D\left(-\dfrac{1}{5};\dfrac{8}{5}\right)$

حل التمرين رقم 03 :

1) كتابة معادلة للمستقيم (AC) :

لدينا : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}m-2\\5\end{pmatrix}$ ، إذن تكون نقطة $M(x;y)$ تنتمي إلى المستقيم (AC) إذا و فقط إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AM}$ مرتبطين خطيا أي :

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}m-2\\5\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y+3\end{pmatrix}$ مرتبطين خطيا

فنجد : $5(x-2)-(m-2)(y+3)=0$ أي :

. $5x-(m-2)y-3m-4=0$

2) تعيين قيم m حتى تكون $B\in(AC)$:

$B\in(AC)$ معناه :

أي $5x_B-(m-2)y_B-3m-4=0$

أي $-5-\frac{3}{2}m+3-3m-4=0$

و منه نجد $-6-\frac{9}{2}m=0$: $m=-\frac{4}{3}$

3) تعيين قيم m بحيث يكون المستقيم (AC) يوازي حامل محور التراتيب :

يكون المستقيم (AC) يوازي حامل محور التراتيب من أجل : $m-2=0$ أي $m=2$ و في هذه الحالة نجد : $5x-3\times2-4=0$ أي : $x=2$.

4) تعيين قيم m بحيث يكون معامل توجيه المستقيم (AC) يساوي 1 :

إنطلاقا من المعادلة الديكارتية $5x-(m-2)y-3m-4=0$ نجد :

من أجل $m\neq 2$: $y=\frac{5}{m-2}x-\frac{3m+4}{m-2}$

إذن معامل توجيه المستقيم (AC) يساوي 1 معناه :

$\frac{5}{m-2}=1$ أي $m-2=5$ و منه $m=7$.

5) كتابة معادلة للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة I منتصف $[AB]$ و يوازي الشعاع $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$:

$I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ أي : $I\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$

إذن $M(x;y)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ) إذا و فقط إذا كان الشعاعان $\vec{v}$ و $\overrightarrow{IM}$ مرتبطين خطيا أي :

$\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix}x-\frac{1}{2}\\y+\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ مرتبطين خطيا فنجد :

$5\left(x-\frac{1}{2}\right)+2\left(y+\frac{3}{2}\right)=0$ أي :

. $5x+2y+\frac{1}{2}=0$

<u>حل التمرين رقم 04 :</u>

1) تبيان أن : $B(-2;-1)$ و $C(-2;5)$:

من العلاقة الشعاعية $\overrightarrow{OA}=2\vec{i}+\vec{j}$ نكتب :

$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ أي $\begin{pmatrix}x_A-0\\y_A-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ و منه ينتج :

$\begin{cases}x_A=2\\y_A=1\end{cases}$ أي $A(2;1)$. و من العلاقة الشعاعية

$\overrightarrow{AB}=-4\vec{i}-2\vec{j}$ نكتب $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$ أي

$\begin{cases}x_B-x_A=-4\\y_B-y_A=-2\end{cases}$ أي $\begin{cases}x_B-2=-4\\y_B-1=-2\end{cases}$ و منه ينتج

$B(-2;-1)$. و لدينا : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix}$ أي

أي $\begin{cases} x_C - x_A = -4 \\ y_C - y_A = 4 \end{cases}$ و منه ينتج $\begin{cases} x_C - 2 = -4 \\ y_C - 1 = 4 \end{cases}$

$C(-2;5)$.

2) برهان أن النقط B ، A ، O في إستقامية :

يكفي إثبات مثلا أن الشعاعين $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ مرتبطان خطيا : $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

و بما أن : $2\times(-1)-1\times(-2)=0$ فإن الشعاعين $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ مرتبطان خطيا ؛ إذن النقط B ، A ، O في إستقامية .

3) تعيين إحداثيي النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع ثم تعيين إحداثيي مركزه I

يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع إذا و فقط إذا كان $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ حيث : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ و

$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} -2-x_D \\ 5-y_D \end{pmatrix}$ و منه بالمساواة نتحصل على :

$-2-x_D=-4$ و $5-y_D=-2$ و منه نجد :

أي : $\begin{cases} x_D = 2 \\ y_D = 7 \end{cases}$ $D(2;7)$

I مركز متوازي الأضلاع $ABCD$ و منه I هي نقطة تقاطع قطريه أي أن I هي منتصف $[AC]$ و هي منتصف $[BD]$:

أي $\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_C}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_C}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x_I = \dfrac{2-2}{2} \\ y_I = \dfrac{1+5}{2} \end{cases}$ و منه نجد :

$I(0;3)$.

4) ليكن (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطتين A و C

أ- تعيين معامل توجيه المستقيم (Δ) ثم كتابة معادلة له

: للمستقيم (Δ) معادلة من الشكل : $y=ax+b$

حيث : $a=\dfrac{y_C-y_A}{x_C-x_A}$ أي $a=\dfrac{5-1}{-2-2}$ و

منه معامل توجيه المستقيم (Δ) هو : $a=-1$

بما أن $A\in(\Delta)$ فإن $y_A=-x_A+b$ أي

$1=-2+b$ و منه نجد : $b=3$

إذن المعادلة هي : $(\Delta):\ y=-x+3$

ب- تعيين إحداثيي M نقطة تقاطع المستقيم (Δ) مع حامل محور الفواصل :

لما يتقاطع المستقيم (Δ) مع حامل محور الفواصل فإن $y=0$ و منه ينتج $-x+3=0$ أي $x=3$

إذن نتحصل على : $M(3;0)$

<u>حل التمرين رقم 05</u> :

1) تعيين إحداثيي النقطتين B و C ثم تعليم النقط A و B و C :

من العلاقة الشعاعية $\overrightarrow{OA}=-\vec{i}-\vec{j}$ نكتب :

أي $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$ و منه ينتج : $\begin{pmatrix}x_A-0\\y_A-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$

$\begin{cases}x_A=-1\\y_A=-1\end{cases}$ أي $A(-1;-1)$. و من العلاقة

الشعاعية $\overrightarrow{OB}=2\vec{i}+6\vec{j}$ نكتب $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$ أي

$\begin{pmatrix}x_B-0\\y_B-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$ و منه ينتج $\begin{cases}x_B=2\\y_B=6\end{cases}$ أي

$B(2;6)$. و لدينا : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$ أي

$\begin{cases}x_C-x_A=6\\y_C-y_A=0\end{cases}$ أي $\begin{cases}x_C+1=6\\y_C+1=0\end{cases}$ و منه ينتج

$\begin{cases}x_C=5\\y_C=-1\end{cases}$ أي $C(5;-1)$.

2) أ- حساب الأطوال AB ، AC و BC :

$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$ أي :

$AB=\sqrt{3^2+7^2}$ أي $AB=\sqrt{58}$.

$AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}$ أي :

$AC=\sqrt{6^2+0^2}$ أي $AC=6$.

$BC=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}$ أي :

$BC=\sqrt{9+49}$ أي $BC=\sqrt{58}$.

ب- إستنتاج نوع المثلث ABC :

بما أن $AB=BC$ فإن المثلث ABC متساوي الساقين في الرأس B .

3) حساب إحداثيي النقطة N منتصف $[BC]$:

$\begin{cases}x_N=\dfrac{x_B+x_C}{2}\\ y_N=\dfrac{y_B+y_C}{2}\end{cases}$ أي $\begin{cases}x_N=\dfrac{2+5}{2}\\ y_N=\dfrac{6-1}{2}\end{cases}$ و منه :

$N\left(\dfrac{7}{2};\dfrac{5}{2}\right)$.

4- تعيين إحداثيي النقطة M المعرفة بالعلاقة :

$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{OC}$ ثم إنشاؤها :

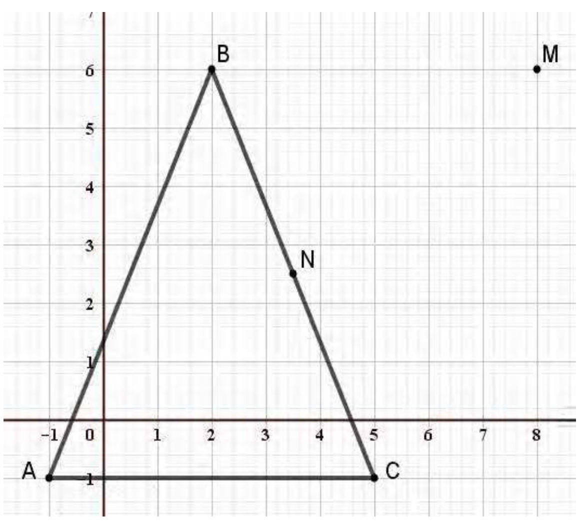
من العلاقة الشعاعية $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{OC}$

نكتب :

$$\begin{pmatrix}x_M-0\\y_M-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_C-x_A\\y_C-y_A\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}x_B-x_N\\y_B-y_N\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_C-0\\y_C-0\end{pmatrix}$$

أي $\begin{cases}x_M=5+1+2\left(2-\dfrac{7}{2}\right)+5\\ y_M=-1+1+2\left(6-\dfrac{5}{2}\right)-1\end{cases}$ أي :

$M(8;6)$.



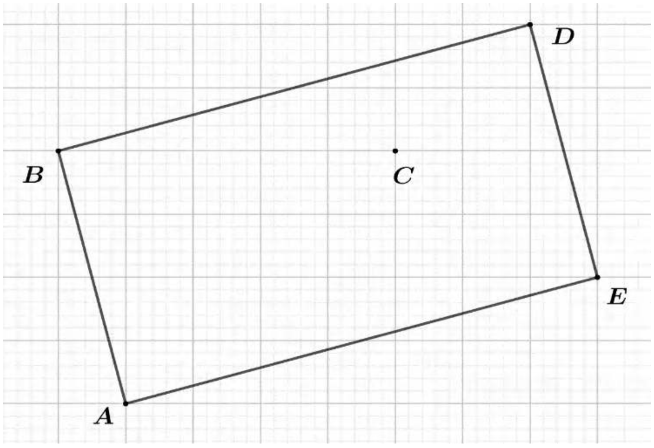
حل التمرين رقم 06 :

1) تعليم النقطة D بحيث : $\overrightarrow{DA}-3\overrightarrow{DC}=\vec{0}$

$\overrightarrow{DA}-3\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ معناه $\overrightarrow{DA}=3\overrightarrow{DC}$ أي أن الشعاعين $\overrightarrow{DA}$ و $\overrightarrow{DA}$ لهما نفس الإتجاه و نفس المنحى بحيث $DA=3DC$.

2) تعليم النقطة E بحيث : $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}$

نعلم النقطة E بحيث يكون الرباعي $AEDB$ متوازي أضلاع .



3) البرهان أن $AEDB$ متوازي أضلاع :

بما أن $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}$ و بكتابة $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}$ (علاقة شال) نتحصل على :

$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}$ أي $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BD}$ (شعاعان متقابلان متساويان) و منه فالرباعي $AEDB$ متوازي أضلاع .

4) البرهان أنه من أجل كل نقطة M من المستوي لدينا : $\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MC}=-2\overrightarrow{MD}$

باستخدام علاقة شال : $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DA}$ و كذلك $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}$ نجد :

$$\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DA}-3\overrightarrow{MD}-3\overrightarrow{DC}$$

أي $\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MC}=-2\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DA}-3\overrightarrow{DC}$ و من السؤال 1) نعلم أن : $\overrightarrow{DA}-3\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ إذن نجد $\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MC}=-2\overrightarrow{MD}$ و هو المطلوب .

5) ليكن O مركز متوازي الأضلاع $AEDB$.

البرهان أن : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AO}$

بما أن $AEDB$ متوازي أضلاع فإن $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}$ ؛ ليكن O مركز متوازي الأضلاع $AEDB$ و منه النقطة O منتصف القطعة $[AD]$ أي أن : $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AO}$

فينتج : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AO}$

حل التمرين رقم 07 :

1) تعيين α حتى تكون النقط B ، A ، O في إستقامية :

تكون النقط B ، A ، O في إستقامية إذا و فقط إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ مرتبطين خطيا حيث :

$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} x_A-x_O \\ y_A-y_O \end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} x_B-x_O \\ y_B-y_O \end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \end{pmatrix}$

من شرط الإرتباط الخطي ينتج :

$2\times(-1)-3\alpha=0$ و منه نجد : $\alpha=-\frac{2}{3}$

2) نعتبر أن : $\alpha=2$

تعيين إحداثيي النقطة D حتى يكون الرباعي

$ABCD$ متوازي أضلاع :

يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع إذا و فقط إذا كان $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ حيث :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix} \text{ أي } \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}x_C-x_D\\y_C-y_D\end{pmatrix} \text{ أي } \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}3-x_D\\2-y_D\end{pmatrix} \text{ إذن}$$

بالمساواة نجد : $\begin{cases}3-x_D=0\\2-y_D=-4\end{cases}$ أي $D(3;6)$.

3) نعتبر النقطة $E\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right)$.

نبين أن النقطة E هي مركز متوازي الأضلاع $ABCD$:

يكفي أن نبين أن E هي نقطة تلاقي قطري متوازي الأضلاع $ABCD$ أي نبين أن E هي منتصف القطعتين $[AC]$ و $[BD]$:

نفرض I منتصف القطعة $[AC]$ إذن :

$$\begin{cases}x_I=\dfrac{x_A+x_C}{2}\\y_I=\dfrac{y_A+y_C}{2}\end{cases} \text{ أي } \begin{cases}x_I=\dfrac{2+3}{2}\\y_I=\dfrac{3+2}{2}\end{cases} \text{ أي}$$

$I\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right)$ أي أن I منطبقة على E .

نفرض J منتصف القطعة $[BD]$ إذن :

$$\begin{cases}x_J=\dfrac{x_B+x_D}{2}\\y_J=\dfrac{y_B+y_D}{2}\end{cases} \text{ أي } \begin{cases}x_J=\dfrac{2+3}{2}\\y_J=\dfrac{-1+6}{2}\end{cases} \text{ أي}$$

$J\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right)$ أي أن J منطبقة على E .

إذن ينتج أن E هي نقطة تقاطع القطرين و منه E هي مركز متوازي الأضلاع $ABCD$.

4) أ- كتابة معادلة للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A و يوازي المستقيم (BC) :

تكون النقطة $M(x;y)\in(\Delta)$ إذا و فقط إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{BC}$ مرتبطين خطيا ($\overrightarrow{BC}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ)) بحيث :

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y-3\end{pmatrix} \text{ و } \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3-2\\2+1\end{pmatrix} \text{ أي } \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

من شرط الإرتباط الخطي نجد :

$3(x-2)-1(y-3)=0$ أي :

$$(\Delta):\ 3x-y-3=0$$

<u>**طريقة 2**</u> : نعلم أن المعادلة الديكارتية للمستقيم (Δ) تكون من الشكل : $ax+by+c=0$

حيث : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ شعاع توجيه لـ (Δ) ؛ لكن لدينا $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ و منه بالمطابقة نجد : $\begin{cases}-b=1\\a=3\end{cases}$ أي :

$a=3$ و $b=-1$ و منه تصبح المعادلة الديكارتية

من الشكل : $3x-y+c=0$ و من الشرط

$A\in(\Delta)$ ينتج : $3x_A-y_A+c=0$ أي

$3\times2-3+c=0$ و منه نجد : $c=-3$

نتيجة : $(\Delta):\ 3x-y-3=0$

ب- تعيين إحداثيي N نقطة تقاطع (Δ) مع حامل محور الفواصل :

لما يتقاطع (Δ) مع حامل محور الفواصل يكون $y=0$ و منه ينتج : $3x-0-3=0$ أي $x=1$

نتيجة : نقطة تقاطع (Δ) مع حامل محور الفواصل هي : $N(1;0)$

جـ (Δ') المستقيم الذي معادلته : $y=x+1$ ،

إيجاد إحداثيي نقطة تقاطع (Δ) و (Δ') :

$y=x+1$ و منه $(\Delta'):\ x-y+1=0$

لما يتقاطع (Δ) و (Δ') يكون :

$3x-y-3=x-y+1$ أي

$3x-x-3-1=0$ أي $2x-4=0$ و منه نجد

$x=2$ و بتعويض قيمة x في معادلة (Δ) أو (Δ') نتحصل على : $y=3$

نتيجة : نقطة تقاطع (Δ) مع (Δ') هي $G(2;3)$

حل التمرين رقم 08 :

1) تعيين قيم α حتى تكون النقط A ، B و C في إستقامية :

تكون النقط A ، B ، C في إستقامية إذا و فقط إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطين خطيا حيث :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x_C-x_A\\y_C-y_A\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}\alpha^2+2\\\alpha-2\end{pmatrix}$

من شرط الإرتباط الخطي ينتج :

$3(\alpha-2)+2(\alpha^2+2)=0$ و منه نجد :

$2\alpha^2+3\alpha-2=0$ و بالملاحظة نجد :

$2\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)(\alpha+2)=0$ إذن : $\alpha=-2$ أو

$\alpha=\frac{1}{2}$.

2) كتابة معادلة المستقيم (AB) :

طريقة 1 : المستقيم (AB) يشمل النقطتين A و B

إذن $\overrightarrow{AB}$ شعاع توجيه للمستقيم (AB) حيث :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$

تكون النقطة $M(x;y)\in(AB)$ إذا و فقط إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطين خطيا بحيث :

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+1\\y-2\end{pmatrix}$ ؛ و من شرط الإرتباط الخطي نجد :

$-2(x+1)-3(y-2)=0$ أي :

$(AB):\ -2x-3y+4=0$

طريقة 2 : نعلم أن المعادلة المختصرة للمستقيم (AB) تكتب من الشكل : $y = ax + b$ حيث a معامل التوجيه يحسب كما يلي :

$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0-2}{2+1}$ أي $a = -\frac{2}{3}$

فيكون إذن : $y = -\frac{2}{3}x + b$ ؛ و بما أن $A \in (AB)$ فإن : $y_A = -\frac{2}{3}x_A + b$ أي :

$2 = -\frac{2}{3} \times (-1) + b$ و منه نجد $b = \frac{4}{3}$

إذن : $y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$ و هي المعادلة المختصرة (المبسطة) للمستقيم (AB) .

3) كتابة معادلة المستقيم (Δ) الذي معامل توجيهه 2 و يشمل النقطة $I(1;5)$:

معناه المعادلة المختصرة (المبسطة) للمستقيم (Δ) هي من الشكل : $y = 2x + b$ ($a = 2$)

و بما أن $I(1;5) \in (\Delta)$ فإن : $y_I = 2x_I + b$ أي $5 = 2 \times 1 + b$ و منه نجد : $b = 3$

إذن : $(\Delta):\ y = 2x + 3$

4) تعيين $(AB) \cap (\Delta)$:

و منه عند التقاطع نجد : $\begin{cases} y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} \\ y = 2x + 3 \end{cases}$

أي : $-\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} = 2x + 3$

و $-\frac{2}{3}x - 2x = 3 - \frac{4}{3}$ أي $-\frac{8}{3}x = \frac{5}{3}$

منه $x = -\frac{5}{8}$ ؛ و بتعويض قيمة x في معادلة (Δ) مثلا نتحصل على : $y = \frac{7}{4}$

إذن نقطة تقاطع (AB) و (Δ) هي $I\left(-\frac{5}{8};\frac{7}{4}\right)$

حل التمرين رقم 09 :

1) إيجاد أطوال أضلاع المثلث ABC :

$$\begin{cases} AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{8} \\ AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{8} \\ BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = 4 \end{cases}$$

إستنتاج نوعه : بما أن $AB = AC$ فإن المثلث ABC متساوي الساقين ذو الرأس A ، و من جهة أخرى : $AB^2 + AC^2 = 16 = BC^2$ و منه حسب نظرية فيثاغورس فإن المثلث ABC قائم في A .

إذن ينتج أن المثلث ABC قائم و متساوي الساقين في A .

2) تعيين قيمة α حتى تكون النقط A ، B و $D(\alpha;\alpha+1)$ في إستقامة واحدة :

تكون النقط A ، B ، D في إستقامية إذا و فقط إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$ مرتبطين خطيا حيث :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} x_D - x_A \\ y_D - y_A \end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} \alpha - 1 \\ \alpha + 1 \end{pmatrix}$

من شرط الإرتباط الخطي ينتج :

$2(\alpha+1)+2(\alpha-1)=0$ و منه نجد :

$4\alpha=0$ أي $\alpha=0$ فينتج : $D(0;1)$

3) نبين أن الرباعي $ABEC$ مربع :

نعلم أن كل مربع هو متوازي أضلاع فيه زاوية قائمة و ضلعان متتاليان متقايسان :

نبين أن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CE}$:

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix} x_E-x_C \\ y_E-y_C \end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

إذن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CE}$ (شعاعان متقابلان متساويان) و منه فالرباعي $ABCE$ متوازي أضلاع .

و مما سبق نعلم أن المثلث ABC قائم و متساوي الساقين في A ؛ إذن متوازي الأضلاع $ABCE$ فيه زاوية قائمة و ضلعان متتاليان متقايسان فهو مربع .

4) أ- إيجاد معادلة المستقيم (Δ_1) الذي يشمل B و يوازي (AC) :

الشعاع $\overrightarrow{AC}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ_1) حيث :

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C-x_A \\ y_C-y_A \end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

تكون النقطة $M(x;y)\in(\Delta_1)$ إذا و فقط إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطين خطيا بحيث :

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}$ ؛ و من شرط الإرتباط الخطي نجد :

$2(x-1)-2y=0$ أي :

$(\Delta_1):\ 2x-2y-2=0$

ب- إيجاد إحداثيي نقطتي تقاطع (Δ_1) مع محوري الإحداثيات :

مع حامل محور الفواصل (xx') :

نضع $y=0$: و منه نجد $2x-2\times0-2=0$

أي $x=1$ و منه نقطة التقاطع هي : $A(1;0)$

مع حامل محور التراتيب (yy') :

نضع $x=0$: و منه نجد $2\times0-2y-2=0$

أي $y=-1$ و منه نقطة التقاطع هي : $N(0;-1)$

5) كتابة معادلة المستقيم (Δ_2) الذي يمر بالنقطة O و يوازي المستقيم ذو المعادلة : $3x+2y+1=0$

- المستقيم (Δ_2) يوازي المستقيم ذو المعادلة : $3x+2y+1=0$ معناه شعاع توجيه للمستقيم ذو المعادلة : $3x+2y+1=0$ هو أيضا شعاع توجيه لـ (Δ_2) إذن : $\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ_2) ؛ و بما أن $O\in(\Delta_2)$ فإنه :

تكون النقطة $M(x;y)\in(\Delta_2)$ إذا و فقط إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{OM}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا بحيث :

$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ؛ و من شرط الإرتباط الخطي نجد :

$(\Delta_2) : 3x+2y=0$ و هي المعادلة الديكارتية للمستقيم (Δ_2) (المعادلة المختصرة هي

$(\Delta_2) : \ y=-\frac{3}{2}x$.

6) إيجاد إحداثيي نقطة تقاطع (Δ_1) و (Δ_2) :

إحداثيي نقطة تقاطع (Δ_1) و (Δ_2) هي حل جملة المعادلتين :

$$\begin{cases} 2x-2y-2=0 \\ 3x+2y=0 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} 2x-2y=2 \\ 3x+2y=0 \end{cases}$$

و بجمع المعادلتين مثلا نتحصل على : $5x=2$

أي $x=\frac{2}{5}$ ؛ و بتعويض قيمة x في المعادلة -1-

مثلا نجد : $2\times\frac{2}{5}-2y=2$ أي $y=-\frac{3}{5}$

نقطة تقاطع (Δ_1) و (Δ_2) هي $I\left(\frac{2}{5};-\frac{3}{5}\right)$.

حل التمرين رقم 10 :

1) تعيين إحداثيي النقطة C ، ثم تعليم النقط A ، B و C :

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C-x_A \\ y_C-y_A \end{pmatrix} \text{ أي } \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C-2 \\ y_C+2 \end{pmatrix}$$

و بالمساواة مع $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ نتحصل على :

$\begin{cases} x_C-2=-6 \\ y_C+2=2 \end{cases}$ ؛ إذن : $\begin{cases} x_C=-4 \\ y_C=0 \end{cases}$ أي

$C(-4;0)$.

من العلاقة الشعاعية $\overrightarrow{OB}=-3\vec{i}-5\vec{j}$ ينتج

$\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$ و بالتالي : $B(-3;-5)$.

2) تعيين إحداثيي النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع :

يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع إذا و فقط إذا كان $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ حيث :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix} \text{ أي } \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} x_C-x_D \\ y_C-y_D \end{pmatrix} \text{ أي } \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} -4-x_D \\ -y_D \end{pmatrix} \text{ إذن}$$

بالمساواة نجد : $\begin{cases} -4-x_D=-5 \\ -y_D=-3 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x_D=1 \\ y_D=3 \end{cases}$

و منه نجد $D(1;3)$.

3) لتكن M منتصف القطعة $[BC]$ و النقطة N التي تحقق العلاقة الشعاعية : $\overrightarrow{DM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DN}$

أ- إستنتاج أن النقط D ، M و N في إستقامية :

من العلاقة الشعاعية $\overrightarrow{DM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DN}$ ينتج أن

الشعاعين $\overrightarrow{DM}$ و $\overrightarrow{DN}$ مرتبطان خطيا لأنه يوجد

عدد حقيقي $k=\frac{3}{2}$ بحيث $\overrightarrow{DM}=k\overrightarrow{DN}$ و منه

نستنتج أن النقط D ، M و N في إستقامية .

ب- تعيين إحداثيي النقطة N :

نعين أولا إحداثيي M منتصف القطعة $[BC]$:

$$\begin{cases} x_M=\dfrac{x_B+x_C}{2} \\ y_M=\dfrac{y_B+y_C}{2} \end{cases}$$ أي $$\begin{cases} x_M=\dfrac{-3-4}{2} \\ y_M=\dfrac{-5+0}{2} \end{cases}$$ أي

$M\left(-\frac{7}{2};-\frac{5}{2}\right)$.

و من العلاقة الشعاعية $\overrightarrow{DM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DN}$ ينتج أن :

$$\begin{cases} -\dfrac{7}{2}-1=\dfrac{3}{2}(x_N-1) \\ -\dfrac{5}{2}-3=\dfrac{3}{2}(y_N-3) \end{cases}$$ أي $$\begin{cases} x_N=-2 \\ y_N=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$$ أي

$N\left(-2;-\frac{2}{3}\right)$.

4) كتابة معادلة للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة B و يوازي المستقيم (AC) :

بما أن $(\Delta)\parallel(AC)$ فإن الشعاع $\overrightarrow{AC}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ) حيث :

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-6\\2\end{pmatrix}$ (معطى في التمرين)

تكون النقطة $M(x;y)\in(\Delta)$ إذا و فقط إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{BM}$ (لأن (Δ) يشمل النقطة B) و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطين خطيا بحيث :

$\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x+3\\y+5\end{pmatrix}$ ؛ و من شرط الإرتباط الخطي نجد :

$2(x+3)+6(y+5)=0$ أي :

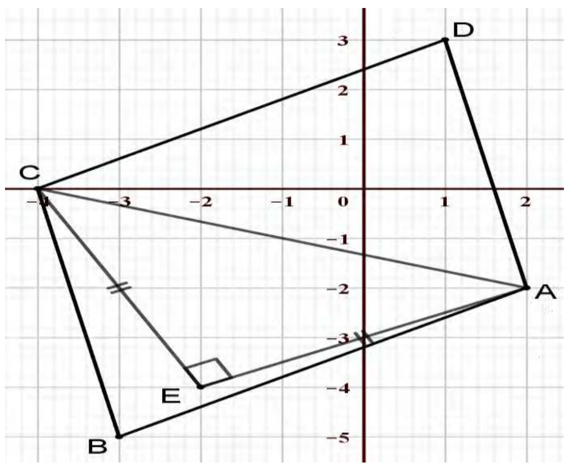
$$(\Delta):\ 2x+6y+36=0$$

5) لتكن النقطة $E(-2;-4)$. حساب أطوال أضلاع المثلث ACE ثم إستنتاج طبيعته :

$$\begin{cases} AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=\sqrt{40} \\ AE=\sqrt{(x_E-x_A)^2+(y_E-y_A)^2}=\sqrt{20} \\ EC=\sqrt{(x_C-x_E)^2+(y_C-y_E)^2}=\sqrt{20} \end{cases}$$

إستنتاج نوعه : بما أن $AE=EC$ فإن المثلث ACE متساوي الساقين ذو الرأس E ، و من جهة أخرى : $AE^2+EC^2=40=AC^2$ و منه حسب نظرية فيثاغورس فإن المثلث ACE قائم في E .

إذن ينتج أن المثلث ACE قائم و متساوي الساقين في E .



حل التمرين رقم 11 :

1) تعليم النقط A ، B و C :

2) حساب أطوال أضلاع المثلث ABC ثم تحديد طبيعته :

$$\begin{cases} AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}=\sqrt{2} \\ AC=\sqrt{\left(x_C-x_A\right)^2+\left(y_C-y_A\right)^2}=\sqrt{8} \\ BC=\sqrt{\left(x_C-x_B\right)^2+\left(y_C-y_B\right)^2}=\sqrt{10} \end{cases}$$

بما أن $AB^2+AC^2=10=BC^2$ و منه حسب نظرية فيثاغورس فإن المثلث ABC قائم في A .

3) حساب معامل توجيه المستقيم (AB) ثم كتابة معادلة له :

بما أن $A\in(AB)$ و $B\in(AB)$ فإن المعادلة المبسطة (المختصرة) للمستقيم (AB) التي من الشكل : $y=ax+b$ حيث a معامل التوجيه يحسب كما يلي :

$a=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{2-1}{3-2}=1$ و منه تصبح المعادلة

من الشكل : $y=x+b$ ؛ نعين b من الشرط $A\in(AB)$ مثلا فنجد : $y_A=x_A+b$ أي $1=2+b$ و منه $b=-1$ ؛ إذن نتحصل على :

$y=x-1$ و هي المعادلة المبسطة للمستقيم (AB)

4) نعتبر النقطة $F(-1;\alpha)$.

تحديد قيمة α حتى تكون النقط A ، B ، F في إستقامية :

تكون النقط A ، B ، F في إستقامية إذا و فقط إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AF}$ مرتبطين خطيا حيث :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix} x_F-x_A \\ y_F-y_A \end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix} -3 \\ \alpha-1 \end{pmatrix}$

من شرط الإرتباط الخطي ينتج :

$1(\alpha-1)-1\times(-3)=0$ أي $\alpha+2=0$ و منه نجد : $\alpha=-2$

فينتج إذن : $F(-1;-2)$

5) رسم المستقيم (Γ) الذي معادلته : $y=5x+3$

عادة نستعمل جدولا مساعدا :

x	0	-1
y	3	-2

6) تحديد نقطة تقاطع المستقيمين (Γ) و (AB) بيانيا

من خلال الشكل نجد : $I(-1;-2)$

II- نعتبر جملة المعادلتين (S) التالية :

$$(S)\quad \begin{cases} x-y=1 \\ 5x-y=-3 \end{cases}$$

1) التحقق أن الجملة (S) تقبل حلا وحيدا :

نحسب المحدد Δ فنجد : $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}=4\neq 0$

إذن الجملة (S) تقبل حلا وحيدا .

2) حل الجملة (S) :

نستعمل طريقة الجمع :

نضرب المعادلة الأولى في -1 ثم نجمع مع المعادلة الثانية لنجد : $-x+5x=-1-3$ أي $4x=-4$

و منه $x=-1$ ؛ لإيجاد قيمة y يكفي أن نعوض قيمة x في المعادلة الأولى : $-1-y=1$ أي $y=-2$

إذن للجملة (S) حل وحيد هو :

$(\alpha;\beta)=(-1;-2)$.

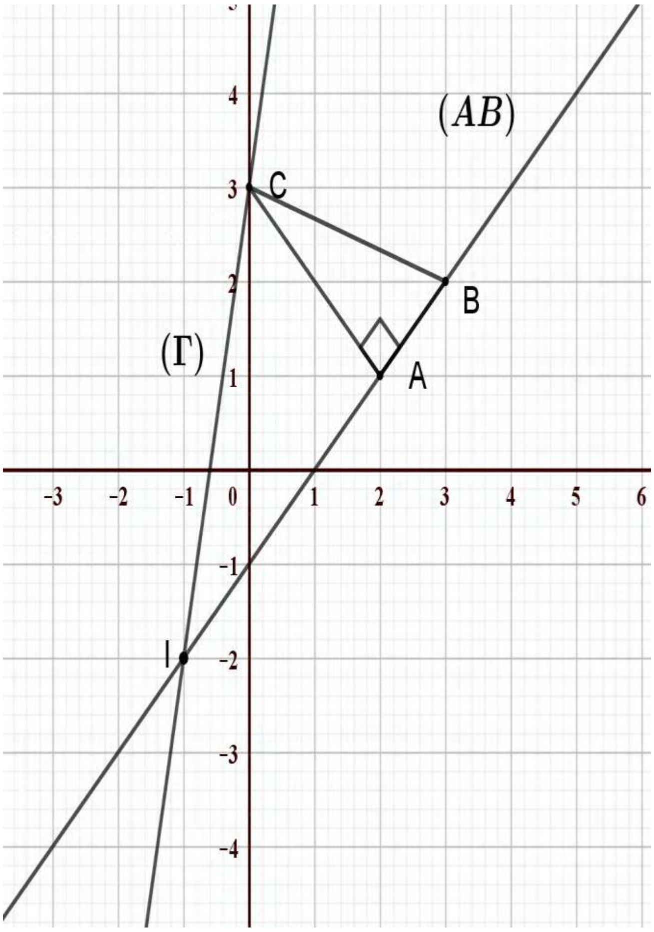
<u>التفسير الهندسي :</u>

نكتب الجملة $\begin{cases} x-y=1 \\ 5x-y=-3 \end{cases}$ من الشكل :

$\begin{cases} x-y-1=0 \\ 5x-y+3=0 \end{cases}$ و هي نفسها المعادلتين

الديكارتيتين للمستقيمين (AB) و (Γ) ؛ إذن حل الجملة (S) يمثل بيانيا إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين (AB) و (Γ) أي إحداثيي النقطة $I(-1;-2)$.

<u>الإنشاء الهندسي :</u>



<u>حل التمرين رقم 12 :</u>

نريد حل جملة المعادلتين (S) التالية :

$$(S)\ \begin{cases} 2z^2-t^2=-1 \\ 3z^2+t^2=21 \end{cases}$$

1) أ- بوضع $z^2=x$ و $t^2=y$ ، كتابة جملة معادلتين (S') تكافئ الجملة (S) :

نتحصل على : $(S')\ \begin{cases} 2x-y=-1 \\ 3x+y=21 \end{cases}$

ب- حل جملة المعادلتين (S') :

<u>طريقة التعويض</u> :

من المعادلة الأولى نستخرج y فنجد : $y=2x+1$

و بالتعويض في المعادلة الثانية نجد :

$21=(2x+1)+3x$ أي $5x=20$ و منه ينتج :

$x=4$ ؛ و لإيجاد قيمة y يكفي تعويض قيمة x في المعادلة الأولى لنجد : $3\times4+y=21$ أي $y=9$

إذن الجملة (S') تقبل حلا وحيدا هو

$(x_0;y_0)=(4;9)$.

2) إستنتاج حلول الجملة (S) :

نعلم أن : $\begin{cases} z^2=x \\ t^2=y \end{cases}$ و من السؤال السابق وجدنا أن

حل الجملة $\begin{cases} 2x-y=-1 \\ 3x+y=21 \end{cases}$ (S') هو $(4;9)$ ؛

إذن لإيجاد حلول الجملة (S) يكفي أن نضع :

$\begin{cases} z^2=4 \\ t^2=9 \end{cases}$ و منه $\begin{cases} \sqrt{z^2}=\sqrt{4} \\ \sqrt{t^2}=\sqrt{9} \end{cases}$ أي $\begin{cases} |z|=2 \\ |t|=3 \end{cases}$ إذن

نتحصل على : $\begin{cases} z=2 \ \vee \ z=-2 \\ t=3 \ \vee \ t=-3 \end{cases}$ و منه الجملة

(S) لها 4 حلول هي الثنائيات :

$$S=\{(2;3),(2;-3),(-2;3),(-2;-3)\}$$

<u>حل التمرين رقم 13 :</u>

❖ إيجاد عدد التلاميذ الذين دعاهم يوسف و إيجاد عدد الطاولات :

نترجم الوضعية إلى معطيات رياضية أو مشكلة رياضية

و ذلك بوضع : x يمثل عدد التلاميذ الذين دعاهم يوسف .

y يمثل عدد الطاولات .

لو يجلس كل 5 تلاميذ حول طاولة فإن 3 منهم لا يجد لهم أماكن للجلوس إذن : $5y+3=x$

لو يجلس كل 6 تلاميذ حول طاولة فإن 4 أماكن تبقى شاغرة إذن : $6y-4=x$

إذن نتحصل على جملة معادلتين لمجهولين :

$$\begin{cases} x-6y=-4 \\ x-5y=3 \end{cases} \quad (S)$$

نتحقق أولا أن الجملة (S) تملك حلا وحيدا :

$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}=1\neq0$ ؛ إذن (S) تملك حلا وحيدا

نعين هذا الحل بطريقة التعويض مثلا :

من المعادلة الأولى نستخرج x فنجد : $x=6y-4$

و بالتعويض في المعادلة الثانية نجد :

$6y-4-5y=3$ و منه ينتج :

$y=7$ ؛ و لإيجاد قيمة x يكفي تعويض قيمة y في المعادلة الأولى لنجد : $x-6\times7=-4$ أي

$x=38$ ؛ إذن الجملة (S) تقبل حلا وحيدا هو :

$(x;y)=(38;7)$ ؛ فيكون عدد التلاميذ الذي دعاهم يوسف هو 38 تلميذ و عدد الطاولات هو 7 طاولات .

<u>حل التمرين رقم 14 :</u>

نعتبر المستقيم (D_1) الذي معادلته : $y=x+1$ و

المستقيم (D_2) الذي معادلته : $y=-x+3$

1) رسم المستقيمين (D_1) و (D_2) :

جدول مساعد لرسم المستقيم (D_1) :

x	0	1
y	1	2

جدول مساعد لرسم المستقيم (D_2) :

x	0	1
y	3	2

2) تعيين معامل توجيه كل من (D_1) و (D_2) :

نسمي a_1 معامل توجيه المستقيم (D_1) و من المعادلة المبسطة $y=x+1$ ينتج : $a_1=1$

نسمي a_2 معامل توجيه المستقيم (D_2) و من المعادلة المبسطة $y=-x+3$ ينتج : $a_2=-1$

3) المستقيمان (D_1) و (D_2) غير متوازيين لأن معاملي توجيههما مختلفين : $a_1 \neq a_2$.

4) هل النقطتان $A(1;1)$ و $B(1;2)$ تنتميان إلى المستقيم (D_1) ؟

النقطة $A(1;1)$ تنتمي إلى المستقيم (D_1) إذا و فقط إذا كان $y_A = x_A + 1$ ؛ لكن بالتعويض : $1 \neq 1+1$

إذن $A \notin (D_1)$.

النقطة $B(1;2)$ تنتمي إلى المستقيم (D_1) إذا و فقط إذا كان $y_B = x_B + 1$ ؛ و بالتعويض : $2=1+1$

إذن $B \in (D_1)$.

هل تنتميان إلى المستقيم (D_2) ؟

النقطة $A(1;1)$ تنتمي إلى المستقيم (D_2) إذا و فقط إذا كان $y_A = -x_A + 3$ ؛ لكن بالتعويض : $1 \neq -1+3$ ؛ إذن $A \notin (D_2)$.

النقطة $B(1;2)$ تنتمي إلى المستقيم (D_2) إذا و فقط إذا كان $y_B = -x_B + 3$ ؛ و بالتعويض : $2=-1+3$ ؛ إذن $B \in (D_2)$.

5) نعتبر الجملة (S) التالية : $\begin{cases} x-y+1=0 \\ x+y-3=0 \end{cases}$

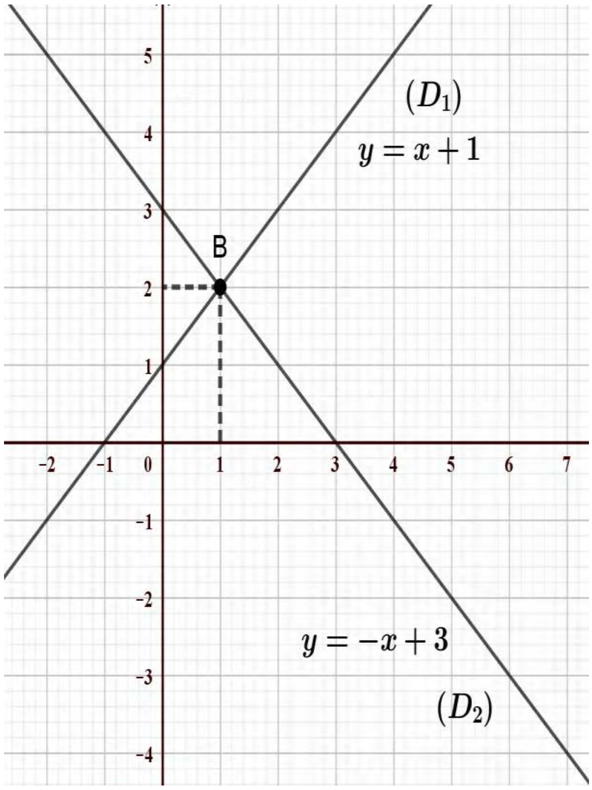
الجملة (S) حلا وحيدا لأن :

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ ؛ إذن (S) تملك حلا وحيدا

تعيين مما سبق حل هذه الجملة :

بدون الخوض في الحل الحسابي و بالرجوع لنمط السؤال (عين مما سبق ..) نلاحظ أن المعادلة $x-y+1=0$ تكافئ $y=x+1$ و هي المعادلة المبسطة للمستقيم (D_1) و نفس الشيء بالنسبة للمعادلة $x+y-3=0$ فهي تكافئ $y=-x+3$ و هي المعادلة المبسطة للمستقيم (D_2) ؛ إذن حل الجملة $\begin{cases} x-y+1=0 \\ x+y-3=0 \end{cases}$ هو إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين (D_1) و (D_2) ؛ لكن مما سبق نعلم أن $B \in (D_1)$ و $B \in (D_2)$ إذن ينتج : $(D_1) \cap (D_2) = \{B\}$

و منه : $(x_0;y_0)=(1;2)$ هو حل الجملة (S) .



تمارين من فروض و إختبارات سابقة :

حل التمرين رقم 15 :

1) أ- حساب مركبتي الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\ y_B-y_A\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x_C-x_A\\ y_C-y_A\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\ -5\end{pmatrix}$

ب- بما أن $1\times(-5)+2\times(-1)=-7\neq 0$ فإن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا و بالتالي النقط A ، B و C ليست في إستقامية .

2) تعيين إحداثيي I منتصف القطعة $[AC]$:

$\begin{cases}x_I=\dfrac{x_A+x_C}{2}\\ y_I=\dfrac{y_A+y_C}{2}\end{cases}$ أي $\begin{cases}x_I=\dfrac{2+1}{2}\\ y_I=\dfrac{1-4}{2}\end{cases}$ و منه

$I\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$.

3) أ- إيجاد معادلة المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة C و $\overrightarrow{AB}$ شعاع توجيه له :

تكون النقطة $M(x;y)\in(\Delta)$ إذا و فقط إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{CM}$ (لأن (Δ) يشمل النقطة C) و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطين خطيا بحيث :

$\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-1\\ y+4\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$ ؛ و من شرط الإرتباط الخطي نجد :

$-2(x-1)-1(y+4)=0$ أي :

$(\Delta):\ -2x-y-2=0$

ب- هل النقطة $D(0;1)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ) ؟

النقطة $D(0;1)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ) إذا و فقط إذا كان $-2x_D-y_D-2=0$ ؛ لكن بالتعويض :

$-2\times0-1-2=-3\neq0$ إذن $D\notin(\Delta)$.

4) إيجاد معادلة المستقيم (Δ_1) الذي يشمل النقطة A و يوازي محور التراتيب :

نعلم أن كل مستقيم يوازي محور التراتيب له معادلة من الشكل : $x=a$ حيث a عدد حقيقي معطى .

بما أن المستقيم $\left(\Delta_1\right)$ يشمل النقطة A و يوازي محور التراتيب فإن معادلة $\left(\Delta_1\right)$ هي : $x=2$ (2 يمثل فاصلة النقطة A) .

5) إيجاد معادلة المستقيم $\left(\Delta_2\right)$ الذي يشمل النقطة A و يوازي محور الفواصل :

نعلم أن كل مستقيم يوازي محور الفواصل له معادلة من الشكل : $y=b$ حيث b عدد حقيقي معطى .

بما أن المستقيم $\left(\Delta_2\right)$ يشمل النقطة A و يوازي محور الفواصل فإن معادلة $\left(\Delta_2\right)$ هي : $y=1$ (1 يمثل ترتيب النقطة A) .

6) تعيين معامل توجيه المستقيم الذي معادلته :

$$5x-3y-2=0$$

قصد تعيين معامل التوجيه ننتقل من المعادلة الديكارتية إلى المعادلة المبسطة (المختصرة) كما يلي :

$5x-3y-2=0$ معناه $-3y=-5x+2$ و منه $y=\frac{5}{3}x-\frac{2}{3}$ و هي المعادلة المبسطة لهذا المستقيم ؛ إذن معامل توجيهه هو : $a=\frac{5}{3}$.

7) نعتبر النقطة $E\left(2x;x\right)$ حيث x عدد حقيقي .

تعيين قيمة x التي من أجلها :

أ- تكون النقط A ، B و E في إستقامية .

تكون النقط A ، B و E في إستقامية إذا و فقط إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AE}$ مرتبطين خطيا حيث :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} x_E-x_A \\ y_E-y_A \end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} 2x-2 \\ x-1 \end{pmatrix}$

و من شرط الإرتباط الخطي نجد :

$1\left(x-1\right)+2\left(2x-2\right)=0$ أي : $5x-5=0$

و منه نجد $x=1$.

ب- يكون المثلث EBA متساوي الساقين في E .

معناه يكون : $EA=EB$ بحيث :

$$\begin{cases} EA=\sqrt{\left(x_A-x_E\right)^2+\left(y_A-y_E\right)^2} \\ EB=\sqrt{\left(x_B-x_E\right)^2+\left(y_B-y_E\right)^2} \end{cases}$$ أي

و منه ينتج $$\begin{cases} EA=\sqrt{\left(2-2x\right)^2+\left(1-x\right)^2} \\ EB=\sqrt{\left(3-2x\right)^2+\left(-1-x\right)^2} \end{cases}$$

$$\sqrt{\left(2-2x\right)^2+\left(1-x\right)^2}=\sqrt{\left(3-2x\right)^2+\left(-1-x\right)^2}$$

و بتربيع الطرفين نجد :

$$\left(2-2x\right)^2+\left(1-x\right)^2=\left(3-2x\right)^2+\left(-1-x\right)^2$$

ثم بالنشر و التبسيط نجد : $10=5$ و هذا مستحيل ...

إذن لا توجد أي قيمة للعدد x بحيث يكون المثلث EBA متساوي الساقين في E .

جـ- يكون : $AE=\sqrt{5}$.

$AE=\sqrt{5}$ معناه :

$\sqrt{\left(2x-2\right)^2+\left(x-1\right)^2}=\sqrt{5}$ و بالتربيع نجد

$(2x-2)^2+(x-1)^2=5$ و بالنشر و التبسيط نجد $5x^2-10x=0$ أي $x(5x-10)=0$ و منه : $x=0$ أو $x=2$

إذن توجد قيمتان للعدد x هما 0 و 2 بحيث يكون $AE=\sqrt{5}$.

8) تعيين إحداثيي النقطة M بحيث :

$$\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{MB}$$

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x_M-x_A \\ y_M-y_A \end{pmatrix} \text{ أي } \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x_M-2 \\ y_M-1 \end{pmatrix}$$

و كذلك $3\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix} 3(3-x_M) \\ 3(-1-y_M) \end{pmatrix}$ ؛ إذن بالمساواة :

$$\begin{cases} x_M-2=9-3x_M \\ y_M-1=-3-3y_M \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x_M=11/4 \\ y_M=-1/2 \end{cases}$$

و منه $M\left(11/4;-1/2\right)$.

9) تعيين إحداثيي النقطة F حتى يكون الرباعي $ABCF$ متوازي أضلاع :

يكون الرباعي $ABCF$ متوازي أضلاع إذا و فقط إذا كان $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{FC}$ حيث :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix} \text{ أي } \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{FC}\begin{pmatrix} x_C-x_F \\ y_C-y_F \end{pmatrix} \text{ أي } \overrightarrow{FC}\begin{pmatrix} 1-x_F \\ -4-y_F \end{pmatrix} \text{ إذن}$$

بالمساواة نجد :

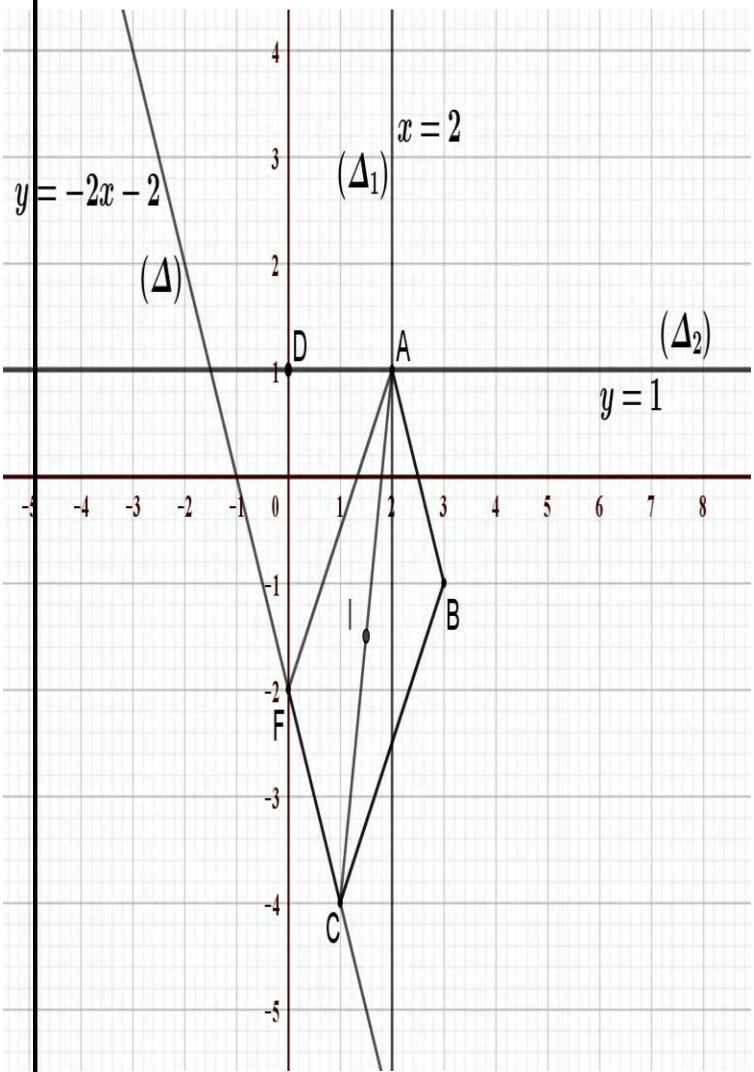
$\begin{cases} 1-x_F=1 \\ -4-y_F=-2 \end{cases}$ و منه نجد $F(0;-2)$.

10) لمعرفة هل المثلث ABC قائم نحسب أطوال أضلاعه كما يلي :

$$\begin{cases} AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{5} \\ AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=\sqrt{26} \\ BC=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}=\sqrt{13} \end{cases}$$

نلاحظ أن : $\begin{cases} AB^2+AC^2\neq BC^2 \\ AC^2+BC^2\neq AB^2 \\ AB^2+BC^2\neq AC^2 \end{cases}$

إذن المثلث ABC ليس قائما .



حل التمرين رقم 16 :

1) التحقق أن الجملة (S) التالية تقبل حلا ثم حل

الجملة (S) : $\begin{cases} x-y=-3 \\ -3x+y=-1 \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ ؛ إذن (S) تملك حلا وحيدا .

نستعمل طريقة الجمع مثلا :

بجمع المعادلتين نتحصل على :

$x-3x-y+y=-3-1$ أي $-2x=-4$ و منه نجد $x=2$ ؛ و لإيجاد قيمة y نعوض قيمة x في المعادلة الأولى مثلا لنجد : $2-y=-3$ و منه ينتج $y=5$ ؛ إذن حل الجملة (S) هو الثنائية $(2;5)$.

2) كتابة معادلة المستقيمين (D_1) و (D_2) حيث :

- المستقيم (D_1) يشمل النقطتين $A(-2;1)$ و $B(2;5)$.

طريقة 1 : البحث عن المعادلة المختصرة (المبسطة)

المستقيم (D_1) معرف بنقطتين ؛ معامل توجيهه a يحسب كما يلي :

$a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{5-1}{2+2} = 1$ ؛ إذن المعادلة المختصرة تصبح من الشكل : $y = x + b$ حيث b ثابت يطلب تعيينه ؛ بما أن $A \in (D_1)$ فإن :

$y_A = x_A + b$ أي $1 = -2 + b$ و منه $b = 3$

إذن : $(D_1) : y = x + 3$.

طريقة 2 : البحث عن المعادلة الديكارتية

بما أن المستقيم (D_1) يشمل النقطتين $A(-2;1)$ و $B(2;5)$ فإن الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو شعاع توجيه لـ (D_1) حيث : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$ ؛ تكون نقطة $M(x;y) \in (D_1)$ إذا و فقط إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطين خطيا حيث $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+2\\y-1\end{pmatrix}$

و من شرط الإرتباط الخطي نجد :

$4(x+2)-4(y-1)=0$ أي :

$4x-4y+12=0$ و بقسمة الطرفين على 4 ينتج :

$(D_1) : x-y+3=0$.

- المستقيم (D_2) يشمل النقطة $C\left(\dfrac{1}{3};0\right)$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ شعاع توجيه له .

تكون نقطة $M(x;y) \in (D_2)$ إذا و فقط إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{CM}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا حيث :

$\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-\dfrac{1}{3}\\ y\end{pmatrix}$ ؛ و من شرط الإرتباط الخطي نجد :

$3\left(x-\dfrac{1}{3}\right)-y=0$ أي :

$(D_2): 3x-y-1=0$ و هي المعادلة الديكارتية .

3) أ- رسم بعناية المستقيمين (D_1) و (D_2) :

جدول مساعد لرسم المستقيم (D_1) :

x	0	-1
y	3	2

جدول مساعد لرسم المستقيم (D_2) :

x	0	1
y	-1	2

2) تعيين معامل توجيه كل من (D_1) و (D_2) :

من المعادلة المختصرة $(D_1): y=x+3$ فإن معامل توجيه المستقيم (D_1) هو $a_1=1$.

من المعادلة الديكارتية $(D_2): 3x-y-1=0$ نكتب $(D_2): y=3x-1$ ؛ إذن معامل توجيه المستقيم (D_2) هو $a_2=3$.

ب- من البيان تعيين نقطة تقاطع (D_1) و (D_2) :

نقطة تقاطع المستقيمين (D_1) و (D_2) هي :

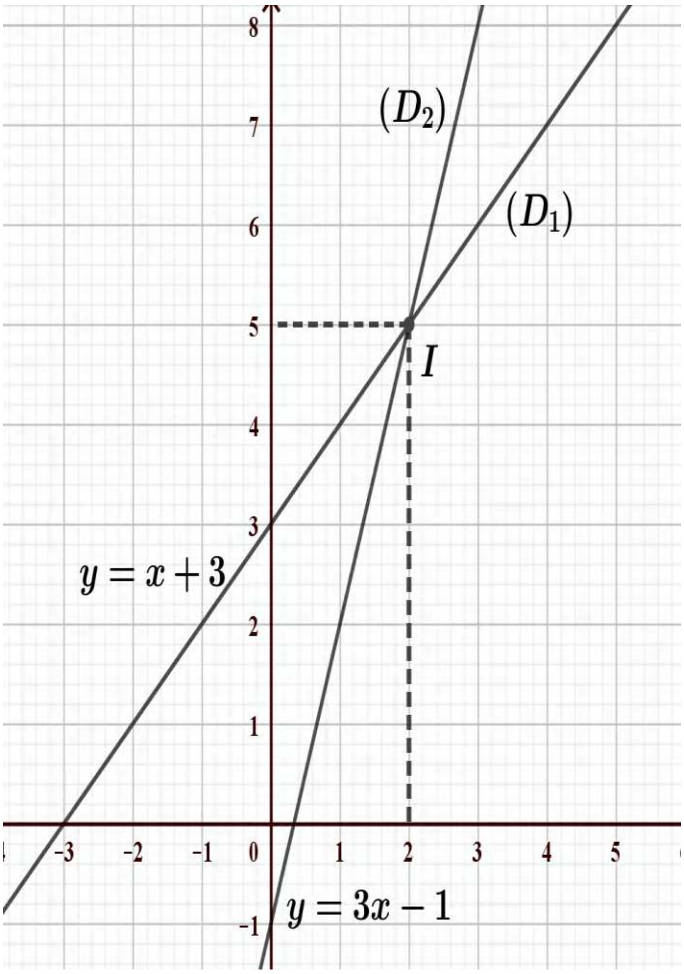
$I(2;5)$.

<u>الإستنتاج</u> : إحداثيي نقطة تقاطع (D_1) و (D_2) هي حل جملة المعادلتين : $\begin{cases} x-y+3=0 \\ 3x-y-1=0 \end{cases}$ أي :

$\begin{cases} x-y=-3 \\ 3x-y=1 \end{cases}$ ؛ و يكفي ضرب المعادلة الثانية في -1 لنتحصل على : $\begin{cases} x-y=-3 \\ -3x+y=-1 \end{cases}$

و هي نفسها الجملة (S) .

إذن الجملة (S) تملك حلا وحيدا هو الثنائية $(2;5)$



<u>حل التمرين رقم 17 :</u>

1) تعليم النقط $A(1;2)$ ، $B(3;0)$ ، $C(-3;-4)$ ، $D(0;1)$:

2) تعيين إحداثيي النقطة M حتى يكون الرباعي $BMCA$ متوازي أضلاع :

يكون الرباعي $BMCA$ متوازي أضلاع إذا و فقط إذا كان $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AC}$ بحيث :

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x_M - x_B \\ y_M - y_B \end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x_M - 3 \\ y_M \end{pmatrix}$ إذن

بالمساواة بين المركبات نتحصل على :

$\begin{cases} x_M - 3 = -4 \\ y_M = -6 \end{cases}$ و منه ينتج : $M(-1;-6)$

3) تعيين معادلة المستقيم (Δ) الذي يشمل A و $\overrightarrow{BC}$

شعاع توجيه له :

تكون نقطة $M(x;y) \in (\Delta)$ إذا و فقط إذا كان

الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{BC}$ مرتبطين خطيا بحيث

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix}$ ؛ إذن من شرط

الإرتباط الخطي نجد :

$-4(x+2)+6(y-1)=0$ أي :

$-4x+6y-14=0$ و بقسمة الطرفين على 2

ينتج : $(\Delta): -2x+3y-7=0$.

4) تعيين إحداثيي نقطة تقاطع المستقيم (Δ) مع حامل

محور الفواصل ، ثم مع حامل محور التراتيب :

مع حامل محور الفواصل (xx') :

نضع $y=0$ و نبحث عن قيمة x :

$-2x+3\times 0-7=0$ و منه $-2x-7=0$ أي

$x=-7/2$ ؛ إذن المستقيم (Δ) يقطع محور

الفواصل في النقطة $E\left(-7/2;0\right)$.

مع حامل محور التراتيب (yy') :

نضع $x=0$ و نبحث عن قيمة y :

$-2\times 0+3y-7=0$ و منه $3y-7=0$ أي

$y=7/3$ ؛ إذن المستقيم (Δ) يقطع محور التراتيب

في النقطة $F\left(0;7/3\right)$.

5) تعيين إحداثيي النقطة N بحيث B هي نظيرة A بالنسبة لـ N :

نعلم أن التناظر المركزي يحفظ المسافات و بالتالي فإن المسافة AN تساوي المسافة BN أي أن النقطة N هي منتصف القطعة $[AB]$ ؛ إذن يكون :

$\begin{cases} x_N = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_N = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$ أي $\begin{cases} x_N = \dfrac{1+3}{2} \\ y_N = \dfrac{2+0}{2} \end{cases}$ و منه

$N(2;1)$.

6) حساب الأطوال AB ، AD ، DB ، ثم إستنتاج نوع المثلث ABD :

$$\begin{cases} AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{8} \\ AD = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2} = \sqrt{2} \\ DB = \sqrt{(x_B - x_D)^2 + (y_B - y_D)^2} = \sqrt{10} \end{cases}$$

نلاحظ جليا أن : $AB^2 + AD^2 = 10 = DB^2$ ؛

إذن حسب فيثاغورس فإن المثلث ABD قائم في A .

7) تعيين E مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABD :

من مكتسبات السنة الرابعة متوسط في الهندسة نعلم أن مركز الدائرة المحيطة بالمثلث القائم هو نقطة منتصف وتره ؛ إذن مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABD هو E منتصف القطعة $\left[DB\right]$ بحيث :

$$\begin{cases} x_E = \dfrac{x_D + x_B}{2} \\ y_E = \dfrac{y_D + y_B}{2} \end{cases}$$ أي $$\begin{cases} x_E = \dfrac{0+3}{2} \\ y_E = \dfrac{1+0}{2} \end{cases}$$ و منه

$E\left({}^{3}\!/_{2};{}^{1}\!/_{2}\right)$.

8) إستنتاج المسافة EN :

بما أن النقطة N هي منتصف القطعة $\left[AB\right]$ و E هي منتصف القطعة $\left[DB\right]$ فإنه من تساوي النسب نجد

$$\frac{EN}{DA} = \frac{BE}{BD} = \frac{BN}{BA}$$ أي $$\frac{EN}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$ و منه

ينتج : $EN = {}^{\sqrt{2}}\!/_{2}$.

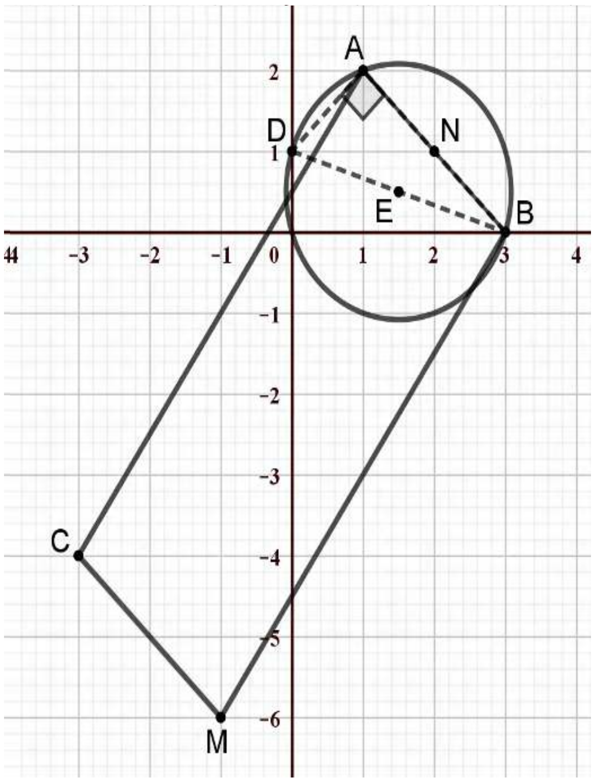
التحقق باستخدام الإحداثيات :

بما أن $E\left({}^{3}\!/_{2};{}^{1}\!/_{2}\right)$ و $N\left(2\,;1\right)$ فإن :

$$EN = \sqrt{\left(x_N - x_E\right)^2 + \left(y_N - y_E\right)^2}$$ أي

$EN = {}^{1}\!/_{\sqrt{2}} = {}^{\sqrt{2}}\!/_{2}$.

الإنشاء الهندسي :



حل التمرين رقم 18 :

نعتبر النقط : $A\left(3;-1\right)$ ، $B\left(1;\alpha\right)$ ، $C\left(-1;2\right)$ حيث α عدد حقيقي .

1) تعيين العدد الحقيقي α حتى تكون النقط A ، B ، C في إستقامية :

تكون النقط A ، B ، C في إستقامية إذا و فقط إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطين خطيا حيث :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$ أي $$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ \alpha+1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$$ أي $$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

من شرط الإرتباط الخطي ينتج :

$-2\times3+4\left(\alpha+1\right)=0$ أي $-2+4\alpha=0$ و

منه نجد : $\alpha = {}^{1}\!/_{2}$

2) تعيين إحداثيي النقطة D حتى يكون الرباعي $AOCD$ متوازي أضلاع :

يكون الرباعي $AOCD$ متوازي أضلاع إذا و فقط إذا كان $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{DC}$ بحيث :

$$\overrightarrow{AO}\begin{pmatrix} x_O-x_A \\ y_O-y_A \end{pmatrix} \text{ أي } \overrightarrow{AO}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} x_C-x_D \\ y_C-y_D \end{pmatrix} \text{ أي } \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} -1-x_D \\ 2-y_D \end{pmatrix} \text{ إذن}$$

بالمساواة بين المركبات نتحصل على :

$$\begin{cases} -1-x_D=-3 \\ 2-y_D=1 \end{cases} \text{ و منه ينتج : } D(2;1)$$

- تعيين عندئذ طبيعة المثلث OCD :

لتعيين طبيعة (نوع) المثلث OCD نحسب أولا أطوال أضلاعه كما يلي :

$$\begin{cases} OC=\sqrt{(x_C-x_O)^2+(y_C-y_O)^2}=\sqrt{5} \\ OD=\sqrt{(x_D-x_O)^2+(y_D-y_O)^2}=\sqrt{5} \\ DC=\sqrt{(x_C-x_D)^2+(y_C-y_D)^2}=\sqrt{10} \end{cases}$$

بما أن $OC=OD$ فإن المثلث OCD متساوي الساقين ذو الرأس O ؛ و من جهة أخرى :

$OC^2+OD^2=10=DC^2$ إذن حسب فيثاغورس فإن المثلث OCD قائم في O .

إذن نستنتج أن المثلث OCD قائم و متساوي الساقين ذو الرأس O .

3) تعيين العدد الحقيقي α حتى يكون معامل توجيه المستقيم (BC) هو 2 :

بما أن المستقيم (BC) يشمل النقطتين B و C فإن معامل توجيهه λ يحسب كما يلي :

$\lambda=\dfrac{y_C-y_B}{x_C-x_B}$ و منه ينتج $2=\dfrac{2-\alpha}{-1-1}$ أي :

$2-\alpha=-4$ و منه نجد $\alpha=6$.

4) تعيين العدد الحقيقي α حتى يكون المستقيم (BC) يوازي المستقيم الذي معادلته : $y=\dfrac{1}{2}x-3$

$y=\dfrac{1}{2}x-3$ هي المعادلة المبسطة لهذا المستقيم ، و معامل توجيهه هو $\mu=1/2$ ؛ إذن يكون المستقيم (BC) يوازي المستقيم الذي معادلته : $y=\dfrac{1}{2}x-3$ إذا و فقط إذا كان لهما نفس معامل التوجيه أي : $\lambda=\mu$ و منه ينتج $\dfrac{2-\alpha}{-1-1}=\dfrac{1}{2}$

أي $2(\ 2-\alpha)=-2$ و منه $2-\alpha=-1$ أي $\alpha=3$.

<u>حل التمرين رقم 19 :</u>

ABC مثلث قائم في A حيث : $AB=8cm$ و $AC=4cm$.

1) إنشاء النقط L و K حيث : $\overrightarrow{AL}=\dfrac{5}{4}\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AK}=-\dfrac{5}{2}\overrightarrow{AC}$:

لإنشاء النقطة L نقسم القطعة $[AB]$ إلى أربع أجزاء

متساوية الطول ثم نحسب خمسة أجزاء إنطلاقا من النقطة A لأن الشعاعين $\overrightarrow{AL}$ و $\overrightarrow{AB}$ لهما نفس الإتجاه .

ننشئ النقطة K إنطلاقا من النقطة A بحيث يكون طول الشعاع $\overrightarrow{AK}$ هو <u>ضعفين و نصف</u> أي $\frac{5}{2}$ من طول الشعاع $\overrightarrow{AC}$ لأن الشعاعين $\overrightarrow{AK}$ و $\overrightarrow{AC}$ لهما إتجاهين متعاكسين .

2) حساب $\left\|\overrightarrow{AK}\right\|$ و $\left\|\overrightarrow{AL}\right\|$ ثم إستنتاج $\left\|\overrightarrow{KL}\right\|$:

من العلاقة $\overrightarrow{AK}=-\frac{5}{2}\overrightarrow{AC}$ ينتج

$\left\|\overrightarrow{AK}\right\|=\frac{5}{2}\left\|\overrightarrow{AC}\right\|$ و منه $\left\|\overrightarrow{AK}\right\|=\frac{5}{2}\times 4$ أي

$\left\|\overrightarrow{AK}\right\|=10\,cm$.

من العلاقة $\overrightarrow{AL}=\frac{5}{4}\overrightarrow{AB}$ ينتج $\left\|\overrightarrow{AL}\right\|=\frac{5}{4}\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$

و منه $\left\|\overrightarrow{AL}\right\|=\frac{5}{4}\times 8$ أي $\left\|\overrightarrow{AL}\right\|=10\,cm$.

بما أن المثلث AKL قائم في A فإنه حسب نظرية فيثاغورس نجد :

$\left\|\overrightarrow{AK}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{AL}\right\|^2=\left\|KL\right\|^2$ أي

$\left\|KL\right\|^2=10^2+10^2=200$ و منه ينتج :

$\left\|KL\right\|=\sqrt{200}=10\sqrt{2}\,cm$.

3) M نقطة من المستوي تحقق العلاقة :

$$-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$$

أ- التعبير عن الشعاع $\overrightarrow{AM}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ثم إنشاء النقطة M :

يكفي فقط إستخدام علاقة شال في المساواة الشعاعية $-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ لنتحصل على :

$-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ أي

$2\overrightarrow{MA}=-2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ أي

$-2\overrightarrow{AM}=-2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ أي

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ و هو المطلوب .

إنشاء النقطة M : إنطلاقا من نهاية الشعاع $\overrightarrow{AB}$ أي من النقطة B نرسم الشعاع $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ فتكون نهاية هذا الشعاع هي النقطة M (تطبيق لعلاقة شال) .

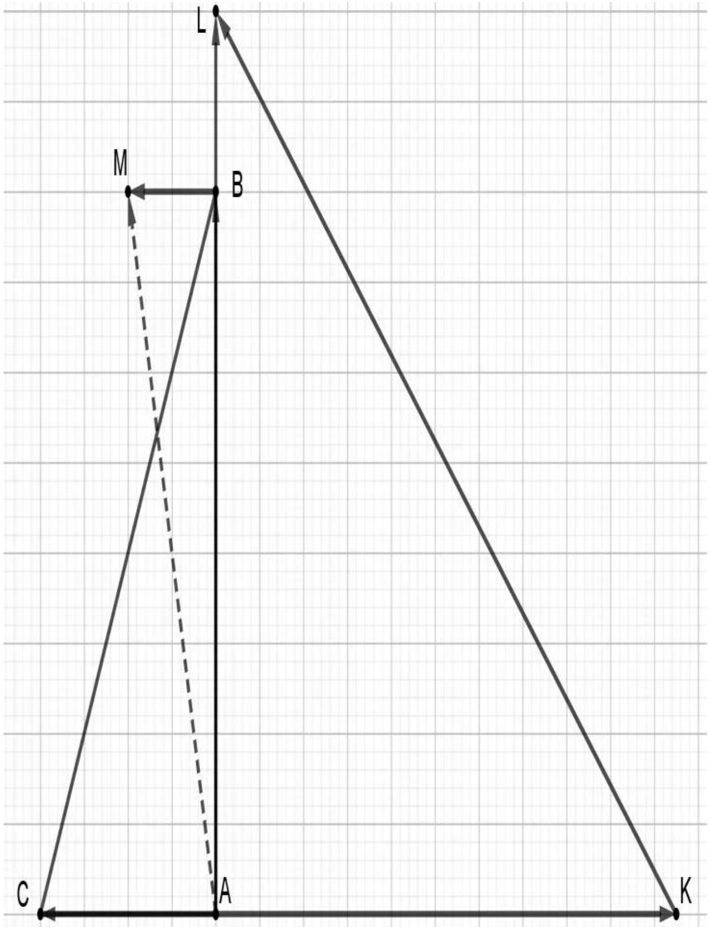
ب- إستنتاج أن : $\overrightarrow{AM}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AL}-\frac{1}{5}\overrightarrow{AK}$.

من السؤال السابق : $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ و من معطيات التمرين نعلم أن : $\overrightarrow{AL}=\frac{5}{4}\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AK}=-\frac{5}{2}\overrightarrow{AC}$ ؛ معناه : $\overrightarrow{AB}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AL}$ و $\overrightarrow{AC}=-\frac{2}{5}\overrightarrow{AK}$ و بالتالي نجد :

$\overrightarrow{AM}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AL}-\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\overrightarrow{AK}$ أي

$\overrightarrow{AM}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AL}-\frac{1}{5}\overrightarrow{AK}$ و هو المطلوب .

<u>الإنشاء الهندسي</u> :



حل التمرين رقم 20 و الأخير :

(Δ_m) مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوي التي تحقق :

$mx+(m-1)y+2=0$ حيث m عدد حقيقي .

1) تبيان أن من أجل كل عدد حقيقي m فإن : (Δ_m) مستقيم :

نعلم أن لكل مستقيم معادلة ديكارتية من الشكل :

$ax+by+c=0$ حيث $(a;b)\neq(0;0)$

إذن لو نفرض أن : $\begin{cases} a=m=0 \;\ldots(*) \\ b=m-1=0 \;\ldots(**) \end{cases}$

نجد من $(*)$ أن : $m=0$ و من $(**)$ أن $m=1$

إذن لا توجد أية قيمة للعدد m تعدم العددين a و b في آن واحد أي تحقق $(a;b)=(0;0)$ و منه المعادلة :

$mx+(m-1)y+2=0$ حيث m عدد حقيقي هي معادلة مستقيم من أجل كل عدد حقيقي m .

2) تبيان أن النقطة $A(-2;2)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ_m) من أجل كل عدد حقيقي m :

يكفي التعويض بالإحداثيات في المعادلة :

$m(-2)+(m-1)\times 2+2=0$ و منه فالنقطة $A(-2;2)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ_m) من أجل كل عدد حقيقي m .

3) تعيين قيمة العدد m حتى تكون النقطة $B(1;1)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ_m) :

تكون النقطة $B(1;1)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ_m) إذا و فقط إذا كانت إحداثياها تحقق معادلة (Δ_m) أي :

$m\times 1+(m-1)\times 1+2=0$ و منه

$2m+1=0$ أي $m=-\frac{1}{2}$.

4) نفرض أن $m\neq 1$: تعيين معامل توجيه المستقيم (Δ_m) .

لتعيين معامل توجيه المستقيم (Δ_m) ننتقل من المعادلة الديكارتية إلى المعادلة المختصرة (المبسطة) كما يلي :

$mx+(m-1)y+2=0$ و منه نجد

$(m-1)y=-mx-2$ و بما أن $m\neq 1$ فإن $m-1\neq 0$ ؛ إذن بقسمة الطرفين على $m-1$ نجد

$y=-\frac{m}{m-1}x-\frac{2}{m-1}$ و منه معامل توجيه المستقيم $\left(\Delta_m\right)$ هو $a=-\frac{m}{m-1}$.

5) تعيين قيمة العدد m حتى يكون المستقيم $\left(\Delta_m\right)$ يوازي المستقيم $\left(d\right)$ ذو المعادلة :

$$10x+8y+5=0$$

يكون المستقيم $\left(\Delta_m\right)$ يوازي المستقيم $\left(d\right)$ ذو المعادلة : $10x+8y+5=0$ إذا و فقط إذا كان لهما نفس معامل التوجيه بحيث معامل توجيه المستقيم ذو المعادلة $10x+8y+5=0$ نعينه كما يلي :

$10x+8y+5=0$ أي $8y=-10x-5$ و منه

$y=-5/4\,x-5/8$ (المعادلة المبسطة) و بالتالي

معامل توجيهه هو $a'=-5/4$ ؛ إذن بوضع $a=a'$ نتحصل على المعادلة ذات المجهول m التالية :

$-\frac{m}{m-1}=-5/4$ أي $4m=5\left(m-1\right)$ أي

$4m=5m-5$ و منه نجد $m=5$.

6) رسم المستقيمات : $\left(\Delta_0\right)$ ، $\left(\Delta_1\right)$ ، $\left(\Delta_2\right)$ في نفس المعلم .

$\left(\Delta_0\right)$ يوافق القيمة $m=0$: إذن المعادلة الديكارتية للمستقيم $\left(\Delta_0\right)$ تعين من الشكل :

$\left(\Delta_0\right): 0\times x+\left(0-1\right)y+2=0$ أي :

$\left(\Delta_0\right): y=2$ و منه المستقيم $\left(\Delta_0\right)$ أفقي يوازي حامل محور الفواصل .

$\left(\Delta_1\right)$ يوافق القيمة $m=1$: إذن المعادلة الديكارتية للمستقيم $\left(\Delta_1\right)$ تعين من الشكل :

$\left(\Delta_1\right):1\times x+\left(1-1\right)y+2=0$ أي :

$\left(\Delta_1\right): x=-2$ و منه المستقيم $\left(\Delta_1\right)$ عمودي يوازي حامل محور التراتيب .

$\left(\Delta_2\right)$ يوافق القيمة $m=2$: إذن المعادلة الديكارتية للمستقيم $\left(\Delta_2\right)$ تعين من الشكل :

$\left(\Delta_2\right): 2x+\left(2-1\right)y+2=0$ أي :

$\left(\Delta_2\right): y=-2x-2$ و منه فالمستقيم $\left(\Delta_2\right)$ مائل

<u>الإنشاء الهندسي :</u>