

سلسلة الرياضيات في الثانوية

مجلة 65

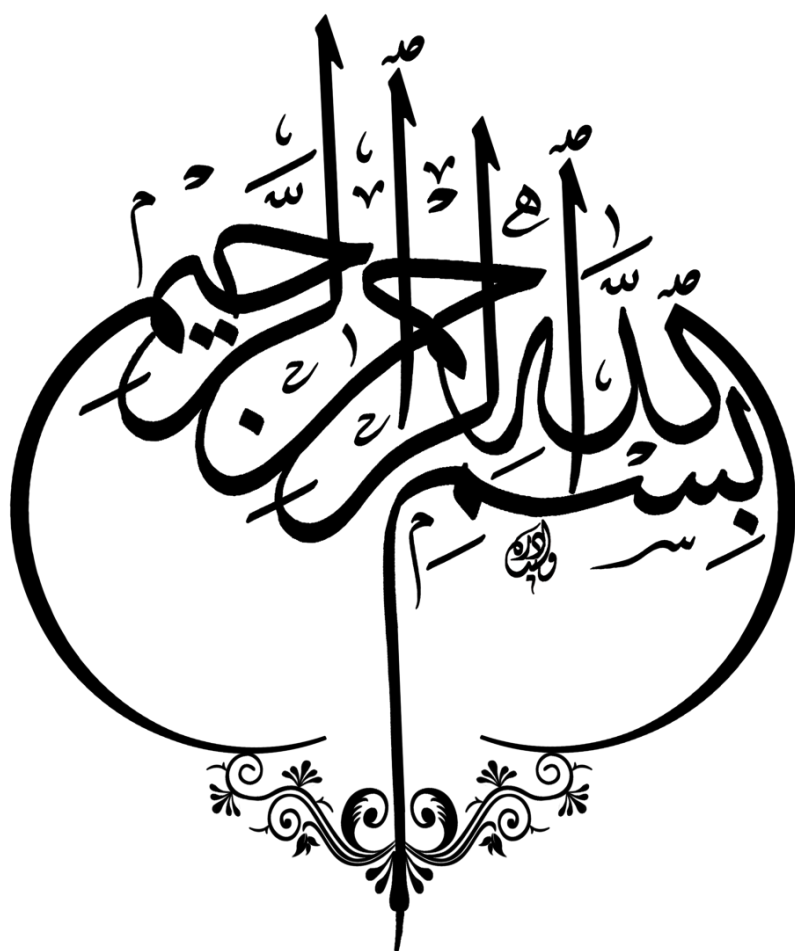
نمرين مرفق بالحل المفصل في
مدور الأعداد و الحساب

للسنة الأولى ثانوي

كتابة و إعداد :

الإستاذ حناش نبيل

إصدار : 2020 - 2021



التمرين رقم 01 : أنقل ثم أكمل الجدول بوضع × في المكان الصحيح :

$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	
		×	×	×	3.14
×	×	×	×	×	2
			×	×	6.23
				×	$\sqrt{2}$
×	×	×	×	×	$\sqrt{81}$

6.23 تمثل الكتابة العشرية الدورية لعدد ناطق (بحيث الفاصلة غير منتهية)

81 هو مربع تام بحيث $\sqrt{81} = 9$.

التمرين رقم 02 :

ضع أحد الرمزین $\in$ أو $\notin$:

$$-\sqrt{25} \dots \mathbb{N} \quad ; \quad \frac{-125}{5} \dots \mathbb{Z} \quad ; \quad \frac{5}{70} \dots \mathbb{D} \quad ; \quad \sqrt{0.81} \dots \mathbb{Q}$$

حل مقترح :

$-\sqrt{25} = -5$ و منه : $-\sqrt{25} \notin \mathbb{N}$ لأن -5 عدد سالب و جميع الأعداد الطبيعية هي أعداد موجبة .

$$\frac{-125}{5} = -25 \text{ و منه : } \frac{-125}{5} \in \mathbb{Z}$$

نقوم أولاً بكتابة الكسر $\frac{5}{70}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال فنجد : $\frac{5}{70} = \frac{1}{14}$ ($PGCD(5;70)$)

ثانياً نقوم بتحليل المقام 14 إلى جداء عوامل أولية فنجد : $14 = 2 \times 7$ أي أن المقام يشتمل في تحليله إلى جداء

عوامل أولية عدداً أولياً يختلف عن 2 و يختلف عن 5 و هو 7 ؛ إذن من الخاصية المميزة لعدد عشري نستنتج أن

$$\frac{5}{70} \notin \mathbb{D} \text{ العدد}$$

لدينا : $\sqrt{0.81} = 0.9$ و بما أن 0.9 عدد عشري (فاصلة منتهية) فإن : $0.9 \in \mathbb{Q}$ لأن $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$ أو يمكن

الإجابة كما يلي : $\sqrt{0.81} = 0.9 = \frac{9}{10}$ و منه يكون : $\sqrt{0.81} \in \mathbb{Q}$.

التمرين رقم 03 :

هل العدد a عشري بحيث : $a = \frac{330}{396}$ ؟

حل مقترح :

دون إستعمال الآلة الحاسبة و باستعمال الخاصية المميزة لعدد عشري نكتب أولا الكسر $\frac{330}{396}$ على شكل كسر غير

قابل للاختزال : من أجل ذلك نعين $PGCD(330;396)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} 396 = 330 \times 1 + 66 \\ 330 = 66 \times 5 + 0 \end{array} \right. \text{ و منه : } PGCD(330;396) = 66 .$$

إذن نتحصل على : $\frac{330}{396} = \frac{5}{6}$ و من ثم نحلل المقام 6 إلى جداء عوامل أولية فنجد : $6 = 2 \times 3$ أي أن المقام

يشتمل في تحليله إلى جداء عوامل أولية عددا أوليا يختلف عن 2 و يختلف عن 5 و هو 3 ؛ إذن من الخاصية المميزة

لعدد عشري نستنتج أن العدد $\frac{330}{396} \notin \mathbb{D}$.

التمرين رقم 04 :

أكتب الأعداد التالية على شكل كسر :

$$B = 12.\underline{3}737\dots \quad ; \quad A = -0.\underline{3}535\dots$$

حل مقترح :

$A = -0.\underline{3}535\dots = -0 + 0.3535\dots$ أي $A = -0.\underline{3}535\dots = -0 + 0.3535\dots$ ؛ و بوضع :

$x = 0.3535\dots$ نتحصل على : $A = 0 + x$.

عدد أرقام الدور هو 2 و منه بضرب المعادلة $x = 0.3535\dots$ في 10^2 أي في 100 نجد :

$100x = 35.3535\dots$ و منه $100x = 35 + 0.3535\dots$ أي $100x = 35 + x$ لأن $x = 0.3535\dots$

و منه نجد : $100x - x = 35$ أي $99x = 35$ و منه : $x = \frac{35}{99}$.

إذن بتعويض قيمة x في المجموع $A = 0 + x$ نجد : $A = 0 + \frac{35}{99}$ أي $A = \frac{35}{99}$ و هو المطلوب .

$B = 12.\underline{3}737\dots = 12 + 0.3737\dots$ و بوضع : $x = 0.3737\dots$ نتحصل على : $B = 12 + x$.

عدد أرقام الدور هو 2 و منه بضرب المعادلة $x = 0.3737\dots$ في 10^2 أي في 100 نجد :

$100x = 37.3737\dots$ و منه $100x = 37 + 0.3737\dots$ أي $100x = 37 + x$ لأن $x = 0.3737\dots$

و منه نجد : $100x - x = 37$ أي $99x = 37$ و منه : $x = \frac{37}{99}$.

إذن بتعويض قيمة x في المجموع $B = 12 + x$ نجد : $B = 12 + \frac{37}{99}$ أي $B = \frac{12 \times 99 + 37}{99}$ و منه :

$B = \frac{1225}{99}$ و هو المطلوب .

التمرين رقم 05 :

عين الأعداد من بين الأعداد التالية التي تنتمي إلى مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$:

$-\sqrt{81}$ ؛ $\sqrt{49}$ ؛ 8×10^3 ؛ $73,0$ ؛ $\frac{-24}{3}$ ؛ $\frac{10}{2}$ ؛ -13 ؛ $3\sqrt{4}$ ؛ $2\sqrt{5}$.

عين الأعداد من بين الأعداد التالية التي تنتمي إلى مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية $\mathbb{Z}$:

$$- \sqrt{121} \text{ ؛ } \sqrt{169} \text{ ؛ } 8 \times 10^3 \text{ ؛ } 73,0 \text{ ؛ } \frac{-24}{5} \text{ ؛ } \frac{12}{3} \text{ ؛ } -13 \text{ ؛ } 3\sqrt{4} \text{ ؛ } 2.5 .$$

عين الأعداد من بين الأعداد التالية التي تنتمي إلى مجموعة الأعداد العشرية $\mathbb{D}$:

$$3.14 \text{ ؛ } \frac{1123}{5} \text{ ؛ } \frac{10}{3} \text{ ؛ } 7 \text{ ؛ } -\sqrt{0.01} \text{ ؛ } \frac{5}{2} \text{ ؛ } -13 \text{ ؛ } -9.3 \text{ ؛ } \sqrt{25} .$$

عين الأعداد من بين الأعداد التالية التي تنتمي إلى مجموعة الأعداد الناطقة $\mathbb{Q}$:

$$3.14 \text{ ؛ } \frac{1123}{5} \text{ ؛ } \frac{10}{3} \text{ ؛ } 9 \text{ ؛ } -\sqrt{0.01} \text{ ؛ } -77 \text{ ؛ } \sqrt{17} \text{ ؛ } -4.3 \text{ ؛ } 3\sqrt{36} .$$

عين الأعداد من بين الأعداد التالية التي تنتمي إلى مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية $\mathbb{Z}$ ولا تنتمي إلى $\mathbb{N}$:

$$-\sqrt{36} \text{ ؛ } 4 \times 5^3 \text{ ؛ } 73.0 \text{ ؛ } \frac{-13}{6} \text{ ؛ } \frac{14}{2} \text{ ؛ } -77 \text{ ؛ } 100 \text{ ؛ } 3\sqrt{36} .$$

عين الأعداد من بين الأعداد التالية التي تنتمي إلى مجموعة الأعداد الناطقة $\mathbb{Q}$ ولا تنتمي إلى مجموعة الأعداد العشرية

$\mathbb{D}$:

$$3.14 \text{ ؛ } \frac{123}{11} \text{ ؛ } \frac{10}{3} \text{ ؛ } 1 \text{ ؛ } \sqrt{0.49} \text{ ؛ } \sqrt{100} \text{ ؛ } \frac{5}{2} \text{ ؛ } \frac{13}{10} \text{ ؛ } -9.07 \text{ ؛ } \frac{17}{100} .$$

حل مقترح :

• تعيين الأعداد من بين الأعداد التالية التي تنتمي إلى مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$:

$$-\sqrt{81} \text{ ؛ } \sqrt{49} \text{ ؛ } 8 \times 10^3 \text{ ؛ } 73,0 \text{ ؛ } \frac{-24}{3} \text{ ؛ } \frac{10}{2} \text{ ؛ } -13 \text{ ؛ } 3\sqrt{4} \text{ ؛ } 2\sqrt{5} .$$

81 مربع تام و منه يكون : $-\sqrt{81} = -9$ و هو عدد سالب ؛ إذن : $-\sqrt{81} \notin \mathbb{N}$.

49 مربع تام و منه يكون : $\sqrt{49} = 7$ ؛ إذن : $\sqrt{49} \in \mathbb{N}$.

$8 \times 10^3 = 8000$ و منه : $8 \times 10^3 \in \mathbb{N}$.

$73.0 = 73$ و منه : $73.0 \in \mathbb{N}$.

$\frac{-24}{3}$ عدد سالب و منه $\frac{-24}{3} \notin \mathbb{N}$.

$\frac{10}{2} = 5$ و منه يكون : $\frac{10}{2} \in \mathbb{N}$.

-13 عدد سالب و منه $-13 \notin \mathbb{N}$.

4 مربع تام و منه $3\sqrt{4} = 3 \times 2 = 6$ ؛ إذن : $3\sqrt{4} \in \mathbb{N}$.

5 ليس مربع تام و منه $\sqrt{5}$ عدد أصم و منه يكون $2\sqrt{5}$ عدد أصم ؛ إذن : $2\sqrt{5} \notin \mathbb{N}$.

• تعيين الأعداد من بين الأعداد التالية التي تنتمي إلى مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية $\mathbb{Z}$:

121 مربع تام بحيث $\sqrt{121} = 11$ و منه $-\sqrt{121} = -11$ ؛ إذن : $-\sqrt{121} \in \mathbb{Z}$.

169 مربع تام بحيث $\sqrt{169} = 13$ ؛ إذن : $\sqrt{169} \in \mathbb{Z}$.

$8 \times 10^3 = 8000$ ؛ إذن : $8 \times 10^3 \in \mathbb{Z}$.

$73.0 = 73$ ؛ إذن : $73.0 \in \mathbb{Z}$.

المقام 5 لا يقسم البسط -24 و منه يكون الكسر $\frac{-24}{5}$ لا يساوي عدد صحيح أي $\frac{-24}{5} \notin \mathbb{Z}$.

المقام 3 يقسم البسط 12 و منه يكون الكسر $\frac{12}{3}$ يساوي عدد صحيح بحيث $\frac{12}{3} = 4$ ؛ إذن : $\frac{12}{3} \in \mathbb{Z}$.

$-13 \in \mathbb{Z}$.

4 مربع تام بحيث $\sqrt{4} = 2$ و منه $3\sqrt{4} = 3 \times 2 = 6$ ؛ إذن : $3\sqrt{4} \in \mathbb{Z}$.

2.5 عدد بالفاصلة (غير صحيح) و منه : $2.5 \notin \mathbb{Z}$.

• تعيين الأعداد من بين الأعداد التالية التي تنتمي إلى مجموعة الأعداد العشرية $\mathbb{D}$:

3.14 عدد بالفاصلة المنتهية و منه يكون $3.14 \in \mathbb{D}$ ؛ أو يمكن الإجابة كما يلي : نلاحظ أن

$$3.14 = \frac{314}{100} = \frac{314}{10^2} \text{ و منه فالعدد } 3.14 \text{ يكتب على الشكل } \frac{p}{10^n} \text{ بحيث } p = 314 \text{ عدد صحيح نسبي و}$$

$n = 2$ عدد طبيعي ؛ إذن من التعريف نستنتج أن : $3.14 \in \mathbb{D}$.

بدون إستعمال الآلة الحاسبة الكسر $\frac{1123}{5}$ غير قابل للإختزال و من جهة أخرى عند تحليل المقام إلى جداء عوامل

أولية نجد : $5 = 5^1$ أي أن تحليل المقام إلى جداء عوامل أولية لا يشمل إلا العاملين 2 أو 5 و منه فالعدد $\frac{1123}{5}$

هو عدد عشري أي $\frac{1123}{5} \in \mathbb{D}$

بدون إستعمال الآلة الحاسبة الكسر $\frac{10}{3}$ غير قابل للإختزال و من جهة أخرى عند تحليل المقام إلى جداء عوامل

أولية نجد : $3 = 3^1$ أي أن تحليل المقام إلى جداء عوامل أولية يشمل عاملا أوليا و هو 3 يختلف عن 2 و يختلف

عن 5 و منه فالعدد $\frac{10}{3}$ هو عدد ليس عشريا أي $\frac{10}{3} \notin \mathbb{D}$

$7 \in \mathbb{D}$ لأن : $7 = \frac{70}{10} = \frac{70}{10^1}$ أي أن العدد 7 يكتب على الشكل $\frac{p}{10^n}$ بحيث $p = 70$ عدد صحيح نسبي و

$n = 1$ عدد طبيعي .

$-\sqrt{0.01} = -0.1 \in \mathbb{D}$ لأن الفاصلة منتهية أو يمكن الإجابة كما يلي : نلاحظ أن

$$- \sqrt{0.01} = -0.1 = \frac{-1}{10} = \frac{-1}{10^1} \text{ أي أن العدد } -\sqrt{0.01} \text{ يكتب على الشكل } \frac{p}{10^n} \text{ بحيث } p = -1 \text{ عدد صحيح نسبي و } n = 1 \text{ عدد طبيعي .}$$

بدون إستعمال الآلة الحاسبة الكسر $\frac{5}{2}$ غير قابل للإختزال و من جهة أخرى عند تحليل المقام إلى جداء عوامل أولية

نجد : $2 = 2^1$ أي أن تحليل المقام إلى جداء عوامل أولية لا يشمل إلا العاملين 2 أو 5 و منه فالعدد $\frac{5}{2}$ هو عدد

$$\frac{5}{2} \in \mathbb{D} \text{ عشري أي}$$

13- هو عدد صحيح نسبي و منه 13- هو عدد عشري لأن مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية محتواة في مجموعة

الأعداد العشرية ($\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$) أي $-13 \in \mathbb{D}$ أو يمكن الإجابة كما يلي :

$$-13 = \frac{-130}{10} = \frac{-130}{10^1} \text{ أي أن العدد } -13 \text{ يكتب على الشكل } \frac{p}{10^n} \text{ بحيث } p = -130 \text{ عدد صحيح نسبي و}$$

$$n = 1 \text{ عدد طبيعي و منه : } -13 \in \mathbb{D} .$$

$$-9.3 \in \mathbb{D} \text{ لأن الفاصلة منتهية أو يمكن الإجابة كما يلي :}$$

$$-9.3 = \frac{-93}{10} = \frac{-93}{10^1} \text{ أي أن العدد } -9.3 \text{ يكتب على الشكل } \frac{p}{10^n} \text{ بحيث } p = -93 \text{ عدد صحيح نسبي و}$$

$$n = 1 \text{ عدد طبيعي و منه : } -9.3 \in \mathbb{D} .$$

25 مربع تام بحيث $\sqrt{25} = 5$ و بما أن 5 هو عدد طبيعي فإن 5 هو عدد عشري لأن مجموعة الأعداد الطبيعية

محتواة في مجموعة الأعداد العشرية ($\mathbb{N} \subset \mathbb{D}$) أي $\sqrt{25} \in \mathbb{D}$.

$$\sqrt{25} = 5 = \frac{50}{10} = \frac{50}{10^1} \text{ أي أن العدد } \sqrt{25} \text{ يكتب على الشكل } \frac{p}{10^n} \text{ بحيث } p = 50 \text{ عدد صحيح نسبي و}$$

$$n = 1 \text{ عدد طبيعي و منه : } \sqrt{25} \in \mathbb{D} .$$

• تعيين الأعداد من بين الأعداد التالية التي تنتمي إلى مجموعة الأعداد الناطقة $\mathbb{Q}$:

$$3.14 \in \mathbb{Q} \text{ لأن } 3.14 = \frac{314}{100} .$$

$$\frac{10}{3} \in \mathbb{Q} \text{ و } \frac{1123}{5} \in \mathbb{Q} .$$

9 عدد طبيعي و بما أن مجموعة الأعداد الطبيعية محتواة في مجموعة الأعداد الناطقة ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$) فإن $9 \in \mathbb{Q}$.

أو يمكن الإجابة كما يلي : $9 = \frac{9}{1}$ أي أن العدد 9 يكتب على الشكل $\frac{p}{q}$ بحيث p عدد صحيح نسبي و q عدد

صحيح نسبي غير معدوم و منه : $9 \in \mathbb{Q}$.

$-0.1 = -\sqrt{0.01}$ أي أن العدد $-\sqrt{0.01}$ عدد عشري (الفاصلة منتهية) و بما أن مجموعة الأعداد العشرية

محتواة في مجموعة الأعداد الناطقة ($\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$) فإن $-\sqrt{0.01} \in \mathbb{Q}$ أو يمكن الإجابة كما يلي :

$$-\sqrt{0.01} = -0.1 = \frac{-1}{10} \text{ أي أن العدد } -\sqrt{0.01} \text{ يكتب على الشكل } \frac{p}{q} \text{ بحيث } p \text{ عدد صحيح نسبي و } q \text{ عدد}$$

صحيح نسبي غير معدوم و منه يكون : $-\sqrt{0.01} \in \mathbb{Q}$.

-77 عدد صحيح نسبي و بما أن مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية محتواة في مجموعة الأعداد الناطقة ($\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$) فإن

$$-77 \in \mathbb{Q} . \text{ أو يمكن الإجابة كما يلي : } -77 = \frac{-77}{1} \text{ أي أن العدد } -77 \text{ يكتب على الشكل } \frac{p}{q} \text{ بحيث } p \text{ عدد}$$

صحيح و q عدد صحيح نسبي غير معدوم و منه : $-77 \in \mathbb{Q}$.

17 ليس مربع تام و منه مباشرة نستنتج أن : $\sqrt{17} \notin \mathbb{Q}$.

-4.3 عدد عشري (الفاصلة منتهية) و بما أن مجموعة الأعداد العشرية محتواة في مجموعة الأعداد الناطقة (

$\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$) فإن $-4.3 \in \mathbb{Q}$. أو يمكن الإجابة كما يلي :

$$-4.3 = \frac{-43}{10} \text{ أي أن العدد } -4.3 \text{ يكتب على الشكل } \frac{p}{q} \text{ بحيث } p \text{ عدد صحيح و } q \text{ عدد صحيح نسبي غير}$$

معدوم و منه : $-4.3 \in \mathbb{Q}$.

36 مربع تام بحيث $\sqrt{36} = 6$ و منه $3\sqrt{36} = 3 \times 6 = 18$ ؛ 18 عدد طبيعي و بما أن مجموعة الأعداد الطبيعية محتواة في مجموعة الأعداد الناطقة ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$) فإن $18 \in \mathbb{Q}$. أو يمكن الإجابة كما يلي :

$$18 = \frac{18}{1} \text{ أي أن العدد } 18 \text{ يكتب على الشكل } \frac{p}{q} \text{ بحيث } p \text{ عدد صحيح و } q \text{ عدد صحيح نسبي غير معدوم و منه :}$$

$$18 \in \mathbb{Q} .$$

• تعيين الأعداد من بين الأعداد التالية التي تنتمي إلى مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية $\mathbb{Z}$ و لا تنتمي إلى $\mathbb{N}$:

$$-\sqrt{36} = -6 \text{ و منه يكون : } -\sqrt{36} \in \mathbb{Z} \text{ و } -\sqrt{36} \notin \mathbb{N} \text{ لأن } -6 \text{ عدد سالب .}$$

$$4 \times 5^3 = 500 \text{ و منه يكون : } 4 \times 5^3 \in \mathbb{Z} \text{ و } 4 \times 5^3 \in \mathbb{N} .$$

$$73.0 = 73 \text{ و منه يكون : } 73.0 \in \mathbb{Z} \text{ و } 73.0 \in \mathbb{N} .$$

$$\text{المقام } 6 \text{ لا يقسم البسط } -13 \text{ و منه فالكسر } \frac{-13}{6} \text{ لا يمكن أن يساوي عددا صحيحا (}$$

$$\frac{-13}{6} \notin \mathbb{N} \text{ و كذلك : } \frac{-13}{6} = -2.166... \notin \mathbb{Z})$$

$$\frac{14}{2} = 7 \text{ و منه : } \frac{14}{2} \in \mathbb{Z} \text{ و } \frac{14}{2} \in \mathbb{N} .$$

$$-77 \in \mathbb{Z} \text{ و } -77 \notin \mathbb{N} \text{ لأن : } -77 \text{ عدد سالب .}$$

$$100 \in \mathbb{Z} \text{ و } 100 \in \mathbb{N} .$$

$$36 \text{ مربع تام بحيث } \sqrt{36} = 6 \text{ و منه } 3\sqrt{36} = 18 \text{ ؛ إذن } 3\sqrt{36} \in \mathbb{Z} \text{ و } 3\sqrt{36} \in \mathbb{N} .$$

• تعيين الأعداد من بين الأعداد التالية التي تنتمي إلى مجموعة الأعداد الناطقة $\mathbb{Q}$ ولا تنتمي إلى مجموعة الأعداد

العشرية $\mathbb{D}$:

$$3.14 = \frac{314}{100} \in \mathbb{Q} \text{ و } 3.14 \in \mathbb{D} \text{ كذلك } 3.14 \in \mathbb{D} \text{ (الفاصلة منتهية) .}$$

$$\frac{123}{11} \in \mathbb{Q} \text{ و هو كسر غير قابل للإختزال ؛ و من جهة أخرى تحليل المقام إلى جداء عوامل أولية يكون :}$$

$$11 = 11^1 \text{ أي أن هذا التحليل يشتمل على } 11 \text{ و هو عدد أولي يختلف عن } 2 \text{ و يختلف عن } 5 \text{ ؛ إذن } \frac{123}{11} \notin \mathbb{D} .$$

$$\frac{10}{3} \in \mathbb{Q} \text{ و هو كسر غير قابل للإختزال ؛ و من جهة أخرى تحليل المقام إلى جداء عوامل أولية يكون : } 3 = 3^1$$

$$\text{أي أن هذا التحليل يشتمل على } 3 \text{ و هو عدد أولي يختلف عن } 2 \text{ و يختلف عن } 5 \text{ ؛ إذن } \frac{10}{3} \notin \mathbb{D} .$$

1 هو عدد طبيعي و بما أن مجموعة الأعداد الطبيعية محتواة في مجموعة الأعداد الناطقة $(\mathbb{N} \subset \mathbb{Q})$ فإن $1 \in \mathbb{Q}$. أو

يمكن الإجابة كما يلي : $1 = \frac{1}{1} \in \mathbb{Q}$ ؛ كذلك نعلم أن مجموعة الأعداد الطبيعية محتواة في مجموعة الأعداد العشرية)

$$1 \in \mathbb{D} \text{ و منه } 1 \in \mathbb{D} . \text{ أو يمكن الإجابة كما يلي : } 1 = \frac{10}{10} = \frac{10}{10^1} \in \mathbb{D} \text{ (من الشكل } \frac{p}{10^n} \text{) .}$$

$$\sqrt{0.49} = 0.7 \in \mathbb{D} \text{ (فاصلة منتهية) و بما أن و بما أن مجموعة الأعداد العشرية محتواة في مجموعة الأعداد الناطقة}$$

$$(\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}) \text{ فإن } \sqrt{0.49} = 0.7 \in \mathbb{Q} . \text{ أو يمكن الإجابة كما يلي : } \sqrt{0.49} = 0.7 = \frac{7}{10} \in \mathbb{Q}$$

100 مربع تام بحيث $\sqrt{100} = 10$ أي أن $\sqrt{100}$ طبيعي و بما أن مجموعة الأعداد الطبيعية محتواة في مجموعة

$$\text{الأعداد الناطقة } (\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}) \text{ فإن } \sqrt{100} = 10 \in \mathbb{Q} . \text{ أو يمكن الإجابة كما يلي : } \sqrt{100} = 10 = \frac{10}{1} \in \mathbb{Q} .$$

$\sqrt{100}$ طبيعي و بما أن مجموعة الأعداد الطبيعية محتواة في مجموعة الأعداد العشرية $(\mathbb{N} \subset \mathbb{D})$ فإن :

• $\sqrt{100} = 10 \in \mathbb{D}$. أو يمكن الإجابة كما يلي : $\sqrt{100} = 10 = \frac{100}{10} = \frac{100}{10^1} \in \mathbb{D}$ (من الشكل $\frac{p}{10^n}$) .

$\frac{2}{5} \in \mathbb{Q}$ (من الشكل $\frac{p}{q}$) وهو كسر غير قابل للاختزال ؛ و من جهة أخرى تحليل المقام إلى جداء عوامل أولية

يكون : $5 = 5^1$ أي أن هذا التحليل يشتمل فقط على العاملين 2 أو 5 إذن $\frac{2}{5} \in \mathbb{D}$ (دون استعمال الحاسبة) .

$\frac{13}{10} \in \mathbb{Q}$ (من الشكل $\frac{p}{q}$) وهو كسر غير قابل للاختزال ؛ و من جهة أخرى تحليل المقام إلى جداء عوامل

أولية يكون : $10 = 2^1 \times 5^1$ أي أن هذا التحليل يشتمل فقط على العاملين 2 أو 5 إذن $\frac{13}{10} \in \mathbb{D}$ (دون

استعمال الحاسبة) .

$-9.07 \in \mathbb{D}$ لأن الفاصلة منتهية أو يمكن الإجابة كما يلي : $-9.07 = \frac{-907}{100} = \frac{-907}{10^2} \in \mathbb{D}$ (من الشكل

$\frac{p}{10^n}$) ؛ و بما أن و بما أن مجموعة الأعداد العشرية محتواة في مجموعة الأعداد الناطقة ($\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$) فإن

$-9.07 \in \mathbb{Q}$ أو يمكن الإجابة كما يلي : $-9.07 = \frac{-907}{100} \in \mathbb{Q}$.

$\frac{17}{100} = \frac{17}{10^2} \in \mathbb{D}$ (من الشكل $\frac{p}{10^n}$) و بما أن مجموعة الأعداد العشرية محتواة في مجموعة الأعداد الناطقة (

$\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$) فإن $\frac{17}{100} \in \mathbb{Q}$ أو يمكن الإجابة كما يلي : $\frac{17}{100} \in \mathbb{Q}$ لأن العدد $\frac{17}{100}$ من الشكل $\frac{p}{q}$ بحيث

• $p = 17$ و $q = 100$.

التمرين رقم 06 :

1/ بين أن العدد $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ طبيعي .

2/ بين أن العدد $\frac{1}{15} - \frac{2}{3}$ عشري .

3/ بين أن العدد $a = \sqrt{1 + \frac{12}{13}} \times \sqrt{1 - \frac{12}{13}}$ ناطق .

حل مقترح :

1/ نبين أن العدد $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ طبيعي : نوحّد المقامات بملاحظة أن المقام المشترك هو 6 و منه :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3+2+1}{6} \text{ أي } \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3 \times 2 + 1 \times 3 + 1 \times 2}{2 \times 3} = \frac{6+3+2}{6} = \frac{11}{6} \text{ و منه نجد :}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1 \in \mathbb{N} .$$

2/ نبين أن العدد $\frac{1}{15} - \frac{2}{3}$ عشري : نوحّد المقامات فنجد : $\frac{1}{15} - \frac{2}{3} = \frac{1}{15} - \frac{2 \times 5}{3 \times 5} = \frac{1-10}{15} = -\frac{9}{15} = -\frac{3}{5}$ أي :

؛ هذا العدد هو كسر غير قابل للاختزال و تحليل مقامه إلى جداء عوامل أولية هو $5 = 5^1$ ، $\frac{1}{15} - \frac{2}{3} = \frac{-9}{15} = \frac{-3}{5}$

هذا التحليل لا يشمل عددا أوليا يختلف عن 2 و يختلف عن 5 ؛ إذن العدد $\frac{1}{15} - \frac{2}{3} = \frac{-3}{5} \in \mathbb{D}$

3/ نبين أن العدد $a = \sqrt{1 + \frac{12}{13}} \times \sqrt{1 - \frac{12}{13}}$ ناطق : من خواص الجداء في الجذور نجد :

$$a = \sqrt{\left(1 + \frac{12}{13}\right)\left(1 - \frac{12}{13}\right)} \text{ و منه } a = \sqrt{1^2 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} \text{ أي } a = \sqrt{1 - \frac{144}{169}} \text{ أي } a = \sqrt{\frac{169-144}{169}}$$

و منه $a = \sqrt{\frac{25}{169}}$ و من خواص القسمة في الجذور نحصل على : $a = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{169}}$ أي $a = \frac{5}{13} \in \mathbb{Q}$.

التمرين رقم 07 :

حدد أصغر مجموعة تنتمي إليها الأعداد التالية :

$$C = (\sqrt{18} - 4) \left(\frac{3}{4} \sqrt{2} + 1 \right) , \quad B = \frac{3}{\sqrt{2} + 1} - 3\sqrt{2} , \quad A = \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right)^2$$

$$G = \frac{5}{3} + \frac{4}{3} \times \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{5} \right) , \quad F = \frac{(\sqrt{2} - 3)(\sqrt{2} + 3)}{700} , \quad E = \frac{2\pi}{3.14} , \quad D = \frac{3\sqrt{2} + 15}{7\sqrt{2} + 35}$$

حل مقترح :

$$A = \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{1 - 2\sqrt{3} + 3}{4} + \frac{1 + 2\sqrt{3} + 3}{4}$$

$$A = \frac{4 - 2\sqrt{3} + 4 + 2\sqrt{3}}{4} \text{ و منه } A = \frac{8}{4} \text{ أي } A = 2 \in \mathbb{N} .$$

$$B = \frac{3 - 6 - 3\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} \text{ و منه } B = \frac{3 - 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} \text{ أي } B = \frac{3}{\sqrt{2} + 1} - 3\sqrt{2} = \frac{3 - 3\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{2} + 1}$$

$$B = \frac{-3(1 + \sqrt{2})}{\sqrt{2} + 1} \text{ و منه } B = \frac{-3 - 3\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} \text{ أي } B = -3 \in \mathbb{Z} \text{ نجد } .$$

$$C = (\sqrt{18} - 4) \left(\frac{3}{4} \sqrt{2} + 1 \right) = (3\sqrt{2} - 4) \left(\frac{3}{4} \sqrt{2} + 1 \right) \text{ لأن } \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ و منه :}$$

$$C = \frac{18}{4} + 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2} - 4 \text{ أي } C = \frac{18}{4} - 4 = \frac{18 - 16}{4} \text{ و}$$

$$C = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \in \mathbb{D} \text{ منه نجد } .$$

$$D = \frac{3\sqrt{2}+15}{7\sqrt{2}+35} \text{ و بضرب الكسر في المرافق } (7\sqrt{2}-35) \text{ نجد } D = \frac{(3\sqrt{2}+15)(7\sqrt{2}-35)}{(7\sqrt{2}+35)(7\sqrt{2}-35)} \text{ أي}$$

$$D = \frac{3\sqrt{2} \times 7\sqrt{2} - 35 \times 3\sqrt{2} + 15 \times 7\sqrt{2} - 15 \times 35}{(7\sqrt{2})^2 - 35^2} \text{ و منه}$$

$$D = \frac{483}{1127} \in \mathbb{Q} \text{ أي } D = \frac{42 - 105\sqrt{2} + 105\sqrt{2} - 525}{98 - 1225}$$

$$E = \frac{2\pi}{3.14} \in \mathbb{R} \text{ و منه : } E = \frac{2\pi}{3.14} \notin \mathbb{Q} \text{ فإن } \pi \text{ عدد أصم فإن } \pi \notin \mathbb{Q}$$

$$F = \frac{2-9}{700} \text{ أي } F = \frac{(\sqrt{2})^2 - 3^2}{700} \text{ و بالنشر نجد } F = \frac{(\sqrt{2}-3)(\sqrt{2}+3)}{700}$$

$$F = -\frac{7}{700} = -\frac{1}{100} \in \mathbb{D}$$

$$G = \frac{5}{3} + \frac{4}{3} \times \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{5}\right) \text{ أي } G = \frac{5}{3} + \frac{4}{3} \times \frac{1}{2} - \frac{4}{3} \times \frac{3}{5} \text{ و منه } G = \frac{5}{3} + \frac{4}{6} - \frac{12}{15} \text{ و بتوحيد المقامات نجد}$$

$$G = \frac{5 \times 2 + 4}{6} - \frac{12}{15} \text{ أي } G = \frac{14 \times 15 - 12 \times 6}{6 \times 15} \text{ و منه } G = \frac{138}{90} = \frac{23}{15} \in \mathbb{Q}$$

التمرين رقم 08 :

إختزل إلى أقصى حد ممكن الأعداد التالية مع ذكر أصغر مجموعة ينتمي إليها كل عدد :

$$C = \frac{\sqrt{288} + \sqrt{162}}{\sqrt{147}} \text{ ؛ } B = \frac{\sqrt{96} \times \sqrt{50}}{\sqrt{147}} \text{ ؛ } A = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{ab} \text{ (} a \in \mathbb{R} \text{ و } b \in \mathbb{R} \text{)}$$

$$K = \frac{7\pi + 14}{3\pi + 6} \text{ ؛ } L = \sqrt{\frac{8^4 + 4^{11}}{8^{10} + 4^{10}}} \text{ ؛ } D = \sqrt{\frac{4^{80} + 5 \times 8^{53}}{28 \times 2^{155}}} \text{ ؛}$$

حل مقترح :

$$A = \frac{4ab}{ab} \text{ أي } A = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{ab} = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2)}{ab} \text{ و منه نجد } A = 4 \in \mathbb{N}$$

$$B = \frac{20\sqrt{2 \times 3 \times 2}}{7\sqrt{3}} \text{ أي } B = \frac{2^2 \times \sqrt{2 \times 3} \times 5\sqrt{2}}{7\sqrt{3}} \text{ أي } B = \frac{\sqrt{96} \times \sqrt{50}}{\sqrt{147}} = \frac{\sqrt{2^5 \times 3} \times \sqrt{2 \times 5^2}}{\sqrt{3 \times 7^2}} \text{ منه } B = \frac{40}{7} \in \mathbb{Q} \text{ أي } B = \frac{40\sqrt{3}}{7\sqrt{3}}$$

$$C = \frac{21\sqrt{2}}{7\sqrt{3}} \text{ أي } C = \frac{4 \times 3\sqrt{2} + 9\sqrt{2}}{7\sqrt{3}} \text{ أي } C = \frac{\sqrt{288} + \sqrt{162}}{\sqrt{147}} = \frac{\sqrt{2^5 \times 3^2} + \sqrt{2 \times 3^4}}{\sqrt{3 \times 7^2}} \text{ و منه } C = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \text{ أي } C = \sqrt{6} \notin \mathbb{Q} \text{ و منه } C = \sqrt{6} \in \mathbb{R}$$

$$D = \sqrt{\frac{4^{80} + 5 \times 2^{53} \times 4^{53}}{28 \times 2^{155}}} \text{ أي } D = \sqrt{\frac{4^{80} + 5 \times 8^{53}}{28 \times 2^{155}}} = \sqrt{\frac{4^{80} + 5 \times (2 \times 4)^{53}}{28 \times 2^{155}}} \text{ و منه } D = \sqrt{\frac{2^{54} + 5 \times 2^{53}}{28 \times 2^{49}}} \text{ أي } D = \sqrt{\frac{2^{106} (2^{54} + 5 \times 2^{53})}{28 \times 2^{155}}} \text{ أي } D = \sqrt{\frac{2^{160} + 5 \times 2^{53} \times 2^{106}}{28 \times 2^{155}}} \text{ أي } D = \sqrt{\frac{2^2 \times 2^2 \times 7}{2^2 \times 7}} \text{ و منه } D = \sqrt{\frac{2^4 \times 7}{2^2 \times 7}} \text{ أي } D = \sqrt{\frac{2^4 \times 7}{28}} \text{ أي } D = \sqrt{\frac{2^{53} (2 + 5)}{28 \times 2^{49}}} \text{ و منه نجد } D = \sqrt{2^2} \text{ أي } D = 2 \in \mathbb{N}$$

$$L = \sqrt{\frac{2^{12} (1 + 2^{10})}{2^{20} (1 + 2^{10})}} \text{ أي } L = \sqrt{\frac{2^{12} + 2^{22}}{2^{30} + 2^{20}}} \text{ أي } L = \sqrt{\frac{8^4 + 4^{11}}{8^{10} + 4^{10}}} = \sqrt{\frac{(2^3)^4 + (2^2)^{11}}{(2^3)^{10} + (2^2)^{10}}} \text{ و منه نجد } L = \frac{1}{2^4} \text{ أي } L = \sqrt{\frac{1}{2^8}} \text{ أي } L = \sqrt{\frac{2^{12}}{2^{20}}} \text{ (لأن } 16 = 2^4 \text{) } L = \frac{1}{16} \in \mathbb{D}$$

$$. K = \frac{7}{3} \in \mathbb{Q} \text{ أي } K = \frac{7\pi + 14}{3\pi + 6} = \frac{7(\pi + 2)}{3(\pi + 2)}$$

التمرين رقم 09 :

حل المعادلات التالية ذات المجهول x ثم عين أصغر مجموعة ينتمي إليها ذلك الحل :

$$(2x-7)(\sqrt{2}x-\sqrt{8})=0 \text{ /3 } \left(x-\frac{3}{2}\right)^2=2 \text{ /2 } (x+1)^2=4 \text{ /1}$$

$$(7x-1)(2x-5)+(2x-1)(7x-1)=0 \text{ /5 } (2x+5)^2=-9 \text{ /4}$$

$$(3x-4)(2x-\pi)=(3x-4)(x+\pi) \text{ /6}$$

حل مقترح :

$$\text{ /1 } (x+1)^2=4 \text{ أي } (x+1)^2=2^2 \text{ و منه } x+1=2 \text{ أو } x+1=-2 \text{ و منه } x=1 \in \mathbb{N} \text{ أو}$$

$$. x=-3 \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ /2 } \left(x-\frac{3}{2}\right)^2=2 \text{ أي } \left(x-\frac{3}{2}\right)^2=(\sqrt{2})^2 \text{ و منه } x-\frac{3}{2}=\sqrt{2} \text{ أو } x-\frac{3}{2}=-\sqrt{2} \text{ و منه}$$

$$. x=\frac{3}{2}+\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \text{ أي } x=\frac{3}{2}+\sqrt{2} \in \mathbb{R} \text{ أو } x=\frac{3}{2}-\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \text{ أي } x=\frac{3}{2}-\sqrt{2} \in \mathbb{R}$$

$$\text{ /3 } (2x-7)(\sqrt{2}x-\sqrt{8})=0 \text{ و منه } 2x-7=0 \text{ أي } x=\frac{7}{2} \in \mathbb{D} \text{ أو } \sqrt{2}x-\sqrt{8}=0 \text{ و منه}$$

$$. x=2 \in \mathbb{N} \text{ أي } x=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \text{ و منه } x=\frac{\sqrt{2^3}}{\sqrt{2}} \text{ أي } x=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$$

/4 $(2x+5)^2=-9$ نلاحظ أن الطرف الأيسر لهذه المعادلة موجب الإشارة بينما الطرف الأيمن سالب الإشارة

و منه فالمعادلة $(2x+5)^2 = -9$ لا تقبل حلا في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

5 / $(7x-1)(2x-5) + (2x-1)(7x-1) = 0$ وبالتحليل إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى نجد :

$$(7x-1)[(2x-5) + (2x-1)] = 0 \text{ أي } (7x-1)(4x-6) = 0 \text{ و منه :}$$

$$7x-1=0 \text{ أي } x=\frac{1}{7} \in \mathbb{Q} \text{ أو } 4x-6=0 \text{ أي } x=\frac{6}{4} \text{ أي } x=\frac{3}{2} \in \mathbb{D} .$$

6 / $(3x-4)(2x-\pi) = (3x-4)(x+\pi)$ و منه $(3x-4)(2x-\pi) - (3x-4)(x+\pi) = 0$

و بالتحليل إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى نجد : $(3x-4)[(2x-\pi) - (x+\pi)] = 0$ أي

$$(3x-4)(x-2\pi) = 0 \text{ و منه يكون : } 3x-4=0 \text{ أي } x=\frac{4}{3} \in \mathbb{Q} \text{ أو } x-2\pi=0 \text{ أي}$$

$$x=2\pi \notin \mathbb{Q} \text{ (أصم) و منه } x=2\pi \in \mathbb{R} .$$

التمرين رقم 10 :

عين الكتابة الكسرية للأعداد الناطقة التالية إنطلاقا من الكتابة العشرية الدورية :

$$C = 5.\underline{24}5245245\dots \quad ; \quad B = 34.\underline{21}2121\dots \quad ; \quad A = 0.\underline{14}1414\dots$$

حل مقترح :

$A = 0.\underline{14}1414\dots$ و منه $A = 0 + 0.\underline{14}1414\dots$. نضع $x = 0.\underline{14}1414\dots$ فيصبح لدينا :

$$. A = 0 + x$$

نضرب المعادلة $x = 0.\underline{14}1414\dots$ في 10^2 (لأن عدد أرقام الدور هو 2) فنحصل على :

$$100x = 14.1414\dots \text{ أي } 100x = 14 + 0.\underline{14}1414\dots \text{ و منه } 100x = 14 + x \text{ لأن } 0.1414\dots = x$$

$$100x = 14 + x \text{ معناه } 100x - x = 14 \text{ أي } 99x = 14 \text{ و منه نجد : } x = \frac{14}{99} .$$

$$\underline{\text{إذن : }} A = 0 + \frac{14}{99} \text{ و عليه نتحصل على } A = \frac{14}{99} .$$

$$B = 34.\underline{21}2121... \text{ و منه } B = 34 + 0.\underline{21}2121... \text{ نضع } x = 0.\underline{21}2121... \text{ فيصبح لدينا :}$$

$$. B = 34 + x$$

$$\text{نضرب المعادلة } x = 0.\underline{21}2121... \text{ في } 10^2 \text{ (لأن عدد أرقام الدور هو 2) فتتوصل على :}$$

$$100x = 21.\underline{21}2121... \text{ أي } 100x = 21 + 0.\underline{21}2121... \text{ و منه } 100x = 21 + x \text{ لأن}$$

$$. x = 0.\underline{21}2121...$$

$$100x = 21 + x \text{ معناه } 100x - x = 21 \text{ أي } 99x = 21 \text{ و منه نجد : } x = \frac{21}{99} .$$

$$\underline{\text{إذن : }} B = 21 + \frac{21}{99} \text{ و عليه نتحصل على } B = \frac{34 \times 99 + 21}{99} \text{ أي } B = \frac{3387}{99} .$$

$$C = 5.\underline{245}245245... \text{ و منه } C = 5 + 0.\underline{245}245245... \text{ نضع } x = 0.\underline{245}245245... \text{ فيصبح}$$

$$\text{لدينا : } C = 5 + x$$

$$\text{نضرب المعادلة } x = 0.\underline{245}245245... \text{ في } 10^3 \text{ (لأن عدد أرقام الدور هو 3) فتتوصل على :}$$

$$1000x = 245.\underline{245}245... \text{ أي } 1000x = 245 + 0.\underline{245}245... \text{ و منه } 1000x = 245 + x \text{ لأن}$$

$$. x = 0.\underline{245}245...$$

$$1000x = 245 + x \text{ معناه } 1000x - x = 245 \text{ أي } 999x = 245 \text{ و منه نجد : } x = \frac{245}{999} .$$

إذن : $C = 5 + \frac{245}{999}$ و عليه نتحصل على $C = \frac{5 \times 999 + 245}{999}$ أي $C = \frac{5240}{999}$.

التمرين رقم 11 : أكل الفراغ بأحد الرمزين $\in$ أو $\notin$:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \dots \mathbb{Q} ; \sqrt{2} \dots \mathbb{R} ; 3 \times 10^2 \dots \mathbb{N} ; \frac{16}{4} \dots \mathbb{N} ; \frac{1}{3} \dots \mathbb{Q} ; 4.5 \dots \mathbb{Z} ; \frac{1}{2} \dots \mathbb{N} ; -4 \dots \mathbb{N}$$

$$\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}-1} \dots \mathbb{Z} ; \frac{75}{15} \dots \mathbb{N} ; \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{18}} \dots \mathbb{Q} ; \sqrt{0.25} \dots \mathbb{Q} ; \frac{\pi}{2} \dots \mathbb{Q}$$

حل مقترح :

$$-4 \notin \mathbb{N} \text{ لأن } -4 \text{ عدد سالب .}$$

$$\frac{1}{2} \notin \mathbb{N} \text{ لأن } \frac{1}{2} = 0.5 \notin \mathbb{N} .$$

$$4.5 \notin \mathbb{Z} \text{ (العدد غير صحيح)}$$

$$\frac{1}{3} \in \mathbb{Q} \text{ لأن العدد } \frac{1}{3} \text{ كسري يكتب من الشكل } \frac{p}{q} \text{ بحيث } p \text{ عدد صحيح نسبي و } q \text{ عدد صحيح نسبي } \neq 0 .$$

$$\frac{16}{4} \in \mathbb{N} \text{ لأن } \frac{16}{4} = 4 \in \mathbb{N} .$$

$$3 \times 10^2 \in \mathbb{N} \text{ لأن } 3 \times 10^2 = 300 \in \mathbb{N} .$$

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{R} \text{ لأن جميع الأعداد المدروسة خلال السنة الأولى ثانوي هي أعداد حقيقية .}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \notin \mathbb{Q} \text{ لأن } \sqrt{3} \text{ عدد أصم (} \sqrt{3} \notin \mathbb{Q} \text{)}$$

$$\frac{\pi}{2} \notin \mathbb{Q} \text{ لأن } \pi \text{ عدد أصم (} \pi \notin \mathbb{Q} \text{)}$$

$$\sqrt{0.25} \in \mathbb{Q} \text{ لأن } \sqrt{0.25} = 0.5 \in \mathbb{Q} .$$

$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{2^3}}{\sqrt{2 \times 3^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{2}{3} \in \mathbb{Q} \text{ لأن } \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{18}} \in \mathbb{Q}$$

$$\frac{75}{15} = 5 \in \mathbb{N} \text{ لأن } \frac{75}{15} \in \mathbb{N}$$

$$\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}-1} \in \mathbb{Z} \text{ لأنه بتوحيد المقامات نجد :}$$

$$\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{2-\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{-(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1}$$

$$\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}-1} = -1 \in \mathbb{Z} .$$

التمرين رقم 12 :

لتكن الأعداد التالية : 2.503 ، 5×10^{-2} ، $0.\underline{3}...$ ، $\frac{1}{2000}$ ، $-\frac{7}{3 \times 10^{-2}}$ ، $\sqrt{4\pi}$

هل الأعداد السابقة هي أعداد عشرية ؟

حل مقترح :

$$2.503 \in \mathbb{D} \text{ لأن الفاصلة منتهية أو يمكن الإجابة كما يلي : } 2.503 = \frac{2503}{1000} = \frac{2503}{10^3} \in \mathbb{D}$$

$$5 \times 10^{-2} \in \mathbb{D} \text{ لأن } 5 \times 10^{-2} = \frac{5}{10^2} \in \mathbb{D} .$$

$0.\underline{3}...$ هي كتابة عشرية دورية (الدور هو 3) و هي ذات فاصلة غير منتهية (أي أن الجزء العشري غير منته)

و منه يكون : $0.\underline{3}... \notin \mathbb{D} .$

من الواضح أن الكسر $\frac{1}{2000}$ غير قابل للاختزال ؛ نقوم بتحليل المقام إلى جداء عوامل أولية فنجد

$$2000 = 2^4 \times 5^3 \text{ أي أن تحليل المقام لا يشمل على عوامل أولية تختلف عن } 2 \text{ و تختلف عن } 5 \text{ ؛ إذن العدد}$$

$$\frac{1}{2000} \text{ عشري .}$$

$$- \frac{7}{3 \times 10^{-2}} = - \frac{7 \times 10^2}{3} = - \frac{700}{3} \text{ ؛ من الواضح أن الكسر } - \frac{700}{3} \text{ غير قابل للاختزال ؛ نقوم بتحليل المقام}$$

إلى جداء عوامل أولية فنجد $3 = 3^1$ و منه فالتحليل يشمل على عدد أولي يختلف عن 2 و يختلف عن 5 فهو إذن عدد غير عشري .

$$\sqrt{4\pi} \notin \mathbb{D} \text{ لأن } \sqrt{4\pi} = \sqrt{4} \times \sqrt{\pi} = 2\sqrt{\pi} \notin \mathbb{D} \text{ (} \pi \text{ عدد أصم)}$$

التمرين رقم 13 :

$$1/ \text{ بسط ما يلي : } \sqrt{28} \text{ ، } \sqrt{32} \text{ ، } \sqrt{40} \text{ ، } \sqrt{63} \text{ ، } \sqrt{75} \text{ ، } \sqrt{243} .$$

$$2/ \text{ بسط الكتابات التالية : } A = 2\sqrt{20} + 3\sqrt{50} - 10\sqrt{18} \text{ ، } B = \sqrt{12} + 2\sqrt{20} - 7\sqrt{27} - \sqrt{75}$$

$$\text{ ، } C = 3\sqrt{147} - 2\sqrt{144} + \sqrt{75} \text{ ، } D = \sqrt{\frac{7}{5}} \times \sqrt{\frac{343}{125}}$$

حل مقترح :

$$1/ \text{ تبسيط ما يلي : } \sqrt{28} \text{ ، } \sqrt{32} \text{ ، } \sqrt{40} \text{ ، } \sqrt{63} \text{ ، } \sqrt{75} \text{ ، } \sqrt{243} .$$

$$\text{نحلل العدد } 28 \text{ إلى جداء عوامل أولية فنجد : } 28 = 2^2 \times 7 \text{ و منه } \sqrt{28} = \sqrt{2^2 \times 7} = 2\sqrt{7} .$$

$$\text{نحلل العدد } 32 \text{ إلى جداء عوامل أولية فنجد : } 32 = 2^5 \text{ و منه } \sqrt{32} = \sqrt{2^5} = 2^2 \sqrt{2} = 4\sqrt{2} .$$

نحلل العدد 40 إلى جداء عوامل أولية فنجد : $40 = 2^3 \times 5$ و منه

$$\sqrt{40} = \sqrt{2^3 \times 5} = 2\sqrt{2 \times 5} = 2\sqrt{10}$$

نحلل العدد 75 إلى جداء عوامل أولية فنجد : $75 = 3 \times 5^2$ و منه $\sqrt{75} = \sqrt{3 \times 5^2} = 5\sqrt{3}$

نحلل العدد 243 إلى جداء عوامل أولية فنجد : $243 = 3^5$ و منه $\sqrt{243} = \sqrt{3^5} = 3^2 \sqrt{3} = 9\sqrt{3}$

2/ تبسيط الكتابات التالية :

$A = 2\sqrt{20} + 3\sqrt{50} - 10\sqrt{18}$: بالتحليل إلى جداء عوامل أولية نتحصل على :

$$20 = 2^2 \times 5, 50 = 2 \times 5^2, 18 = 2 \times 3^2 \text{ و منه :}$$

$$A = 2\sqrt{20} + 3\sqrt{50} - 10\sqrt{18} = 2\sqrt{2^2 \times 5} + 3\sqrt{2 \times 5^2} - 10\sqrt{2 \times 3^2}$$

$$A = 4\sqrt{5} + 15\sqrt{2} - 30\sqrt{2} \text{ و منه } A = 4\sqrt{5} - 15\sqrt{2} .$$

$B = \sqrt{12} + 2\sqrt{20} - 7\sqrt{27} - \sqrt{75}$: بالتحليل إلى جداء عوامل أولية نتحصل على :

$$12 = 2^2 \times 3, 20 = 2^2 \times 5, 27 = 3^3, 75 = 3 \times 5^2 \text{ و منه :}$$

$$B = \sqrt{12} + 2\sqrt{20} - 7\sqrt{27} - \sqrt{75} = \sqrt{2^2 \times 3} + 2\sqrt{2^2 \times 5} - 7\sqrt{3^3} - \sqrt{3 \times 5^2}$$

$$B = 2\sqrt{3} + 4\sqrt{5} - 21\sqrt{3} - 5\sqrt{3} \text{ و منه } B = 4\sqrt{5} - 24\sqrt{3} .$$

$C = 3\sqrt{147} - 2\sqrt{144} + \sqrt{75}$: بالتحليل إلى جداء عوامل أولية نتحصل على :

$$147 = 3 \times 7^2, 144 = 2^4 \times 3^2, 75 = 3 \times 5^2 \text{ و منه :}$$

$$C = 3\sqrt{147} - 2\sqrt{144} + \sqrt{75} = 3\sqrt{3 \times 7^2} - 2\sqrt{2^4 \times 3^2} + \sqrt{3 \times 5^2}$$

$$C = 21\sqrt{3} - 2 \times 2^2 \times 3 + 5\sqrt{3} \text{ و منه } C = 26\sqrt{3} - 24 .$$

بالتحليل إلى جداء عوامل أولية للعددين 343 و 125 نتحصل على : $343 = 7^3$ و $125 = 5^3$ إذن :

$$D = \sqrt{\frac{7^2}{5^2}} \times \frac{7}{5} \text{ و } D = \sqrt{\frac{7}{5}} \times \frac{7}{5} \times \sqrt{\frac{7}{5}} \text{ أي } D = \sqrt{\frac{7}{5}} \times \sqrt{\frac{343}{125}} = \sqrt{\frac{7}{5}} \times \sqrt{\frac{7^3}{5^3}}$$

$$D = \frac{7}{5} \times \frac{7}{5} \text{ و منه نجد } D = \frac{49}{25} .$$

التمرين رقم 14 :

أنشر ثم إختزل ما يلي : $(2 + \sqrt{3})^2$ ؛ $(6 - \sqrt{2})(6 + \sqrt{2})$ ؛ $(2 + \sqrt{3})(1 + \sqrt{2})$ ؛

حل مقترح :

$$(2 + \sqrt{3})^2 = 2^2 + 2 \times 2 \times \sqrt{3} + \sqrt{3}^2 \text{ أي } (2 + \sqrt{3})^2 = 4 + 4\sqrt{3} + 3 \text{ و منه نتحصل على :}$$

$$(2 + \sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3} .$$

$$(6 - \sqrt{2})(6 + \sqrt{2}) = 6^2 - \sqrt{2}^2 \text{ أي } (6 - \sqrt{2})(6 + \sqrt{2}) = 36 - 2 \text{ و منه نتحصل على :}$$

$$(6 - \sqrt{2})(6 + \sqrt{2}) = 34 .$$

$$(2 + \sqrt{3})(1 + \sqrt{2}) = 2 \times 1 + 2 \times \sqrt{2} + \sqrt{3} \times 1 + \sqrt{3} \times \sqrt{2}$$

$$(2 + \sqrt{3})(1 + \sqrt{2}) = \sqrt{6} + \sqrt{3} + 2\sqrt{2} + 2 .$$

التمرين رقم 15 :

$$A = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} - \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} \text{ يعطى العدد}$$

$$1 / \text{أحسب العدد } A^2 .$$

2/ إستنتج قيمة مبسطة لـ A .

حل مقترح :

1/ لدينا $A = \sqrt{7+4\sqrt{3}} - \sqrt{7-4\sqrt{3}}$ و منه يكون : $A^2 = \left(\sqrt{7+4\sqrt{3}} - \sqrt{7-4\sqrt{3}} \right)^2$ و باستعمال

النشر بالمطابقات الشهيرة نجد $A^2 = \sqrt{7+4\sqrt{3}}^2 - 2\sqrt{7+4\sqrt{3}} \times \sqrt{7-4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}^2$ أي

$$A^2 = 7 + 4\sqrt{3} - 2\sqrt{(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})} + 7 - 4\sqrt{3}$$

$$A^2 = 14 - 2\sqrt{7^2 - (4\sqrt{3})^2} \quad \text{أي} \quad A^2 = 14 - 2\sqrt{(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})}$$

$$A^2 = 14 - 2\sqrt{49 - 48} \quad \text{و منه} \quad A^2 = 14 - 2\sqrt{1} \quad \text{أي} \quad A^2 = 14 - 2 \quad \text{؛ إذن : } A^2 = 12$$

2/ إستنتاج قيمة مبسطة لـ A : من السؤال 1/ نعلم أن $A^2 = 12$ و بإدخال الجذر على الطرفين نتحصل على :

$$\sqrt{A^2} = \sqrt{12} \quad \text{أي} \quad A = \sqrt{12} \quad \text{؛ لكن} \quad 12 = 2^2 \times 3 \quad \text{؛ إذن} \quad A = \sqrt{2^2 \times 3} \quad \text{و منه} \quad A = 3\sqrt{2}$$

التمرين رقم 16 :

أجب مع تعليل الإجابة :

$$1/ \text{ هل العدد } X = \frac{330}{396} \text{ عشري ؟ (لا تستعمل الآلة الحاسبة)}$$

$$2/ \text{ هل العدد } Y = \frac{266}{560} \text{ عشري ؟ (لا تستعمل الآلة الحاسبة)}$$

حل مقترح :

$$1/ \text{ العدد } X = \frac{330}{396} \text{ غير عشري :}$$

أولا نكتب العدد $X = \frac{330}{396}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال ؛ من أجل ذلك نعين $PGCD(330;396)$:

نحلل العددين 330 و 396 إلى جداء عوامل أولية فنجد : $330 = 2 \times 3 \times 5 \times 11$ و $396 = 2^2 \times 3^2 \times 11$

إذن : $PGCD(330;396) = 2 \times 3 \times 11 = 66$ و منه الشكل غير قابل للاختزال للكسر $\frac{330}{396}$ هو :

$$X = \frac{330}{396} = \frac{330 \cancel{/66}}{396 \cancel{/66}} = \frac{5}{6}$$

؛ ثانيا نقوم بتحليل مقام الكسر الناتج $\frac{5}{6}$ إلى جداء عوامل أولية فنجد $6 = 2 \times 3$

أي أنه يشتمل على العدد الأولي 3 الذي يختلف عن 2 و يختلف عن 5 و منه نستنتج أن العدد X هو عدد غير

عشري .

$$Y = \frac{266}{560} \text{ العدد } /2 \text{ عشري :}$$

أولا نكتب العدد $Y = \frac{266}{560}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال ؛ من أجل ذلك نعين $PGCD(266;560)$:

نحلل العددين 266 و 560 إلى جداء عوامل أولية فنجد : $266 = 2 \times 7 \times 19$ و $560 = 2^4 \times 5 \times 7$

إذن : $PGCD(266;560) = 2 \times 7 = 14$ و منه الشكل غير قابل للاختزال للكسر $\frac{266}{560}$ هو :

$$Y = \frac{266}{560} = \frac{266 \cancel{/14}}{560 \cancel{/14}} = \frac{19}{40}$$

؛ ثانيا نقوم بتحليل مقام الكسر الناتج $\frac{19}{40}$ إلى جداء عوامل أولية فنجد :

$40 = 2^3 \times 5$ أي أنه لا يشتمل على أي عدد أولي يختلف عن 2 و يختلف عن 5 و منه نستنتج أن العدد Y

هو عدد عشري .

التمرين رقم 17 :

1/ عين أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد A بحيث $A = (2 + \sqrt{2})^2 - 4\sqrt{2}$.

2/ عين أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد B بحيث $B = \frac{-3\sqrt{2^3 - 4}}{6}$.

3/ عين أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد C بحيث $C = \frac{2\pi}{5}$.

4/ عين أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد D بحيث $D = \sqrt{1 - \frac{7}{25}} \times \sqrt{1 + \frac{7}{25}}$.

حل مقترح :

1/ تعيين أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد A بحيث $A = (2 + \sqrt{2})^2 - 4\sqrt{2}$:

$$A = (2 + \sqrt{2})^2 - 4\sqrt{2} = 2^2 + 2 \times 2 \times \sqrt{2} + \sqrt{2}^2 - 4\sqrt{2} = 4 + 4\sqrt{2} + 2 - 4\sqrt{2} = 6$$

تتحصل على $A = 6$. إذن أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد A هي $\mathbb{N}$.

2/ تعيين أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد B بحيث $B = \frac{-3\sqrt{2^3 - 4}}{6}$:

$$B = \frac{-3\sqrt{2^3 - 4}}{6} = \frac{-3\sqrt{8 - 4}}{6} = \frac{-3\sqrt{4}}{6} = \frac{-3 \times 2}{6} = -1$$

و منه نتحصل على $B = -1$.

إذن أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد B هي $\mathbb{Z}$.

3/ تعيين أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد C بحيث $C = \frac{2\pi}{5}$:

نعلم أن π عدد أصم (غير ناطق) ومنه يكون : $C = \frac{2\pi}{5} \in \mathbb{R}$ أي أن أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد C هي

مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

4/ تعيين أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد D بحيث $D = \sqrt{1 - \frac{7}{25}} \times \sqrt{1 + \frac{7}{25}}$:

$$D = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{25}\right)^2} \quad \text{و منه نجد} \quad D = \sqrt{1 - \frac{7}{25}} \times \sqrt{1 + \frac{7}{25}} = \sqrt{\left(1 - \frac{7}{25}\right)\left(1 + \frac{7}{25}\right)}$$

(متطابقة ش)

$$\text{و منه ينتج : } D = \sqrt{1 - \frac{49}{625}} \quad \text{أي} \quad D = \sqrt{\frac{625 - 49}{625}} \quad \text{أي} \quad D = \frac{\sqrt{576}}{\sqrt{625}} \quad \text{و منه} \quad D = \frac{24}{25} .$$

باستعمال الآلة الحاسبة نتحصل على $D = 0.96$ أي أن أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد D هي مجموعة الأعداد العشرية

ⓓ (أو باستعمال الخاصية المميزة لعدد عشري) .

التمرين رقم 18 :

$$X = \frac{108^5 \times 1125^{-2}}{(-2)^4 \times (-5^3)^{-4}} \quad \text{و} \quad Y = \frac{\sqrt{225} \times 3\sqrt{12}}{\sqrt{24} \times \sqrt{135}}$$

إختزل العددين :

حل مقترح :

نحلل العددين 108 و 1125 إلى جداء عوامل أولية : $108 = 2^2 \times 3^3$ و $1125 = 3^2 \times 5^3$ إذن :

$$X = \frac{108^5 \times 1125^{-2}}{(-2)^4 \times (-5^3)^{-4}} \quad \text{أي} \quad X = \frac{2^{10} \times 3^{15} \times 3^{-4} \times 5^{-6}}{(-2)^4 \times (-5^3)^{-4}} \quad \text{و منه}$$

$$X = \frac{2^{10} \times 3^{11} \times 5^{-6} \times 5^{12}}{2^4} \quad \text{أي} \quad X = \frac{2^{10} \times 3^{11} \times 5^{-6} \times (-5^3)^4}{2^4} \quad \text{لأن 4 عدد زوجي ، و منه نجد}$$

$$X = 2^6 \times 3^{11} \times 5^6 \quad \text{أي} \quad X = (2 \times 5)^6 \times 3^{11} \quad \text{أي} \quad X = 10^6 \times 3^{11} .$$

نحلل الأعداد 225 ، 12 ، 24 و 135 إلى جداء عوامل أولية :

$$225 = 3^2 \times 5^2 \quad \text{و} \quad 12 = 2^2 \times 3 \quad \text{و} \quad 24 = 2^3 \times 3 \quad \text{و} \quad 135 = 3^3 \times 5 \quad \text{إذن :}$$

$$Y = \frac{3 \times 5 \times 3 \times 2\sqrt{3}}{2\sqrt{2 \times 3} \times 3\sqrt{3 \times 5}} \text{ أي } Y = \frac{\sqrt{225} \times 3\sqrt{12}}{\sqrt{24} \times \sqrt{135}} = \frac{\sqrt{3^2 \times 5^2} \times 3\sqrt{2^2 \times 3}}{\sqrt{2^3 \times 3} \times \sqrt{3^3 \times 5}}$$

$$Y = \frac{\sqrt{15} \times \sqrt{15}}{\sqrt{2} \times \sqrt{15}} \text{ أي } Y = \frac{15}{\sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{5}} \text{ أي } Y = \frac{90\sqrt{3}}{6\sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{5}}$$

$$Y = \sqrt{\frac{15}{2}} \text{ أي } Y = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{2}}$$

التمرين رقم 19 : عين طبيعة كل من الأعداد التالية :

$$C = \sqrt{6^2 \times 8} - \sqrt{288} \quad , \quad B = \frac{\sqrt{75} + \sqrt{49}}{2} \quad , \quad A = \frac{4 \times 75 \times 13}{26 \times 2^5 \times 5^3}$$

حل مقترح :

نحلل الأعداد 75 و 26 إلى جداء عوامل أولية فنجد : $4 = 2^2$ و $75 = 3 \times 5^2$ و $26 = 2 \times 13$.

$$\text{إذن : } A = \frac{4 \times 75 \times 13}{26 \times 2^5 \times 5^3} = \frac{2^2 \times 3 \times 5^2 \times 13}{2 \times 13 \times 2^5 \times 5^3} = \frac{3}{2^4 \times 5} = \frac{3}{80}$$

العدد $\frac{3}{80}$ هو كسر غير قابل للاختزال ؛ نحلل المقام 80 إلى جداء عوامل أولية فتحصل على :

$80 = 2^4 \times 5$ أي أن تحليل المقام إلى جداء عوامل أولية لا يشتمل على عدد أولي يختلف عن 2 و يختلف عن

5 إذن : $\frac{3}{80} \in \mathbb{D}$ ؛ و منه نستنتج أن : $A \in \mathbb{D}$ (عدد عشري)

نحلل العددين 75 و 49 إلى جداء عوامل أولية فنجد : $75 = 3 \times 5^2$ و $49 = 7^2$ إذن :

$$B = \frac{\sqrt{75} + \sqrt{49}}{2} = \frac{\sqrt{3 \times 5^2} + \sqrt{7^2}}{2} \text{ و منه } B = \frac{5\sqrt{3} + 7}{2} \text{ و منه } B \text{ عدد أصم (} B \notin \mathbb{Q} \text{ أي } B \in \mathbb{R} \text{) .}$$

لدينا $6^2 \times 8 = 288$ و منه $C = \sqrt{6^2 \times 8} - \sqrt{288} = \sqrt{288} - \sqrt{288} = 0$ ؛ إذن أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد C هي مجموعة الأعداد الطبيعية أي $C \in \mathbb{N}$.

التمرين رقم 20 : ليكن العدد : $A = \sqrt{\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}}$

1/ أنشر $(2+\sqrt{3})^2$ و $(2-\sqrt{3})^2$.

2/ إستنتج أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد A .

حل مقترح :

1/ نشر $(2+\sqrt{3})^2$ و $(2-\sqrt{3})^2$:

$$(2-\sqrt{3})^2 = 7-4\sqrt{3} \text{ و منه } (2-\sqrt{3})^2 = 2^2 - 2 \times 2 \times \sqrt{3} + \sqrt{3}^2$$

$$(2+\sqrt{3})^2 = 7+4\sqrt{3} \text{ و منه } (2+\sqrt{3})^2 = 2^2 + 2 \times 2 \times \sqrt{3} + \sqrt{3}^2$$

2/ إستنتج أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد A :

لدينا $A = \sqrt{\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}}$ و من السؤال 1/ نعلم أن $7-4\sqrt{3} = (2-\sqrt{3})^2$ و

$$A = \sqrt{\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}} = \sqrt{(2+\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3})} \text{ إذن يكون } 7+4\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^2$$

؛ و منه $A = \sqrt{4} = 2$. إذن أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد A هي $\mathbb{N}$.

التمرين رقم 21 : أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل :

1/ العدد $\frac{\pi}{3.14}$ طبيعي .

$$2/ \text{ العدد } \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ صحيح نسبي .}$$

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{2}{1 + \sqrt{3}} \quad /3$$

$$\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{2} \quad /4$$

حل مقترح :

$$1/ \text{ خطأ لأن } \pi \neq 3.14 \text{ (عدد أصم) } \pi \text{ و منه فالعدد } \frac{\pi}{3.14} \text{ ليس طبيعيا .}$$

$$2/ \text{ خطأ لأن } \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$$

$$3/ \text{ صحيح لأن } 1 + \frac{2}{1 + \sqrt{3}} = 1 + \frac{2 \times (1 - \sqrt{3})}{(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})} = 1 + \frac{2 - 2\sqrt{3}}{1^2 - \sqrt{3}^2}$$

$$1 + \frac{2}{1 + \sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3} - 1 \text{ أي } 1 + \frac{2}{1 + \sqrt{3}} = 1 + \frac{2(1 - \sqrt{3})}{-2} \text{ و منه } 1 + \frac{2}{1 + \sqrt{3}} = 1 + \frac{2 - 2\sqrt{3}}{-2}$$

$$\cdot 1 + \frac{2}{1 + \sqrt{3}} = \sqrt{3} \text{ منه نجد}$$

$$4/ \text{ صحيح لأن } \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} \text{ أي } \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3}^2 - \sqrt{2}^2} \text{ و منه}$$

$$\cdot \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{2} \text{ أي } \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{3 - 2}$$

التمرين رقم 22 : أكتب على أبسط شكل ممكن العبارات التالية :

$$B = \frac{(-2)^5 \times (-5)^8 \times (-9)^3}{(-6)^4 \times (30)^5} \times \frac{(-18)^7 \times (-2)^4 \times (-50)^3}{(-25)^6 \times (-4)^5 \times (-27)^2} \quad , \quad A = 49^{-4} \times 35^8 \times 25^{-3}$$

$$D = \frac{15^{-4} \times 18^7}{25^{-3} \times 16^{-3}} \quad \text{و} \quad C = \left(\frac{5}{7}\right)^{-4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^8 \times (3 \times 5)^6$$

حل مقترح :

نحلل إلى جداء عوامل أولية الأعداد 49 ، 35 و 25 فنجد $49 = 7^2$ و $35 = 5 \times 7$ و $25 = 5^2$.

ومنه $A = 49^{-4} \times 35^8 \times 25^{-3} = (7^2)^{-4} \times (5 \times 7)^8 \times (5^2)^{-3}$ أي $A = 7^{-8} \times 5^8 \times 7^8 \times 5^{-6}$ ومنه

$$A = 5^2 = 25$$

$$B = \frac{(-2)^5 \times (-5)^8 \times (-9)^3}{(-6)^4 \times (30)^5} \times \frac{(-18)^7 \times (-2)^4 \times (-50)^3}{(-25)^6 \times (-4)^5 \times (-27)^2} \quad \text{و منه نجد}$$

$$B = \frac{-2^5 \times 5^8 \times -9^3}{6^4 \times 30^5} \times \frac{-18^7 \times 2^4 \times (-50^3)}{25^6 \times (-4^5) \times 27^2} \quad \text{و بالتحليل إلى جداء عوامل أولية نتحصل على :}$$

$$B = \frac{-2^5 \times 5^8 \times (-(3^2)^3)}{(2 \times 3)^4 \times (2 \times 3 \times 5)^5} \times \frac{-(2 \times 3^2)^7 \times 2^4 \times (-(2 \times 5^2)^3)}{(5^2)^6 \times (-(2^2)^5) \times (3^3)^2} \quad \text{أي}$$

$$B = -\frac{5^3}{2^4 \times 3^3} \times \frac{2^4 \times 3^8}{5^6} \quad \text{و منه} \quad B = \frac{2^5 \times 5^8 \times 3^6}{2^4 \times 3^4 \times 2^5 \times 3^5 \times 5^5} \times \frac{2^7 \times 3^{14} \times 2^4 \times 2^3 \times 5^6}{-5^{12} \times 2^{10} \times 3^6}$$

$$B = -\frac{3^5}{5^3} \quad \text{و منه نجد} \quad B = -\frac{243}{125}$$

$$C = \left(\frac{5}{7}\right)^{-4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^8 \times (3 \times 5)^6 = \frac{5^{-4}}{7^{-4}} \times \frac{3^8}{4^8} \times 3^6 \times 5^6 \quad \text{أي} \quad C = 7^4 \times \frac{3^{14}}{4^8} \times 5^2 \quad \text{و منه}$$

$$C = 4^{-8} \times 3^{14} \times 5^2 \times 7^4$$

$$D = \frac{3^{-4} \times 5^{-4} \times 2^7 \times 3^{14}}{5^{-6} \times 2^{-12}} \text{ أي } D = \frac{15^{-4} \times 18^7}{25^{-3} \times 16^{-3}} = \frac{(3 \times 5)^{-4} \times (2 \times 3^2)^7}{(5^2)^{-3} \times (2^4)^{-3}}$$

$$D = 2^{19} \times 3^{10} \times 5^2$$

التمرين رقم 23 :

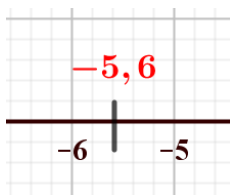
أنقل ثم أكل الجدول الآتي :

الكتابة العشرية	الكتابة العلمية	رتبة مقدار
0,00452		
	$2,011 \times 10^3$	
-80,25		
	$-5,6 \times 10^3$	
4300000		

حل مقترح :

الكتابة العشرية	الكتابة العلمية	رتبة مقدار
0,00452	$4,524 \times 10^{-3}$	5×10^{-3}
2011	$2,011 \times 10^3$	2×10^3
-80,25	$-8,025 \times 10$	-8×10
-5600	$-5,6 \times 10^3$	-6×10^3
4300000	$4,3 \times 10^6$	4×10^6

ملاحظة : بالنسبة لرتبة مقدار العدد -5600 وبعد كتابته على الشكل العلمي وجدنا : $-5,6 \times 10^3$ ولإيجاد رتبة



مقداره نعين أقرب عدد صحيح للعدد -5,6 فنجد -6 (وليس -5)

التمرين رقم 24 :

(1) A ، B و C أعداد حقيقية بحيث :

$$C = \frac{\frac{3}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{6}}{\frac{2}{3} + \frac{3}{2} - 1} \quad ; \quad B = \frac{(-3)^2 \times 9^6 \times 75^2}{3^8 \times 5^4} \quad ; \quad A = \frac{6\sqrt{288} \times \sqrt{75}}{\sqrt{90} \times \sqrt{20}}$$

1/ أكتب كلا من A ، B و C على أبسط شكل ممكن .

2/ بين أن العدد $7C$ طبيعي .

حل مقترح :

1/ نحلل الأعداد 288 و 75 و 20 و 90 إلى جداء عوامل أولية فنتحصل على :

$$90 = 2 \times 3^2 \times 5 \quad ; \quad 20 = 2^2 \times 5 \quad ; \quad 75 = 3 \times 5^2 \quad ; \quad 288 = 2^5 \times 3^2$$

$$\text{و منه نجد : } A = \frac{6\sqrt{288} \times \sqrt{75}}{\sqrt{90} \times \sqrt{20}} = \frac{6\sqrt{2^5 \times 3^2} \times \sqrt{3 \times 5^2}}{\sqrt{2 \times 3^2 \times 5} \times \sqrt{2^2 \times 5}}$$

$$A = \frac{6 \times 3 \times 4 \times 5 \sqrt{3}}{3 \times 5 \times 2} \quad \text{أي} \quad A = \frac{6 \times 3 \times 4 \sqrt{2} \times 5 \sqrt{3}}{3 \sqrt{2} \times \sqrt{5} \times 2 \sqrt{5}} \quad \text{أي} \quad A = \frac{6 \times 3 \times 4 \sqrt{2} \times 5 \sqrt{3}}{3 \sqrt{2 \times 5} \times 2 \sqrt{5}}$$

$$. \quad A = 12\sqrt{3}$$

نحلل الأعداد 9 و 75 إلى جداء عوامل أولية فنتحصل على :

$$. \quad 75 = 3 \times 5^2 \quad ; \quad 9 = 3^2$$

$$\text{و منه نجد : } B = \frac{3^2 \times 3^{12} \times 3^2 \times 5^4}{3^8 \times 5^4} \quad \text{أي} \quad B = \frac{(-3)^2 \times 9^6 \times 75^2}{3^8 \times 5^4} = \frac{3^2 \times (3^2)^6 \times (3 \times 5^2)^2}{3^8 \times 5^4}$$

$$. \quad B = 6561 \quad \text{أي} \quad B = 3^{16-8} = 3^8 \quad \text{و منه} \quad B = \frac{3^{16}}{3^8}$$

$$\text{نوجد المقامات بين الكسور فنتحصل على : } C = \frac{\frac{3}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{6}}{\frac{2}{3} + \frac{3}{2} - 1} = \frac{\frac{3 \times 3}{2 \times 3} - \frac{2 \times 2}{3 \times 2} + \frac{1}{6}}{\frac{2 \times 2}{3 \times 2} + \frac{3 \times 3}{2 \times 3} - \frac{1 \times 6}{1 \times 6}}$$

$$C = \frac{6}{7} \text{ أي } C = \frac{6}{7} \text{ و منه } C = \frac{6}{6} \times \frac{6}{7} \text{ إذن نجد : } C = \frac{6}{7} \text{ وهو كسر غير قابل للاختزال .}$$

2/ نبين أن العدد $7C$ طبيعي :

$$\text{نعلم بعد التبسيط أن : } C = \frac{6}{7} \text{ و منه يكون } 7C = 7 \times \frac{6}{7} \text{ أي : } 7C = 6 \text{ طبيعي .}$$

التمرين رقم 25 :

ليكن العددان الطبيعيان a و b بحيث :

$$b = \frac{(10^{-2})^2 \times 10^7 \times 5^{-3} \times (1,2)^2}{10^{-4} \times 8} \quad ; \quad a = \frac{4^2 \times 7^2 \times 112 \times (2^3)^2}{2^3}$$

1/ بسط كلا من a و b .

2/ عين القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b .

3/ أوجد الكتابة العلمية ثم رتبة مقدار العددين a و b .

حل مقترح :

1/ تبسيط العددين a و b :

$$a = \frac{4^2 \times 7^2 \times 112 \times 2^3 \times 2^3}{2^3} \text{ و منه نجد } a = \frac{4^2 \times 7^2 \times 112 \times (2^3)^2}{2^3}$$

و منه بتحليل العددين 4 و 112 إلى جداء عوامل أولية نجد : $4 = 2^2$ و $112 = 2^4 \times 7$ و منه يكون :

$$a = 2^{11} \times 7^3 \text{ أي } a = 2^{4+4+3} \times 7^{2+1} \text{ أي } a = (2^2)^2 \times 7^2 \times 2^4 \times 7 \times 2^3$$

$$b = \frac{10^{-4} \times 10^7 \times 5^{-3} \times (12 \times 10^{-1})^2}{10^{-4} \times 8} \text{ و منه نجد } b = \frac{(10^{-2})^2 \times 10^7 \times 5^{-3} \times (1,2)^2}{10^{-4} \times 8}$$

$$b = \frac{10^3 \times 5^{-3} \times 10^{-2} \times 12^2}{10^{-4} \times 8} \text{ أي } b = \frac{10^5 \times 5^{-3} \times 12^2}{8} \text{ و منه بتحليل الأعداد 10 ، 12 و 8 إلى جداء}$$

عوامل أولية نجد : $8 = 2^3$ و $12 = 2^2 \times 3$ و $10 = 2 \times 5$.

$$b = \frac{2^5 \times 5^5 \times 5^{-3} \times 2^4 \times 3^2}{2^3} \text{ أي } b = \frac{(2 \times 5)^5 \times 5^{-3} \times (2^2 \times 3)^2}{2^3} \text{ إذن : } b = 2^6 \times 3^2 \times 5^2$$

2/ تعيين القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b :

$PGCD(a; b)$ هو جداء العوامل الأولية المشتركة في تحليل العددين a و b مأخوذة مرة واحدة و بأصغر أس

$$\text{و منه نجد : } PGCD(a; b) = 2^6 \text{ أي } PGCD(a; b) = 64$$

3/ إيجاد الكتابة العلمية ثم رتبة مقدار العددين a و b :

$$\begin{cases} a = 702464 \\ b = 14400 \end{cases} \text{ و منه العدد } a \text{ يكتب على الشكل العلمي كما يلي :}$$

$$7,02464 \times 10^5 \text{ و بالتالي رتبة مقدار العدد } a \text{ هي : } 7 \times 10^5 \text{ لأن أقرب عدد صحيح إلى } 7,02464 \text{ هو } 7 .$$

و العدد b يكتب على الشكل العلمي كما يلي :

$$1,44 \times 10^4 \text{ و بالتالي رتبة مقدار العدد } b \text{ هي : } 1 \times 10^4 \text{ لأن أقرب عدد صحيح إلى } 1,44 \text{ هو } 1 .$$

التمرين رقم 26 :

1/ تحقق من أن : $\left(\sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2$ و $\left(\sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2$ هما عددان ناطقان .

2/ a عدد طبيعي . بين أن : $\left(\sqrt{a} - \sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2$ و $\left(\sqrt{a} + \sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2$ هما عددان ناطقان .

حل مقترح :

1/ التحقق من أن : $\left(\sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2$ و $\left(\sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2$ هما عددان ناطقان .

بالنشر ثم التبسيط نجد : $\left(\sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2 = \sqrt{\frac{3}{4}}^2 - 2\sqrt{\frac{3}{4}} \times \sqrt{\frac{4}{3}} + \sqrt{\frac{4}{3}}^2$ أي

$\left(\sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2 = \frac{3}{4} - 2\sqrt{1} + \frac{4}{3}$ أي $\left(\sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2 = \frac{3}{4} - 2 + \frac{4}{3}$

و بتوحيد المقامات (المقام المشترك هو 12) نجد : $\left(\sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2 = \frac{3}{4} - 2 + \frac{4}{3}$

أي $\left(\sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2 = \frac{9 - 24 + 16}{12}$ و منه نجد $\left(\sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2 = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} - \frac{2 \times 12}{12} + \frac{4 \times 4}{3 \times 4}$

$\left(\sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2 = \frac{1}{12} \in \mathbb{Q}$

بالنشر ثم التبسيط نجد : $\left(\sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2 = \sqrt{\frac{5}{2}}^2 - 2\sqrt{\frac{5}{2}} \times \sqrt{\frac{2}{5}} + \sqrt{\frac{2}{5}}^2$ أي

$$\left(\sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2 = \frac{5}{2} - 2\sqrt{1} + \frac{2}{5} \text{ أي } \left(\sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2 = \frac{5}{2} - 2\sqrt{\frac{5}{2} \times \frac{2}{5}} + \frac{2}{5}$$

$$\left(\sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2 = \frac{5}{2} - 2 + \frac{2}{5} \text{ و بتوحيد المقامات (المقام المشترك هو 10) نجد :}$$

$$\left(\sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2 = \frac{25 - 20 + 4}{10} \text{ أي } \left(\sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2 = \frac{5 \times 5}{2 \times 5} - \frac{2 \times 10}{10} + \frac{2 \times 2}{5 \times 2}$$

و منه نجد

$$\left(\sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2 = \frac{9}{10} \in \mathbb{Q}$$

$$a/2 \text{ عدد طبيعي . نبين أن : } \left(\sqrt{a} - \sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2 \text{ و } \left(\sqrt{a} + \sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2 \text{ هما عددان ناطقان .}$$

$$\left(\sqrt{a} - \sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2 = \sqrt{a}^2 - 2\sqrt{a} \times \sqrt{\frac{1}{a}} + \sqrt{\frac{1}{a}}^2 \text{ بالنشر ثم التبسيط نجد :}$$

$$\left(\sqrt{a} - \sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2 = a - 2\sqrt{1} + \frac{1}{a} \text{ أي } \left(\sqrt{a} - \sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2 = a - 2\sqrt{a \times \frac{1}{a}} + \frac{1}{a}$$

$$\left(\sqrt{a} - \sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2 = a - 2 + \frac{1}{a} \text{ و بتوحيد المقامات (المقام المشترك هو } a \text{) نجد :}$$

$$\left(\sqrt{a} - \sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2 = \frac{a^2 - 2a + 1}{a} \text{ أي } \left(\sqrt{a} - \sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2 = \frac{a \times a}{a} - \frac{2 \times a}{a} + \frac{1}{a}$$

و منه نجد

$$\left(\sqrt{a} - \sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2 = \frac{(a-1)^2}{a} \text{ لأن } a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2 \text{ و منه فالعدد } \left(\sqrt{a} - \sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2 \text{ ناطق .}$$

بالنشر ثم التبسيط نجد : $\left(\sqrt{a} + \sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2 = \sqrt{a}^2 + 2\sqrt{a} \times \sqrt{\frac{1}{a}} + \sqrt{\frac{1}{a}}^2$ أي

$\left(\sqrt{a} + \sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2 = a + 2\sqrt{1} + \frac{1}{a}$ أي $\left(\sqrt{a} + \sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2 = a + 2\sqrt{a \times \frac{1}{a}} + \frac{1}{a}$

و بتوحيد المقامات (المقام المشترك هو a) نجد : $\left(\sqrt{a} + \sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2 = a + 2 + \frac{1}{a}$

أي $\left(\sqrt{a} + \sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2 = \frac{a^2 + 2a + 1}{a}$ و منه نجد $\left(\sqrt{a} + \sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2 = \frac{a \times a}{a} + \frac{2 \times a}{a} + \frac{1}{a}$

$\left(\sqrt{a} + \sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2 = \frac{(a+1)^2}{a}$ لأن $a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2$ و منه فالعدد $\left(\sqrt{a} + \sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2$ ناطق .

التمرين رقم 27 :

أنقل ثم أتمم الجدول التالي :

العدد	المدور إلى 10^{-1}	المدور إلى 10^{-3}	الكتابة العلمية	رتبة مقدار العدد
87,4741				
0,0295				
7,8987				
0,0003				
-0,0003				
537×10^6				

حل مقترح :

العدد	المدور إلى 10^{-1}	المدور إلى 10^{-3}	الكتابة العلمية	رتبة مقدار العدد
87,4741	87,5	87,474	$8,74741 \times 10$	9×10
0,0295	0,0	0,030	$2,95 \times 10^{-2}$	3×10^{-2}

8×10^0	$7,8987 \times 10^0$	7,899	7,9	7,8987
3×10^{-4}	3×10^{-4}	0,000	0,0	0,0003
-4×10^{-4}	$-3,7 \times 10^{-4}$	-0,000	-0,0	-0,00037
5×10^8	$5,37 \times 10^8$	537000000,000	537000000,0	537×10^6

التمرين رقم 28 :

بسّط كل عدد من الأعداد التالية ثم حدد أصغر مجموعة ينتمي إليها ذلك العدد :

$$d = \frac{1001}{140} , \quad c = \frac{2}{\sqrt{2}-1} - 2\sqrt{2} , \quad b = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{5}} , \quad a = \frac{\pi^2 \times (3,14)}{\pi \times (3,14)^2}$$

$$e = \frac{(-12)^{16} \times (75)^{-4} \times (-4)^{-9}}{\left[(25)^{-2}\right]^4 \times (10)^4 \times (18)^6}$$

حل مقترح :

$$a = \frac{\pi^2 \times (3,14)}{\pi \times (3,14)^2} = \frac{\pi}{3,14} \text{ وهذا هو أبسط شكل ممكن للعدد } a ; \text{ إذن : } a \text{ عدد أصم (} \notin \mathbb{Q} \text{) ومنه}$$

تكون أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد a هي مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

حذار : $\pi \neq 3,14$

$$b = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{5}} = \frac{\frac{1 \times 5}{2 \times 5} + \frac{1 \times 2}{5 \times 2}}{\frac{1 \times 5}{2 \times 5} - \frac{1 \times 2}{5 \times 2}} \text{ نوجد (المقام المشترك هو 10) فنجد : } b = \frac{\frac{1 \times 5}{2 \times 5} + \frac{1 \times 2}{5 \times 2}}{\frac{1 \times 5}{2 \times 5} - \frac{1 \times 2}{5 \times 2}} \text{ ومنه :}$$

$$b = \frac{10}{5-2} \text{ أي } b = \frac{10}{3} \text{ ومنه } b = \frac{7}{10} \times \frac{10}{3} \text{ أي } b = \frac{7}{3} \text{ وهو كسر غير قابل للاختزال .}$$

باستعمال الآلة الحاسبة نجد : $b = 2,3333333...$ أي أن جزءه العشري غير منته و بالتالي فهو عدد غير عشري ؛
إذن أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد b هي مجموعة الأعداد الناطقة أي $b \in \mathbb{Q}$.

ملاحظة : للتحقق أن العدد $\frac{7}{3}$ غير عشري دون إستعمال الآلة الحاسبة يمكن أن نستعمل **الخاصية المميزة** :

الكسر $\frac{7}{3}$ غير قابل للإختزال ؛ و من جهة أخرى تحليل مقامه إلى جداء عوامل أولية يكون كما يلي : $3 = 3^1$

نلاحظ أن تحليل المقام يشتمل على عدد أولي و هو 3 يختلف عن 2 و يختلف عن 5 ، إذن $\frac{7}{3}$ غير عشري .

$$\text{نوجد المقامات فنجد : } c = \frac{2}{\sqrt{2}-1} - 2\sqrt{2} = \frac{2-2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1}$$

$$c = \frac{2-2\sqrt{2} \times \sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \text{ و منه } c = \frac{2-2 \times 2 + 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \text{ أي } c = \frac{-2+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \text{ و منه نجد}$$

$$c = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1} \text{ أي } c = 2 \text{ و منه}$$

أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد c هي مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$.

أولا نكتب العدد d على شكل كسر غير قابل للإختزال : من أجل ذلك نحلل كلا من البسط و المقام إلى جداء

عوامل أولية فنتحصل على : $1001 = 7 \times 11 \times 13$ و $140 = 2^2 \times 5 \times 7$ و منه يصبح :

$$d = \frac{1001}{140} = \frac{7 \times 11 \times 13}{2^2 \times 5 \times 7} \text{ و باختزال كل العوامل الأولية المشتركة نتحصل على : } d = \frac{11 \times 13}{2^2 \times 5}$$

$$\text{أي : } d = \frac{143}{20} \text{ و هو كسر غير قابل للإختزال .}$$

نتحقق هل العدد d عشريا أم غير عشري و ذلك باستعمال **الخاصية المميزة** :

تحليل المقام إلى جداء عوامل أولية فنجد : $20 = 2^2 \times 5$ ؛ نلاحظ أن تحليل المقام إلى جداء عوامل أولية لا

يشتمل على أي عدد أولي يختلف عن 2 و يختلف عن 5 ؛ إذن : $\frac{143}{20}$ عدد عشري و منه تكون أصغر مجموعة

ينتمي إليها العدد d هي مجموعة الأعداد العشرية $\mathbb{D}$.

ملاحظة : يمكن إستعمال الآلة الحاسبة فنجد : $d = \frac{143}{20} = 7,15 \in \mathbb{D}$ لأن جزأه العشري منته .

$$e = \frac{(-12)^{16} \times (75)^{-4} \times (-4)^{-9}}{\left[(25)^{-2}\right]^4 \times (10)^4 \times (18)^6} :$$

نحلل الأعداد 12 ؛ 75 ؛ 4 ؛ 25 ؛ 10 و 18 فنجد :

$$12 = 2^2 \times 3 \quad ; \quad 75 = 3 \times 5^2 \quad ; \quad 4 = 2^2 \quad ; \quad 25 = 5^2 \quad ; \quad 10 = 2 \times 5 \quad ; \quad 18 = 2 \times 3^2 \quad \text{و منه ينتج :}$$

$$e = \frac{2^{32} \times 3^{16} \times 3^{-4} \times 5^{-8} \times (-2^{-18})}{5^{-16} \times 2^4 \times 5^4 \times 2^6 \times 3^{12}} \quad \text{أي} \quad e = \frac{(-2^2 \times 3)^{16} \times (3 \times 5^2)^{-4} \times (-2^2)^{-9}}{\left[(5^2)^{-2}\right]^4 \times (2 \times 5)^4 \times (2 \times 3^2)^6} \quad \text{لأن الأس } 16$$

$$e = -\frac{2^{14} \times 3^{12} \times 5^{-8}}{5^{-12} \times 2^{10} \times 3^{12}} \quad \text{أي} \quad e = -2^4 \times 5^4 \quad \text{و منه نجد} \quad e = -10000 .$$

إذن أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد e هي مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية $\mathbb{Z}$.

التمرين رقم 29 :

(1) حلل إلى جداء عوامل أولية العددين : 84 و 156 .

(2) عين القاسم المشترك الأكبر $PGCD(156;84)$ و المضاعف المشترك الأصغر $PPCM(156;84)$.

(3) إختزل الكسر : $\frac{156}{84}$

(4) عين أصغر عدد طبيعي n بحيث يكون $84n$ مربعا تاما .

حل مقترح :

(1) التحليل إلى جداء عوامل أولية للعددين : 84 و 156 .

$$\begin{cases} 156 = 2^2 \times 3 \times 13 \\ 84 = 2^2 \times 3 \times 7 \end{cases}$$

(2) تعيين القاسم المشترك الأكبر $PGCD(156;84)$ و المضاعف المشترك الأصغر $PPCM(156;84)$:

نعلم أن $PGCD(156;84)$ هو جداء العوامل الأولية المشتركة في تحليل العددين 156 و 84 إلى جداء عوامل أولية مأخوذة مرة واحدة وبأصغر أس .

و منه نجد : $PGCD(156;84) = 2^2 \times 3$ أي $PGCD(156;84) = 12$.

نعلم أن $PPCM(156;84)$ هو جداء العوامل الأولية المشتركة و غير المشتركة في تحليل العددين 156 و 84 إلى جداء عوامل أولية مأخوذة مرة واحدة وبأكبر أس .

و منه نجد : $PPCM(156;84) = 2^2 \times 3 \times 13 \times 7$ أي $PPCM(156;84) = 1092$.

(3) إختزال الكسر : $\frac{156}{84}$

لإختزال الكسر $\frac{156}{84}$ نستعمل نتيجة السؤال السابق : نعلم أن $PGCD(156;84) = 12$ إذن بقسمة كل من

البسط و المقام على 12 نتحصل على : $\frac{156}{84} = \frac{156 \div 12}{84 \div 12} = \frac{13}{7}$ و هو كسر غير قابل للإختزال .

(4) تعيين أصغر عدد طبيعي n بحيث يكون $84n$ مربعا تاما :

نعلم أن : $84 = 2^2 \times 3 \times 7$ و منه يكون : $84n = (2^2 \times 3 \times 7)n$. إذن حتى يكون العدد $84n$ مربعا تاما

يجب أن يكون $(2^2 \times 3 \times 7)n$ مربعا تاما أي $\sqrt{(2^2 \times 3 \times 7)n} \in \mathbb{N}$ أي $2\sqrt{21n} \in \mathbb{N}$

و منه نجد أن أصغر عدد طبيعي n يحقق $2\sqrt{21n} \in \mathbb{N}$ هو $n = 21$ و من أجل ذلك يكون :

$$2\sqrt{21n} = 2\sqrt{21 \times 21} = 2 \times 21 = 42 \in \mathbb{N}$$

نتيجة : من أجل $n = 21$ يكون : $84n = 1764$ مربعا تاما .

التمرين رقم 30 :

(1) حلل إلى جداء عوامل أولية كلا من الأعداد : 378 ، 1617 ، 236 ، 267696 ، 37800

(2) إستنتج تحليلا للعددين : $378^4 \times 1617^3$ و $267696^3 \times 1617^4$

(3) عين العددين الطبيعيين d و m بحيث : $d = PGCD(1617; 378)$ و $m = PPCM(1617; 378)$

ثم تحقق من صحة المساواة : $m \times d = 1617 \times 378$

(4) إختزل الكسرين : $\frac{378}{1617}$ و $\frac{37800}{267696}$

(5) بسط العددين : $\sqrt{37800}$ و $\sqrt{267696}$

حل مقترح :

(1) التحليل إلى جداء عوامل أولية كلا من الأعداد : 378 ، 1617 ، 236 ، 267696 ، 37800

$$378 = 2 \times 3^3 \times 7 \text{ و } \begin{cases} 236 = 2^2 \times 59 \\ 1617 = 3 \times 7^2 \times 11 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} 37800 = 2^3 \times 3^3 \times 5^2 \times 7 \\ 267696 = 2^4 \times 3^2 \times 11 \times 13^2 \end{cases}$$

(2) إستنتج تحليلا للعددين : $378^4 \times 1617^3$ و $267696^3 \times 1617^4$

$$378^4 \times 1617^3 = (2 \times 3^3 \times 7)^4 \times (3 \times 7^2 \times 11)^3$$

$$378^4 \times 1617^3 = 2^4 \times 3^{15} \times 7^{10} \times 11^3 \quad \text{أي} \quad 378^4 \times 1617^3 = 2^4 \times 3^{12} \times 7^4 \times 3^3 \times 7^6 \times 11^3$$

$$\text{و كذلك نجد : } 267696^3 \times 1617^4 = (2^4 \times 3^2 \times 11 \times 13^2)^3 \times (3 \times 7^2 \times 11)^4$$

$$267696^3 \times 1617^4 = 2^{12} \times 3^6 \times 11^3 \times 13^6 \times 3^4 \times 7^8 \times 11^4$$

$$267696^3 \times 1617^4 = 2^{12} \times 3^{10} \times 7^8 \times 11^7 \times 13^6$$

(3) تعيين العددين الطبيعيين d و m بحيث : $d = PGCD(1617; 378)$ و

$$m = PPCM(1617; 378)$$

نعلم أن $PGCD(1617; 378)$ هو جداء العوامل الأولية المشتركة في تحليل العددين 1617 و 378 إلى جداء عوامل أولية مأخوذة مرة واحدة وبأصغر أس .

$$\text{و منه نجد : } d = 3 \times 7 \quad \text{أي} \quad d = 21$$

نعلم أن $PPCM(1617; 378)$ هو جداء العوامل الأولية المشتركة و غير المشتركة في تحليل العددين 1617 و 378 إلى جداء عوامل أولية مأخوذة مرة واحدة وبأكبر أس .

$$\text{و منه نجد : } m = 2 \times 3^3 \times 7^2 \times 11 \quad \text{أي} \quad m = 29106$$

$$\bullet \text{ التحقق من صحة المساواة : } m \times d = 1617 \times 378$$

$$\text{من جهة : } 1617 \times 378 = 611226 \quad \text{و من جهة أخرى نعلم أن : } PGCD(1617; 378) = 21$$

$$PPCM(1617; 378) = 29106 \quad \text{فيكون إذن : } m \times d = 29106 \times 21 = 611226 \quad \text{و منه المساواة}$$

$$m \times d = 1617 \times 378 \quad \text{محقة .}$$

$$(4) \text{ إختزال الكسرين : } \frac{378}{1617} \text{ و } \frac{37800}{267696}$$

نعلم أن : $PGCD(1617;378) = 21$ و منه بقسمة البسط و المقام في الكسر على 21 نتحصل على :

$$\frac{378}{1617} = \frac{378 \div 21}{1617 \div 21} = \frac{18}{77} \text{ و هو كسر غير قابل للإختزال .}$$

لإختزال الكسر $\frac{37800}{267696}$ نستعمل التحليل إلى جداء عوامل أولية لكل من البسط و المقام فنتحصل على :

$$\frac{37800}{267696} = \frac{2^3 \times 3^3 \times 5^2 \times 7}{2^4 \times 3^2 \times 11 \times 13^2} \text{ و باختزال كل العوامل الأولية المشتركة نجد :}$$

$$\frac{37800}{267696} = \frac{525}{3718} \text{ أي } \frac{37800}{267696} = \frac{3 \times 5^2 \times 7}{2 \times 11 \times 13^2} \text{ و هو كسر غير قابل للإختزال .}$$

(5) تبسيط العددين : $\sqrt{37800}$ و $\sqrt{267696}$

$$\begin{cases} 37800 = 2^3 \times 3^3 \times 5^2 \times 7 \\ 267696 = 2^4 \times 3^2 \times 11 \times 13^2 \end{cases} \text{ نعلم أن تحليل العددين 37800 و 267696 إلى جداء عوامل أولية هو :}$$

$$\sqrt{37800} = 2 \times 3 \times 5 \sqrt{2 \times 3 \times 7} \text{ أي } \sqrt{37800} = \sqrt{2^3 \times 3^3 \times 5^2 \times 7} \text{ و منه نجد :}$$

إذن ينتج :

$$\sqrt{37800} = 30\sqrt{42} \text{ وهي الكتابة المبسطة من الشكل } a\sqrt{b} \text{ للعدد } \sqrt{37800} .$$

$$\sqrt{267696} = \sqrt{2^4 \times 3^2 \times 11 \times 13^2} \text{ أي } \sqrt{267696} = 2^2 \times 3 \times 13 \sqrt{11} \text{ ؛ إذن ينتج :}$$

$$\sqrt{267696} = 156\sqrt{11} \text{ وهي الكتابة المبسطة من الشكل } a\sqrt{b} \text{ للعدد } \sqrt{267696} .$$

التمرين رقم 31 :

إختر الإجابة الصحيحة لكل من الإقتراحات التالية :

1/ العدد $\sqrt{150} - 2\sqrt{24}$ يساوي :

أ- 0 ب- $\sqrt{6}$ ج- $4\sqrt{6}$

2/ العدد $1^4 + 2^4 + 3^4$ يساوي :

أ- 2×7^2 ب- $(1+2+3)^4$ ج- $(1 \times 2 \times 3)^4$

3/ رتبة مقدار العدد -4589 هي :

أ- -4×10^3 ب- -5×10^3 ج- -3×10^3

حل مقترح :

1/ الإجابة الصحيحة هي : ج-

التحليل : نحل كلا من العددين 150 و 6 إلى جداء عوامل أولية فنجد :
$$\begin{cases} 6 = 2 \times 3 \\ 150 = 2 \times 3 \times 5^2 \end{cases}$$

و منه نجد $\sqrt{150} - \sqrt{6} = \sqrt{2 \times 3 \times 5^2} - \sqrt{2 \times 3}$ أي $\sqrt{150} - \sqrt{6} = 5\sqrt{2 \times 3} - \sqrt{2 \times 3}$ و منه

$$\sqrt{150} - \sqrt{6} = 4\sqrt{6} .$$

2/ الإجابة الصحيحة هي : أ-

التحليل : $1^4 + 2^4 + 3^4 = 1 + 16 + 81$ أي $1^4 + 2^4 + 3^4 = 98$ ؛ و بتحليل العدد 98 إلى جداء عوامل

أولية نجد : $98 = 2 \times 7^2$.

3/ الإجابة الصحيحة هي : ب-

التحليل : نكتب أولا العدد -4589 على الشكل العلمي فنجد : $-4,589 \times 10^3$.

وبالتالي يكون أقرب عدد صحيح للعدد العشري -4,589 هو -5 ؛ إذن رتبة مقدار العدد -4589 هي :

$$-5 \times 10^3 .$$

التمرين رقم 32 :

بين أن الأعداد التالية طبيعية :

$$C = \frac{3^{10}}{243} , \quad B = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{ab} , \quad A = \frac{\sqrt{722}}{\sqrt{2}}$$

حل مقترح :

نحلل العدد 722 إلى جداء عوامل أولية فنحصل على : $722 = 2 \times 19^2$

$$A = 19 \in \mathbb{N} \text{ : ومنه } A = \frac{19\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \text{ أي } A = \frac{\sqrt{722}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2 \times 19^2}}{\sqrt{2}}$$

$$\text{بالنشر والتبسيط نجد : } B = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{ab} = \frac{(a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2)}{ab}$$

$$B = 4 \in \mathbb{N} \text{ : أي } B = \frac{4\cancel{ab}}{\cancel{ab}} \text{ ومنه } B = \frac{\cancel{a^2} + 2ab + \cancel{b^2} - \cancel{a^2} + 2ab - \cancel{b^2}}{ab}$$

نحلل العدد 243 إلى جداء عوامل أولية فنجد : $243 = 3^5$

$$\text{ومنه ينتج : } C = \frac{3^{10}}{243} = \frac{3^{10}}{3^5} = 3^{10-5} \text{ أي } C = 3^5 = 243 \in \mathbb{N}$$

التمرين رقم 33 :

نضع : $A = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$ و $B = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}}$

1/ أوجد قيمة A و B من أجل $x = 5$.

2/ بين أن : $B = A$.

حل مقترح :

1/ إيجاد قيمة A و B من أجل $x = 5$:

من أجل $x = 5$: $A = \sqrt{5^2 + 5 + 1} - \sqrt{5^2 - 5 + 1}$ و منه نجد : $A = \sqrt{31} - \sqrt{21}$ و هي الكتابة

المبسطة للعدد A .

2/ نبين أن $B = A$:

$B = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}}$ و بضرب العدد B في مرافق المقام أي في العدد :

$\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$ نتحصل على :

$B = \frac{2x(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1})}{(\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1})(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1})}$ أي :

$B = \frac{2x(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1})}{\sqrt{x^2 + x + 1}^2 - \sqrt{x^2 - x + 1}^2}$ (المتطابقة الشهيرة رقم 3) و منه نجد :

أي $B = \frac{2x(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1})}{(x^2 + x + 1) - (x^2 - x + 1)}$ و منه نجد $B = \frac{2x(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1})}{x^2 + x + 1 - x^2 + x - 1}$

أي $B = \frac{\cancel{2x}(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1})}{\cancel{2x}}$ أي $B = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$ ، إذن يكون :

$$. B = A$$

التمرين رقم 34 :

A و B عددان طبيعيان بحيث $A = (4 \times 5)^3 \times 2^2 \times 45$ و $B = 396$

(1) حلل كلا من العددين A و B إلى جداء عوامل أولية .

(2) عين كلا من $PGCD(A;B)$ و $PPCM(A;B)$.

(3) هل العدد $\frac{A}{B}$ عشري ؟ علل جوابك .

حل مقترح :

(1) تحليل كلا من العددين A و B إلى جداء عوامل أولية :

نحلل العدد 45 إلى جداء عوامل أولية فنجد : $45 = 3^2 \times 5$ و منه نجد

$$. A = 2^8 \times 3^2 \times 5^4 : A = (4 \times 5)^3 \times 2^2 \times 3^2 \times 5$$

$$. 396 = 2^2 \times 3^2 \times 11$$
 و كذلك نجد :

(2) تعيين كلا من $PGCD(A;B)$ و $PPCM(A;B)$:

نعلم أن $PGCD(A;B)$ هو جداء العوامل الأولية المشتركة في تحليل العددين A و B إلى جداء عوامل أولية

مأخوذة مرة واحدة وبأصغر أس .

$$. PGCD(A;B) = 2^2 \times 3^2 \text{ أي } PGCD(A;B) = 36$$

نعلم أن $PPCM(A;B)$ هو جداء العوامل الأولية المشتركة و غير المشتركة في تحليل العددين A و

B إلى جداء عوامل أولية مأخوذة مرة واحدة وبأكبر أس .

و منه نجد : $PPCM(A;B) = 2^8 \times 3^2 \times 5^4 \times 11$ أي $PPCM(A;B) = 15840000$.

(3) هل العدد $\frac{A}{B}$ عشري ؟ علل جوابك .

باختزال كل العوامل الأولية المشتركة في تحليل البسط A و المقام B نحصل على :

$$\frac{A}{B} = \frac{2^8 \times 3^2 \times 5^4}{2^2 \times 3^2 \times 11} = \frac{2^6 \times 5^4}{11} \text{ و منه نجد } \frac{A}{B} = \frac{40000}{11} \text{ ؛ الكسر } \frac{40000}{11} \text{ غير قابل للإختزال}$$

و بتحليل مقامه إلى جداء عوامل أولية نجد $11 = 11^1$ إذن هذا التحليل يشتمل على عدد أولي و هو 11 يختلف عن

2 و يختلف عن 5 و منه العدد $\frac{A}{B}$ غير عشري .

ملاحظة : يمكن إستعمال الآلة الحاسبة فنجد : $\frac{A}{B} = \frac{40000}{11} = 3636,362636...$ أي أن جزأه العشري غير

منتته و بالتالي فهو عدد غير عشري .

التمرين رقم 35 :

$$x \text{ و } y \text{ عددان حقيقيان بحيث : } x = \sqrt{75} - 4\sqrt{3} + \sqrt{2} \times \frac{6}{\sqrt{18}} \text{ و } y = (\sqrt{3} - 1)^2 + \sqrt{3} - 2$$

1/ أثبت أن : $x = 2 + \sqrt{3}$ و $y = 2 - \sqrt{3}$.

2/ أحسب الجداء $x \times y$ ثم إستنتج أن : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4$

$$3/ z \text{ عدد حقيقي بحيث : } z = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) + 2y - (x - y)^2$$

بسط العدد الحقيقي z ثم حدد أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد z .

حل مقترح :

1/ التحقق أن : $x = 2 + \sqrt{3}$ و $y = 2 - \sqrt{3}$

نحلل العددين 75 و 18 إلى جداء عوامل أولية فنجد : $75 = 3 \times 5^2$ و $18 = 2 \times 3^2$.

و منه يكون $x = \sqrt{3 \times 5^2} - 4\sqrt{3} + \sqrt{2} \times \frac{6}{\sqrt{2 \times 3^2}}$ أي $x = 5\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + \sqrt{2} \times \frac{6}{3\sqrt{2}}$

$x = 5\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 2$ و منه نجد $x = \sqrt{3} + 2$ و هو المطلوب .

$y = (\sqrt{3} - 1)^2 + \sqrt{3} - 2$ و بالنشر نجد : $y = \sqrt{3}^2 - 2 \times 1\sqrt{3} + 1^2 + \sqrt{3} - 2$ أي

$y = 3 - 2\sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} - 2$ و منه نجد $y = 2 - \sqrt{3}$ و هو المطلوب .

$x \times y = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})$ /2 و منه نجد $x \times y = 2^2 - \sqrt{3}^2$ أي $x \times y = 1$.

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1 \times y}{x \times y} + \frac{1 \times x}{y \times x} = \frac{x + y}{x \times y}$ أي $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = x + y$ لأن $x \times y = 1$ و منه نجد :

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \sqrt{3} + 2 + 2 - \sqrt{3}$ أي $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4$ و هو المطلوب .

$z = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) + 2y - (x - y)^2$ /3 و من السؤال /2 نعلم أن : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4$ و كذلك :

$(x - y)^2 = (\sqrt{3} + 2 - 2 + \sqrt{3})^2$ أي $(x - y)^2 = (2\sqrt{3})^2 = 12$ و منه نجد

$z = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 + 2(2 - \sqrt{3}) - 12$ أي $z = 2\sqrt{3} + 4 - 2\sqrt{3} - 12$ و منه $z = -8$.

• أصغر مجموعة ينتمي إليها العدد z هي مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية أي $z \in \mathbb{Z}$.

التمرين رقم 36 :

الجزء I :

x ، y عددان حقيقيان بحيث : $x = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ و $y = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$

1/ أحسب كلا من : $x^2 + y^2$ و xy ثم إستنتج قيمة المجموع $x + y$.

2/ إجعل مقام النسبة $\frac{x}{y}$ عددا ناطقا .

الجزء II :

w ، z عددان حقيقيان بحيث : $z = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}}$ و $w = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}}$

1/ أحسب كلا من : $w^2 + z^2$ و wz ثم بين أن : $w + z = 4$.

2/ إجعل مقام كل من w و z عددا ناطقا .

حل مقترح :

الجزء I :

x ، y عددان حقيقيان بحيث : $x = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ و $y = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$

1/ حساب كلا من : $x^2 + y^2$ و xy ثم إستنتج قيمة المجموع $x + y$.

$$x^2 + y^2 = \sqrt{2 - \sqrt{3}}^2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}^2 \text{ أي } x^2 + y^2 = 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} \text{ و منه نجد}$$

$$x^2 + y^2 = 4 .$$

$$x \times y = \sqrt{2 - \sqrt{3}} \times \sqrt{2 + \sqrt{3}} \text{ أي } x \times y = \sqrt{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} \text{ و منه نجد}$$

$$x \times y = \sqrt{2^2 - \sqrt{3}^2} \text{ أي } x \times y = \sqrt{4-3} \text{ و منه ينتج : } x \times y = 1 .$$

لإيجاد قيمة المجموع $x + y$ نستعمل مثلا المتطابقة الشهيرة 1 فنتحصل على : $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$

و نعلم أن : $x^2 + y^2 = 4$ و $x \times y = 1$ و منه نجد $(x + y)^2 = 4 + 2 \times 1 = 6$ أي $(x + y)^2 = 6$ و منه ينتج :

$$x + y = \sqrt{6} \text{ (القيمة } x + y = -\sqrt{6} \text{ مرفوضة لأن كل من } x \geq 0 \text{ و } y \geq 0 \text{ و منه يكون } x + y \geq 0 \text{)}$$

2/ جعل مقام النسبة $\frac{x}{y}$ عددا ناطقا :

$$\frac{x}{y} = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})^2}{2^2 - \sqrt{3}^2}} \text{ أي } \frac{x}{y} = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}} \text{ و منه نجد } \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$$

$$\text{و منه نجد } \frac{x}{y} = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})^2}{1}} \text{ أي } \frac{x}{y} = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} \text{ و بما أن : } 2 - \sqrt{3} \geq 0 \text{ فإنه ينتج :}$$

$$\frac{x}{y} = 2 - \sqrt{3} \text{ و هي نسبة مقامها عدد ناطق (1 عدد ناطق) .}$$

الجزء II :

$$w = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} \text{ و } z = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} \text{ : عدنان حقيقيان بحيث :}$$

1/ حساب كلا من : $w^2 + z^2$ و wz ثم نبين أن : $w + z = 4$.

$$w^2 + z^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} + \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \text{ أي } w^2 + z^2 = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}^2 + \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}^2 \text{ و منه بتوحيد المقامات نجد}$$

$$w^2 + z^2 = \frac{(2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} + \frac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} \text{ أي :}$$

$$w^2 + z^2 = \frac{(2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{2^2 - \sqrt{3}^2} + \frac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{2^2 - \sqrt{3}^2} \text{ أي}$$

$$w^2 + z^2 = (2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) \text{ و منه نجد :}$$

$$w^2 + z^2 = (2+\sqrt{3})^2 + (2-\sqrt{3})^2 \text{ و بالنشر نجد}$$

$$w^2 + z^2 = 8 + 6 \text{ أي } w^2 + z^2 = 2^2 + 2 \times 2\sqrt{3} + \sqrt{3}^2 + 2^2 - 2 \times 2\sqrt{3} + \sqrt{3}^2$$

$$w^2 + z^2 = 14$$

$$w \times z = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} \times \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} \text{ أي } w \times z = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} \times \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} \text{ بالضرب نجد و منه يكون :}$$

$$w \times z = \sqrt{\frac{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}} \text{ و منه نجد } w \times z = \sqrt{1} \text{ أي } w \times z = 1$$

لإيجاد قيمة المجموع $w + z$ نستعمل مثلا المتطابقة الشهيرة 1 فنحصل على : $(w + z)^2 = w^2 + z^2 + 2wz$

و نعلم أن : $w^2 + z^2 = 14$ و $wz = 1$ و منه نجد $(w + z)^2 = 14 + 2 \times 1 = 16$ أي $(w + z)^2 = 16$ و منه ينتج

$$w + z = 4 \text{ (القيمة } w + z = -4 \text{ مرفوضة لأن كل من } w \geq 0 \text{ و } z \geq 0 \text{ و منه يكون } w + z \geq 0 \text{)}$$

2/ جعل مقام كل من w و z عددا ناطقا :

$$w = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} \text{ و منه } w = \sqrt{\frac{(2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}} \text{ أي } w = \sqrt{\frac{(2+\sqrt{3})^2}{2^2 - \sqrt{3}^2}} \text{ أي } w = \frac{2+\sqrt{3}}{1} \text{ لأن}$$

$2 + \sqrt{3} \leq 0$ و منه نجد $w = 2 + \sqrt{3}$ وهي نسبة مقامها عدد ناطق (1 عدد ناطق) .

$$z = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} \text{ و منه } z = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}} \text{ أي } z = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})^2}{2^2 - \sqrt{3}^2}} \text{ أي } z = \frac{2-\sqrt{3}}{1} \text{ لأن}$$

$2 - \sqrt{3} \geq 0$ و منه نجد $z = 2 - \sqrt{3}$ وهي نسبة مقامها عدد ناطق (1 عدد ناطق) .

التمرين رقم 37 :

a ، b عددان حقيقيان بحيث : $a = \sqrt{98} + \sqrt{32} + \sqrt{8}$ و $b = \sqrt{162} + \sqrt{72} + \sqrt{18}$

(1) أكتب على أبسط شكل ممكن العددين a و b .

(2) أوجد قيمة الأعداد : $\frac{a+b}{2}$ و $\sqrt{ab}$

حل مقترح :

(1) كتابة على أبسط شكل ممكن العددين a و b :

من أجل ذلك نبدأ بتحليل الأعداد 8 ، 32 ، 98 ، 18 ، 72 و 162 إلى جداء عوامل أولية :

$$8 = 2^3 \text{ ، } 32 = 2^5 \text{ ، } 98 = 2 \times 7^2 \text{ ، } 18 = 2 \times 3^2 \text{ ، } 72 = 2^3 \times 3^2 \text{ ، } 162 = 2 \times 3^4$$

إذن نجد : $a = \sqrt{98} + \sqrt{32} + \sqrt{8} = a = \sqrt{2 \times 7^2} + \sqrt{2^5} + \sqrt{2^3}$ أي :

$$a = 7\sqrt{2} + 2^2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \text{ أي } a = 7\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \text{ و منه } a = 13\sqrt{2}$$

$$b = \sqrt{162} + \sqrt{72} + \sqrt{18} = \sqrt{2 \times 3^4} + \sqrt{2^3 \times 3^2} + \sqrt{2 \times 3^2}$$

$$b = 9\sqrt{2} + 6\sqrt{2} + 3\sqrt{2} \text{ و منه نجد } b = 18\sqrt{2}$$

(2) إيجاد قيمة الأعداد : $\frac{a+b}{2}$ و $\sqrt{ab}$

من السؤال (1) نعلم أن : $a = 13\sqrt{2}$ و $b = 18\sqrt{2}$ و منه نجد : $\frac{a+b}{2} = \frac{13\sqrt{2} + 18\sqrt{2}}{2}$ أي

$$\frac{a+b}{2} = \frac{31\sqrt{2}}{2} . \text{ و كذلك : } \sqrt{ab} = \sqrt{13\sqrt{2} \times 18\sqrt{2}} \text{ أي } \sqrt{ab} = \sqrt{234 \times 2} \text{ أي :}$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{468} \text{ و بتحليل العدد 468 إلى جداء عوامل أولية نحصل على : } \sqrt{ab} = \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 13}$$

$$\sqrt{ab} = 2 \times 3 \sqrt{13} \text{ و منه نجد } \sqrt{ab} = 6\sqrt{13}$$

التمرين رقم 38 :

$$(1) \text{ أحسب } (4 - \sqrt{5})^2 .$$

$$(2) \text{ } x , y \text{ عددان حقيقيان بحيث : } x = \sqrt{5 - \sqrt{4 + 8\sqrt{5}}} \text{ و } y = \sqrt{5 + \sqrt{4 + 8\sqrt{5}}}$$

$$(أ) \text{ أحسب كلا من العددين : } x^2 + y^2 \text{ و } xy .$$

$$(ب) \text{ إستنتج قيمة مبسطة للعدد } (x + y)^2 .$$

حل مقترح :

$$(1) \text{ حساب } (4 - \sqrt{5})^2 :$$

$$\text{بالنشر ثم التبسيط : } (4 - \sqrt{5})^2 = 4^2 - 2 \times 4\sqrt{5} + \sqrt{5}^2 \text{ أي } (4 - \sqrt{5})^2 = 16 - 8\sqrt{5} + 5 \text{ و منه نجد}$$

$$(4 - \sqrt{5})^2 = 21 - 8\sqrt{5} .$$

$$(2) \text{ } x , y \text{ عددان حقيقيان بحيث : } x = \sqrt{5 - \sqrt{4 + 8\sqrt{5}}} \text{ و } y = \sqrt{5 + \sqrt{4 + 8\sqrt{5}}}$$

أ) حساب كلا من العددين : $x^2 + y^2$ و xy :

$$x^2 + y^2 = \sqrt{5 - \sqrt{4 + 8\sqrt{5}}}^2 + \sqrt{5 + \sqrt{4 + 8\sqrt{5}}}^2$$

و منه نجد :

$$x^2 + y^2 = 5 - \sqrt{4 + 8\sqrt{5}} + 5 + \sqrt{4 + 8\sqrt{5}} = 10$$

و منه نجد $x^2 + y^2 = 10$.

$$xy = \sqrt{5 - \sqrt{4 + 8\sqrt{5}}} \times \sqrt{5 + \sqrt{4 + 8\sqrt{5}}}$$

و كذلك نجد :

$$xy = \sqrt{(5 - \sqrt{4 + 8\sqrt{5}})(5 + \sqrt{4 + 8\sqrt{5}})}$$

أي $xy = \sqrt{5^2 - \sqrt{4 + 8\sqrt{5}}^2}$ أي

$$xy = \sqrt{25 - 4 - 8\sqrt{5}} = \sqrt{21 - 8\sqrt{5}}$$

و من السؤال 1/ نعلم أن : $(4 - \sqrt{5})^2 = 21 - 8\sqrt{5}$ و

$$xy = \sqrt{(4 - \sqrt{5})^2}$$

منه نجد $xy = 4 - \sqrt{5}$ لأن $4 - \sqrt{5} \geq 0$ و هي الكتابة المبسطة للعدد xy .

ب) إستنتاج قيمة مبسطة للعدد $(x + y)^2$:

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

بالنشر نتحصل على : $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ بحيث : $x^2 + y^2 = 10$ و $xy = 4 - \sqrt{5}$ و منه

$$(x + y)^2 = 10 + 2(4 - \sqrt{5}) = 10 + 8 - 2\sqrt{5}$$

نجد : $(x + y)^2 = 10 + 8 - 2\sqrt{5}$ إذن نتحصل على :

$$(x + y)^2 = 18 - 2\sqrt{5}$$

التمرين رقم 39 : هل الأعداد الطبيعية التالية هي أعداد أولية ؟

151 ، 407 ، 259 .

هل العدد يقبل القسمة على ...	2	3	5	7	11	13	نلاحظ أن
الإجابة	لا	لا	لا	لا	لا	لا	$11 < 13$
حاصل القسمة	75	50	30	21	13	11	

آخر باقي غير معدوم و منه فالعدد 151 أولي .

هل العدد يقبل القسمة على ...	2	3	5	7	11
الإجابة	لا	لا	لا	لا	نعم
حاصل القسمة	203	135	81	58	37

آخر باقي معدوم لأن العدد 407 يقبل القسمة على 11 و منه يكون العدد 407 ليس أوليا .

هل العدد يقبل القسمة على ...	2	3	5	7
الإجابة	لا	لا	لا	نعم
حاصل القسمة	129	86	51	37

آخر باقي معدوم لأن العدد 259 يقبل القسمة على 7 و منه يكون العدد 259 ليس أوليا .

التمرين رقم 40 : هل الأعداد الطبيعية التالية هي أعداد أولية ؟

307 ، 2001 .

هل العدد يقبل القسمة على ...	2	3	5	7	11	13	17	19	نلاحظ أن $16 < 19$
الإجابة	لا	لا	لا	لا	لا	لا	لا	لا	
حاصل القسمة	153	102	61	43	27	23	18	16	

آخر باقي غير معدوم و منه فالعدد 307 أولي .

هل العدد يقبل القسمة على ...	2	3
الإجابة	لا	نعم
حاصل القسمة	1000	667

آخر باقي معدوم لأن العدد 2001 يقبل القسمة على 3 و منه يكون العدد 2001 ليس أوليا .

التمرين رقم 41 :

a ، a عدنان حقيقيان موجبان بحيث $a > b$ يحققان ما يلي :

$$ab = 1 \text{ و } a + b = \sqrt{5}$$

1/ أحسب المجموع : $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ثم الفرق : $\sqrt{a} - \sqrt{b}$

2/ إستنتج قيمة الفرق $a - b$ ثم قيمة كل من a و b .

حل مقترح :

1/ حساب المجموع : $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ثم الفرق : $\sqrt{a} - \sqrt{b}$

حتى نتكن من حساب المجموع $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ يمكن مثلا الإعتماد على المتطابقة الشهيرة $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ فنجد :

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab} \text{ أي } (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = \sqrt{a}^2 + 2\sqrt{a} \times \sqrt{b} + \sqrt{b}^2$$

$$a + b = \sqrt{5} \text{ و } ab = 1 \text{ و بالتالي نحصل على : } (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = \sqrt{5} + 2\sqrt{1}$$

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = 2 + \sqrt{5} \text{ و منه نجد : } \sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{2 + \sqrt{5}}$$

حتى نتكن من حساب الفرق $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ يمكن مثلا الإعتماد على المتطابقة الشهيرة $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$ فنجد :

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{ab} \text{ أي } (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = \sqrt{a}^2 - 2\sqrt{a} \times \sqrt{b} + \sqrt{b}^2$$

$$a + b = \sqrt{5} \text{ و } ab = 1 \text{ و بالتالي نحصل على : } (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = \sqrt{5} - 2\sqrt{1}$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = \sqrt{5} - 2 \text{ و منه نجد : } \sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{\sqrt{5} - 2}$$

2/ إستنتج قيمة الفرق $a - b$ ثم قيمة كل من a و b :

نعلم أن : $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{2 + \sqrt{5}}$ و $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{\sqrt{5} - 2}$ و بالجداء طرفا لطرف نحصل على :

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = \sqrt{\sqrt{5} + 2} \times \sqrt{\sqrt{5} - 2} \text{ أي } (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = \sqrt{(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)} \text{ و } \sqrt{a}^2 - \sqrt{b}^2 = \sqrt{(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)}$$

منه نجد $a-b=\sqrt{\sqrt{5}^2-2^2}$ أي $a-b=\sqrt{5-4}$ و منه $a-b=1$

• إستنتاج قيمتي a و b : من المعطيات نعلم أن : $a+b=\sqrt{5}$ و من السؤال السابق : $a-b=1$

إذن نتحصل على جملة معادلتين هي : $\begin{cases} a+b=\sqrt{5} \\ a-b=1 \end{cases}$ ذات المجهولين a و b .

بطريقة الجمع نتحصل على : $2a=1+\sqrt{5}$ و منه نجد : $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

و بتعويض قيمة a في المعادلة $a-b=1$ نجد : $b=a-1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1$ أي $b=\frac{1+\sqrt{5}-2}{2}$ و منه نجد

$b=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

التمرين رقم 42 :

(1) حلل إلى جداء عوامل أولية كلا من 540 و 1500 .

(2) عين $PGCD(540;1500)$.

إجعل الكسر $\frac{540}{1500}$ كسرا غير قابل للاختزال .

(3) عين $PPCM(540;1500)$ ثم أوجد قيمة الفرق $\frac{3}{1500}-\frac{1}{540}$.

حل مقترح :

(1) تحليل إلى جداء عوامل أولية كلا من 540 و 1500 :

و هو تحليل 540 و 1500 $\begin{cases} 540=2^2 \times 3^3 \times 5 \\ 1500=2^2 \times 3 \times 5^3 \end{cases}$

(2) تعيين $PGCD(540;1500)$:

نعلم أن $PGCD(540;1500)$ هو جداء العوامل الأولية المشتركة في تحليل 540 و 1500 مأخوذة مرة واحدة وبأصغر أس : $PGCD(540;1500) = 2^2 \times 3 \times 5$ أي : $PGCD(540;1500) = 60$.

• جعل الكسر $\frac{540}{1500}$ كسرا غير قابل للاختزال :

يكفي قسمة كل من البسط و المقام على $PGCD(540;1500)$ أي على 60 فنتحصل على :

$$\frac{540}{1500} = \frac{540 \div 60}{1500 \div 60} = \frac{9}{25}$$

و هو كسر غير قابل للاختزال .

(3) تعيين $PPCM(540;1500)$ ثم إيجاد قيمة الفرق $\frac{3}{1500} - \frac{1}{540}$:

نعلم أن $PPCM(540;1500)$ هو جداء العوامل الأولية المشتركة و غير المشتركة في تحليل 540 و 1500 مأخوذة مرة واحدة وبأكبر أس : $PPCM(540;1500) = 2^2 \times 3^3 \times 5^3$ أي :

$$PPCM(540;1500) = 13500$$

• إيجاد قيمة الفرق $\frac{3}{1500} - \frac{1}{540}$: بتوحيد المقامات نجد :

$$\frac{3}{1500} - \frac{1}{540} = \frac{3 \times 2^2 \times 3^3 \times 5 - 2^2 \times 3 \times 5^3}{2^2 \times 3 \times 5^3 \times 2^2 \times 3^3 \times 5} \quad \text{أي} \quad \frac{3}{1500} - \frac{1}{540} = \frac{3 \times 540 - 1 \times 1500}{1500 \times 540}$$

$$\frac{3}{1500} - \frac{1}{540} = \frac{(2^2 \times 3 \times 5)(3^3 - 5^2)}{2^4 \times 3^4 \times 5^4} \quad \text{أي} \quad \frac{3}{1500} - \frac{1}{540} = \frac{2^2 \times 3^4 \times 5 - 2^2 \times 3 \times 5^3}{2^4 \times 3^4 \times 5^4}$$

$$\frac{3}{1500} - \frac{1}{540} = \frac{1}{6750} \quad \text{أي} \quad \frac{3}{1500} - \frac{1}{540} = \frac{2}{13500} \quad \text{و منه} \quad \frac{3}{1500} - \frac{1}{540} = \frac{3^3 - 5^2}{2^2 \times 3^3 \times 5^3}$$

α و β أعداد طبيعية بحيث $\alpha = 7^{n+1} - 7^n$ و $\beta = 2^{n+3} - 2^{n+1} + 2^n$

أثبت أن α يقبل القسمة على 3 و β يقبل القسمة على 7 .

حل مقترح :

لدينا $\alpha = 7^{n+1} - 7^n$ أي $\alpha = 7 \times 7^n - 7^n$ أي $\alpha = 7^n (7 - 1)$ و منه $\alpha = 7^n \times 6$ ؛ لكن $6 = 3 \times 2$

و منه نجد $\alpha = 7^n \times 3 \times 2$ أي أن العدد α يقبل القسمة على 3 لأن 3 ظهر في تحليل العدد α إلى جداء عوامل أولية .

لدينا $\beta = 2^{n+3} - 2^{n+1} + 2^n$ أي $\beta = 2^n \times 2^3 - 2^n \times 2 + 2^n$ أي $\beta = 2^n (2^3 - 2 + 1)$

و منه فالعدد β يقبل القسمة على 7 لأن 7 ظهر في تحليل العدد β إلى جداء عوامل أولية .

التمرين رقم 44 : أكمل الجدول الآتي :

العدد	الكتابة العلمية	رتبة مقدار العدد
6485,412		
154		
$0,000364 \times 10^3$		
-80,25		

حل مقترح :

العدد	الكتابة العلمية	رتبة مقدار العدد
6485,412	$6,485412 \times 10^3$	6×10^3
154	$1,54 \times 10^2$	2×10^2
$0,000364 \times 10^3$	$3,64 \times 10^{-1}$	4×10^{-1}
-80,25	$-8,025 \times 10^1$	-8×10^1

التمرين رقم 45 :

(1) أكتب الأعداد الناطقة على شكل كسر : $a = 5,245245245\dots$ ؛ $b = 16,4212212212\dots$

(2) أكتب على شكل أبسط شكل ممكن :

$$C = \left(\frac{5}{7}\right)^{-4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^8 \times (3 \times 5)^6, \quad B = \frac{15^{-4} \times 18^7}{25^{-3} \times 16^{-3}}, \quad A = 49^{-4} \times 35^8 \times 25^{-3}$$

$$D = \frac{(-2)^5 \times (-5)^8 \times (-9)^3}{(-6)^4 \times (30)^5} \times \frac{(-18)^7 \times (-2)^4 \times (-50)^3}{(-25)^6 \times (-4)^5 \times (-27)^2}$$

حل مقترح :

(1) كتابة الأعداد الناطقة على شكل كسر : $a = 5, \underline{245}245245\dots$ ؛ $b = 16, \underline{421}2212212\dots$

• $a = 5 + x$ و بوضع $x = 0, \underline{245}245\dots$ نحصل على

نضرب المعادلة $x = 0, \underline{245}245\dots$ في 10^3 لأن عدد أرقام الدور هو 3 فنجد :

$1000x = 245, \underline{245}245\dots$ أي $1000x = 245 + 0, \underline{245}245\dots$ أي $1000x = 245 + x$ لأن :

• $x = 0, \underline{245}245\dots$ و منه يكون : $1000x - x = 245$ أي $999x = 245$ و منه $x = \frac{245}{999}$

نعوض الآن قيمة x في المعادلة $a = 5 + x$ فنجد : $a = 5 + \frac{245}{999}$ و بتوحيد المقامات نحصل على :

$$a = \frac{5 \times 999 + 245}{999} \text{ أي } a = \frac{5240}{999}$$

نلاحظ أن الدور في الكتابة العشرية الدورية للعدد b لا يظهر بعد الفاصلة مباشرة إنما يظهر ابتداء من الرقم الثاني

بعد الفاصلة و من أجل حل هذه المشكلة نضرب المساواة $b = 16, \underline{421}2212212\dots$ في 10 فنحصل على :

$10b = 164, \underline{212}212212\dots$ الآن أصبح الأمر جيداً لأن الدور يظهر بعد الفاصلة مباشرة .

$10b = 164, \underline{212}212212\dots = 164 + 0, \underline{212}212212\dots$ و بوضع :

$x = 0, \underline{212212212} \dots$ يصبح لدينا : $10b = 164 + x$.

نضرب المعادلة $x = 0, \underline{212212212} \dots$ في 10^3 لأن عدد أرقام الدور هو 3 فنجد :

$$1000x = 212 + x \text{ أي } 1000x = 212 + 0, \underline{212212212} \dots \text{ أي } 1000x = 212, \underline{212212212} \dots$$

لأن : $x = 0, \underline{212212212} \dots$ و منه يكون : $1000x - x = 212$ أي $999x = 212$ و منه $x = \frac{212}{999}$.

نعوض الآن قيمة x في المعادلة $10b = 164 + x$ فنجد : $10b = 164 + \frac{212}{999}$ و بتوحيد المقامات نتحصل على

$$10b = \frac{164048}{999} \text{ أي } 10b = \frac{164 \times 999 + 212}{999} : \text{ إذن لإيجاد قيمة العدد } b \text{ يكفي قسمة المعادلة}$$

$$10b = \frac{164048}{999} \text{ على } 10 \text{ فتحصل على : } b = \frac{164048}{9990} \text{ أي } b = \frac{164048}{9990}$$

ملاحظة : لو كان الدور لا يظهر بعد الفاصلة مباشرة إنما يظهر ابتداء من الرقم الثالث بعد الفاصلة نضرب في 100 و هكذا

(2) كتابة على شكل أبسط شكل ممكن :

$$C = \left(\frac{5}{7}\right)^{-4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^8 \times (3 \times 5)^6 , B = \frac{15^{-4} \times 18^7}{25^{-3} \times 16^{-3}} , A = 49^{-4} \times 35^8 \times 25^{-3}$$

$$D = \frac{(-2)^5 \times (-5)^8 \times (-9)^3}{(-6)^4 \times (30)^5} \times \frac{(-18)^7 \times (-2)^4 \times (-50)^3}{(-25)^6 \times (-4)^5 \times (-27)^2}$$

$$A = 49^{-4} \times 35^8 \times 25^{-3} : \text{ يمكن كتابة العدد } A \text{ على الشكل : } A = \frac{1}{49^4} \times 35^8 \times \frac{1}{25^3}$$

نحلل الأعداد 49 ، 35 و 25 إلى جداء عوامل أولية : $49 = 7^2$ و $35 = 5 \times 7$ و $25 = 5^2$

$$A = \frac{1}{(7^2)^4} \times (5 \times 7)^8 \times \frac{1}{(5^2)^3} \text{ أي } A = \frac{1}{7^8} \times 5^8 \times 7^8 \times \frac{1}{5^6} \text{ و منه بالإختزال نجد :}$$

$$. A = 5^2 = 25$$

$$B = \frac{25^3 \times 16^3 \times 18^7}{15^4} : \text{يمكن كتابة } B \text{ على الشكل : } B = \frac{15^{-4} \times 18^7}{25^{-3} \times 16^{-3}}$$

نحلل الأعداد 25 ، 16 ، 18 ، و 15 إلى جداء عوامل أولية : $18 = 2 \times 3^2$ ، $16 = 2^4$ ، $25 = 5^2$ ، $15 = 3 \times 5$.

$$\text{و منه نجد : } B = \frac{(5^2)^3 \times (2^4)^3 \times (2 \times 3^2)^7}{(3 \times 5)^4} \text{ أي } B = \frac{5^6 \times 2^{12} \times 2^7 \times 3^{14}}{3^4 \times 5^4} \text{ و منه بالإختزال نجد :}$$

$$. B = 5^2 \times 2^{19} \times 3^{10}$$

$$C = \left(\frac{5}{7}\right)^{-4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^8 \times (3 \times 5)^6 : \text{يمكن كتابة } C \text{ على الشكل : } C = \frac{5^{-4}}{7^{-4}} \times \frac{3^8}{4^8} \times 3^6 \times 5^6$$

$$\text{أي } C = \frac{7^4}{5^4} \times \frac{3^8}{2^{16}} \times 3^6 \times 5^6 \text{ و منه بالإختزال نجد :}$$

$$. C = \frac{3^{14} \times 5^2 \times 7^4}{2^{16}}$$

يمكن كتابة العدد D وفق الشكل الآتي تبعا لشعبة الأس (زوجي أو فردي) :

$$D = \frac{2^5 \times 5^8 \times 9^3}{6^4 \times 30^5} \times \frac{18^7 \times 2^4 \times 50^3}{-25^6 \times 4^5 \times 27^2}$$

نحلل الأعداد 4 ، 9 ، 6 ، 18 ، 25 ، 27 ، 30 ، و 50 إلى جداء عوامل أولية :

$$, 30 = 2 \times 3 \times 5 , 27 = 3^3 , 25 = 5^2 , 18 = 2 \times 3^2 , 6 = 2 \times 3 , 9 = 3^2 , 4 = 2^2$$

$$50 = 2 \times 5^2 \text{ و منه نجد :}$$

$$D = -\frac{2^5 \times 5^8 \times (3^2)^3}{(2 \times 3)^4 \times (2 \times 3 \times 5)^5} \times \frac{(2 \times 3^2)^7 \times 2^4 \times (2 \times 5^2)^3}{(5^2)^6 \times (2^2)^5 \times (3^3)^2}$$

$$D = -\frac{2^5 \times 5^8 \times 3^6}{2^4 \times 3^4 \times 2^5 \times 3^5 \times 5^5} \times \frac{2^7 \times 3^{14} \times 2^4 \times 2^3 \times 5^6}{5^{12} \times 2^{10} \times 3^6}$$

و بالإختزال نجد :

$$D = -\frac{243}{125} \text{ أي } D = -\frac{3^5}{5^3} \text{ و منه نجد } D = -\frac{5^3}{2^4 \times 3^3} \times \frac{2^4 \times 3^8}{5^6}$$

التمرين رقم 46 :

$$Y = \frac{7 \times 2^5 \times 9^3 \times 3^2}{7^{-2} \times 2^4 \times 3^4} \quad \text{و} \quad X = 12,858585... \quad \text{ليكن العددان :}$$

1/ أكتب العدد Y على أبسط شكل ممكن .

2/ هل Y عدد عشري ؟

3/ أكتب X على شكل كسر غير قابل للإختزال .

حل مقترح :

1/ كتابة العدد Y على أبسط شكل ممكن :

نحلل العدد 9 إلى جداء عوامل أولية : $9 = 3^2$ و منه نجد

$$Y = \frac{7^3 \times 2^5 \times 3^6 \times 3^2}{2^4 \times 3^4} \quad \text{أي} \quad Y = \frac{7 \times 2^5 \times 3^6 \times 3^2}{7^{-2} \times 2^4 \times 3^4} \quad \text{أي} \quad Y = \frac{7 \times 2^5 \times (3^2)^3 \times 3^2}{7^{-2} \times 2^4 \times 3^4}$$

$$Y = 2 \times 3^4 \times 7^3 \quad \text{أي} \quad Y = 55566$$

2/ هل Y عدد عشري ؟

نعم Y عدد عشري لأن Y عدد طبيعي و $\mathbb{N} \subset \mathbb{D}$ (كل عدد طبيعي هو عدد عشري)

3/ كتابة X على شكل كسر غير قابل للاختزال :

معناه الانتقال من الكتابة العشرية الدورية إلى الكتابة الكسرية :

$X = 12,858585\dots$ أي $X = 12 + 0,858585\dots$ و بوضع $x = 0,858585\dots$ نحصل على :

$$. X = 12 + x$$

عدد أرقام الدور هو 2 و بالتالي نضرب المعادلة $x = 0,858585\dots$ في العدد 10^2 نحصل على :

$$100x = 85,858585\dots \text{ أي } 100x = 85 + 0,858585\dots \text{ أي } 100x = 85 + x \text{ لأن } 100x = 85 + x$$

$$. x = 0,858585\dots \text{ و منه } 100x - x = 85 \text{ أي } 99x = 85 \text{ و منه نحصل على : } x = \frac{85}{99}$$

نعوض الآن قيمة x في المعادلة $X = 12 + x$ فنجد : $X = 12 + \frac{85}{99}$ و بتوحيد المقامات نحصل على :

$$. X = \frac{1273}{99} \text{ أي } X = \frac{12 \times 99 + 85}{99}$$

الآن نتحقق إن كان الكسر $\frac{1273}{99}$ غير قابل للاختزال أو لا :

من أجل ذلك نحلل العددين 1273 و 99 إلى جداء عوامل أولية كالآتي :

$$\begin{cases} 1273 = 19 \times 67 \\ 99 = 3^2 \times 11 \end{cases}$$

نلاحظ أنه لا توجد أية عوامل أولية مشتركة بين البسط و المقام فيكون الكسر $\frac{1273}{99}$ غير قابل للاختزال .

التمرين رقم 47 :

(1) بين أن العدد 401 أولي .

(2) عين العددين الطبيعيين a و b بحيث : $a^2 - b^2 = 401$

حل مقترح :

(1) نبين أن العدد 401 أولي :

هل العدد يقبل القسمة على ...	2	3	5	7	11	13	17	19	23	نلاحظ أن $17 < 23$
الإجابة	لا	لا	لا	لا	لا	لا	لا	لا	لا	
حاصل القسمة	200	133	80	57	36	30	23	21	17	

آخر باقي غير معدوم و منه فالعدد 401 أولي .

(2) تعيين العددين الطبيعيين a و b بحيث : $a^2 - b^2 = 401$

باستعمال التحليل بالمتطابقات الشهيرة نحصل على : $(a-b)(a+b) = 401$

و منه فالعدد $a-b$ يقسم 401 و العدد $a+b$ يقسم 401 ؛ لكن من السؤال 1/ نعلم أن 401 عدد أولي أي

أنه يقبل بالضبط قاسمين هما 1 و 401 ؛ إذن يكون : $\begin{cases} a-b=1 \\ a+b=401 \end{cases}$ لأن $a+b > a-b$ ($a \in \mathbb{N}$ و

: $(b \in \mathbb{N}$

و بجمع المعادلتين نحصل على : $2a = 402$ و منه نجد $a = 201$.

و لإيجاد قيمة b يكفي تعويض قيمة a في المعادلة 2 فنجد $b = 401 - 201$ أي $b = 200$.

التمرين رقم 48 :

برهن صحة المساويتين الآتيتين : $1 + \sqrt{3} = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{2} \times \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ و

$$\cdot \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} = 1$$

حل مقترح :

للبرهان على صحة المساواة (1) نبدأ بحساب المقدار $(1 + \sqrt{3})^2$:

$$(1 + \sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3} \text{ أي } (1 + \sqrt{3})^2 = 1 + 2\sqrt{3} + 3 \text{ أي } (1 + \sqrt{3})^2 = 1^2 + 2 \times 1 \times \sqrt{3} + \sqrt{3}^2$$

$$\text{و منه نجد } 1 + \sqrt{3} = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$$

$$\text{من جهة أخرى : } \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{2 \times 2 + 2\sqrt{3}} \text{ أي } \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{2(2 + \sqrt{3})} \text{ و منه نجد}$$

$$\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{2} \times \sqrt{2 + \sqrt{3}} \text{ ومنه } 1 + \sqrt{3} = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{2} \times \sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

للبرهان على صحة المساواة (2) نبدأ بتطبيق المقامات (نكتبها على شكل أعداد ناطقة خالية من الجذور) :

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{(\sqrt{4}+\sqrt{3})(\sqrt{4}-\sqrt{3})}$$

$$\text{و منه } \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{4-3} \text{ أي :}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} = \cancel{\sqrt{2}} - 1 + \cancel{\sqrt{3}} - \cancel{\sqrt{2}} + \sqrt{4} - \cancel{\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} = 2 - 1 = 1 \text{ أي } \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} = \sqrt{4} - 1$$

و منه صحة المساواة (2) .

التمرين رقم 49 :

a و b عددان لهما على الترتيب كرتبة مقدار 7×10^8 و 6×10^{-15}

1/ عين رتبة مقدار a^2 ، b^2 ثم $a^2 b^2$.

2/ عين رتبة مقدار ab و $(ab)^2$.

3/ ماذا تستنتج ؟

حل مقترح :

1/ تعيين رتبة مقدار a^2 ، b^2 ثم a^2b^2 :

$a^2 = a \times a$ ونعلم أن رتبة مقدار الجداء هي جداء رتبتي مقداري العددين بحيث :

$7 \times 10^8 \times 7 \times 10^8 = 49 \times 10^{16}$ ؛ الآن نكتب العدد 49×10^{16} على الشكل العلمي فنجد : $4,9 \times 10^{17}$

ومنه تكون رتبة مقدار العدد a^2 هي : 5×10^{17} .

$b^2 = b \times b$ ونعلم أن رتبة مقدار الجداء هي جداء رتبتي مقداري العددين بحيث :

$6 \times 10^{-15} \times 6 \times 10^{-15} = 36 \times 10^{-30}$ ؛ الآن نكتب العدد 36×10^{-30} على الشكل العلمي فنجد : $3,6 \times 10^{-29}$

ومنه تكون رتبة مقدار العدد b^2 هي : 4×10^{-29} .

$a^2b^2 = a^2 \times b^2$ ونعلم أن رتبة مقدار الجداء هي جداء رتبتي مقداري العددين بحيث :

$5 \times 10^{17} \times 4 \times 10^{-29} = 20 \times 10^{-12}$ ؛ الآن نكتب العدد 20×10^{-12} على الشكل العلمي فنجد : 2×10^{-11}

ومنه تكون رتبة مقدار العدد a^2b^2 هي : 2×10^{-11} .

2/ تعيين رتبة مقدار ab و $(ab)^2$:

نعلم أن رتبة مقدار الجداء هي جداء رتبتي مقداري العددين بحيث :

$7 \times 10^8 \times 6 \times 10^{-15} = 42 \times 10^{-7}$ ؛ الآن نكتب العدد 42×10^{-7} على الشكل العلمي فنجد : $4,2 \times 10^{-6}$

ومنه تكون رتبة مقدار العدد ab هي : 4×10^{-6} .

$(ab)^2 = ab \times ab$ ونعلم أن رتبة مقدار الجداء هي جداء رتبتي مقداري العددين بحيث :

$4 \times 10^{-6} \times 4 \times 10^{-6} = 16 \times 10^{-12}$ ؛ الآن نكتب العدد 16×10^{-12} على الشكل العلي فنجد : $1,6 \times 10^{-11}$

و منه تكون رتبة مقدار العدد $(ab)^2$ هي : 2×10^{-11} .

3 / الإستنتاج :

رتبة مقدار العدد a^2b^2 مساوية لرتبة مقدار العدد $(ab)^2$.

التمرين رقم 50 :

(1) إختزل الأعداد الآتية باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية : $A = \frac{(-4)^2 (-25)^3}{36 \times 10^2}$ ،

$B = \frac{6\sqrt{288} \times \sqrt{75}}{\sqrt{90} \times \sqrt{20}}$ ، $C = \frac{17303}{792}$ ، $D = \frac{180}{126}$: هل العدد D عشري ؟

(2) أكتب على الشكل $a\sqrt{b}$ بحيث $b \in \mathbb{N}$ و b أصغر ما يمكن الأعداد التالية : $\sqrt{252}$ ، $\sqrt{1000}$.

حل مقترح :

(1) إختزال الأعداد الآتية باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية :

$$A = \frac{(-4)^2 (-25)^3}{36 \times 10^2} = -\frac{4^2 \times 25^3}{36 \times 10^2}$$

$$4 = 2^2 ، 25 = 5^2 ، 36 = 2^2 \times 3^2 ، 10 = 2 \times 5 \text{ و منه نجد :}$$

$$A = -\frac{625}{9} \text{ أي } A = -\frac{5^4}{3^2} \text{ أي } A = -\frac{2^4 \times 5^6}{2^2 \times 3^2 \times 2^2 \times 5^2} \text{ أي } A = -\frac{(2^2)^2 \times (5^2)^3}{(2 \times 3)^2 \times (2 \times 5)^2}$$

$$B = \frac{6\sqrt{288} \times \sqrt{75}}{\sqrt{90} \times \sqrt{20}} : \text{ نحلل الأعداد } 288 ، 75 ، 90 ، 20 \text{ فنجد :}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 288 = 2^5 \times 3^2 \\ 75 = 3 \times 5^2 \end{array} \right. \quad \text{و منه نتحصل على الشكل :} \quad \left\{ \begin{array}{l} 90 = 2 \times 3^2 \times 5 \\ 20 = 2^2 \times 5 \end{array} \right.$$

$$B = \frac{6 \times 2 \times 5 \sqrt{3}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} \quad \text{أي} \quad B = \frac{6 \times 2^2 \times 3 \sqrt{2} \times 5 \sqrt{3}}{3 \sqrt{2} \times \sqrt{5} \times 2 \sqrt{5}} \quad \text{أي} \quad B = \frac{6 \sqrt{2^5 \times 3^2} \times \sqrt{3 \times 5^2}}{\sqrt{2 \times 3^2 \times 5} \times \sqrt{2^2 \times 5}}$$

$$B = \frac{6 \times 2 \times 5 \sqrt{3}}{5} \quad \text{و منه نجد :} \quad B = 12\sqrt{3}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 17303 = 11^3 \times 13 \\ 792 = 2^3 \times 3^2 \times 11 \end{array} \right. \quad \text{نحلل كلا من البسط والمقام إلى جداء عوامل أولية :} \quad C = \frac{17303}{792}$$

$$\text{إذن :} \quad C = \frac{17303}{792} = \frac{11^3 \times 13}{2^3 \times 3^2 \times 11} \quad \text{و بإختزال كل العوامل الأولية المشتركة نتحصل على :}$$

$$C = \frac{11^2 \times 13}{2^3 \times 3^2} \quad \text{أي} \quad C = \frac{1573}{72}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 180 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \\ 126 = 2 \times 3^2 \times 7 \end{array} \right. \quad \text{نحلل كلا من البسط والمقام إلى جداء عوامل أولية :} \quad D = \frac{180}{126}$$

$$\text{إذن :} \quad D = \frac{180}{126} = \frac{2^2 \times 3^2 \times 5}{2 \times 3^2 \times 7}$$

$$D = \frac{2 \times 5}{7} \quad \text{أي} \quad D = \frac{10}{7} \quad (\text{العدد } D \text{ ليس عشريا لأن تحليل مقام الكسر الغير قابل للإختزال } \frac{10}{7} \text{ يشتمل}$$

على عدد أولي وهو 7 يختلف عن 2 و يختلف عن 5) .

(2) كتابة على الشكل $a\sqrt{b}$ بحيث $b \in \mathbb{N}$ و b أصغر ما يمكن الأعداد التالية : $\sqrt{252}$ ، $\sqrt{1000}$.

نحلل العددين 252 و 1000 إلى جداء عوامل أولية : $252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$ و $1000 = 2^3 \times 5^3$.

$$\text{إذن نجد :} \quad \sqrt{252} = \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 7} = 2 \times 3 \sqrt{7} = 6\sqrt{7} \quad \text{و هي أبسط كتابة من الشكل } a\sqrt{b}$$

بحيث b طبيعي و b أصغر ما يمكن ؛ و كذلك $\sqrt{1000} = \sqrt{2^3 \times 5^3}$ أي $\sqrt{1000} = 2 \times 5 \sqrt{5 \times 2}$ أي

$\sqrt{1000} = 10\sqrt{10}$ وهي أبسط كتابة من الشكل $a\sqrt{b}$ بحيث b طبيعي و b أصغر ما يمكن .

حدد أصغر مجموعة تنتمي إليها الأعداد التالية :

$$C = \frac{1}{3-\sqrt{5}} + \frac{1}{3+\sqrt{5}} , \quad B = \sqrt{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}} , \quad A = \sqrt{22+\sqrt{5+\sqrt{15+\sqrt{1}}}}$$

$$E = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}}} , \quad D = \sqrt{4-\sqrt{7}} \sqrt{4+\sqrt{7}}$$

حل مقترح :

لدينا $\sqrt{15+\sqrt{1}} = \sqrt{15+1} = \sqrt{16} = 4$ و منه $A = \sqrt{22+\sqrt{5+4}} = \sqrt{22+3} = \sqrt{25} = 5$ بحيث $\sqrt{5+4} = \sqrt{9} = 3$ و منه نجد $A = \sqrt{22+3} = \sqrt{25} = 5$ أي $A = \sqrt{25}$ و منه $A = 5 \in \mathbb{N}$.

$$B = \sqrt{\frac{\sqrt{3}^2 - \sqrt{2}^2}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}} \text{ أي } B = \sqrt{\frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}}$$

$$B = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} \text{ و منه } B = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \text{ أي } B = \sqrt{\frac{3-2}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}}$$

$$B = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{1} \text{ أي } B = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3}^2 - \sqrt{2}^2} \text{ و منه } B = \sqrt{3} + \sqrt{2} \in \mathbb{R} \text{ (} B \text{ أصم)}$$

$$C = \frac{1}{3-\sqrt{5}} + \frac{1}{3+\sqrt{5}} \text{ و بكتابة المقامات على شكل أعداد ناطقة نجد :}$$

$$C = \frac{3+\sqrt{5}}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} + \frac{3-\sqrt{5}}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} \text{ أي } C = \frac{3+\sqrt{5}}{3^2 - \sqrt{5}^2} + \frac{3-\sqrt{5}}{3^2 - \sqrt{5}^2}$$

$$C = \frac{6}{4} = 1,5 \in \mathbb{D} \text{ و منه نجد } C = \frac{3 + \sqrt{5} + 3 - \sqrt{5}}{4} \text{ أي } C = \frac{3 + \sqrt{5}}{4} + \frac{3 - \sqrt{5}}{4}$$

$$D = \sqrt{4^2 - \sqrt{7}^2} \text{ أي } D = \sqrt{(4 - \sqrt{7})(4 + \sqrt{7})} \text{ و منه } D = \sqrt{4 - \sqrt{7}} \sqrt{4 + \sqrt{7}}$$

$$D = \sqrt{9} = 3 \in \mathbb{N} \text{ و منه } D = \sqrt{16 - 7}$$

$$E = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1 - \sqrt{2}}{(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})}}} \text{ و منه نجد } E = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}}}$$

$$E = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}} \text{ و منه } E = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \sqrt{2} - 1}} \text{ أي } E = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1 - \sqrt{2}}{(1^2 - \sqrt{2}^2)}}}$$

$$E = 1 + \frac{1}{2 + \sqrt{2} - 1} \text{ أي } E = 1 + \frac{1}{2 + \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}^2 - 1^2}} \text{ أي } E = 1 + \frac{1}{2 + \frac{\sqrt{2} - 1}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)}}$$

$$E = 1 + \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}^2 - 1^2} \text{ أي } E = 1 + \frac{\sqrt{2} - 1}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} \text{ و منه } E = 1 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$$

$$E = 1 + \sqrt{2} - 1 \text{ و منه نجد } E = \sqrt{2} \in \mathbb{R} \text{ (أصم)}$$

التمرين رقم 52 :

ليكن العددان الحقيقيان a و b بحيث :

$$b = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ و } a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

(1) أحسب ab و $a+b$

(2) إستنتج قيمة كل من $a^2 + b^2$ و $a^4 + b^4$

(3) بين أن : $a^2 = a+1$ و $a^3 = 2a+1$

حل مقترح :

(1) حساب ab و $a+b$:

$$ab = \frac{1-5}{4} \text{ أي } ab = \frac{1^2 - \sqrt{5}^2}{4} \text{ أي } ab = \frac{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}{4} \text{ أي } ab = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \times \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

نجد $ab = -1$.

(2) إستنتاج قيمة كل من $a^2 + b^2$ و $a^4 + b^4$:

$$\text{قبل ذلك نحسب } (a+b)^2 \text{ فنجد : } (a+b)^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}+1-\sqrt{5}}{2} \right)^2$$

$$(a+b)^2 = \left(\frac{2}{2} \right)^2 \text{ أي } (a+b)^2 = 1$$

من جهة أخرى نعلم أن : $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ بحيث $(a+b)^2 = 1$ و $ab = -1$ و منه ينتج :

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab \text{ أي } a^2 + b^2 = 1 - 2 \times (-1) \text{ أي } a^2 + b^2 = 3$$

و كذلك $(a^2 + b^2)^2 = 3^2 = 9$ و من جهة أخرى $(a^2 + b^2)^2 = (a^2 + b^2)(a^2 + b^2)$

$$(a^2 + b^2)^2 = a^4 + b^4 + 2(ab)^2 \text{ أي } (a^2 + b^2)^2 = a^4 + b^4 + a^2b^2 + b^2a^2 \text{ و منه يكون}$$

$$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2(ab)^2 \text{ بحيث } (a^2 + b^2)^2 = 9 \text{ و } (ab)^2 = (-1)^2 = 1 \text{ و منه نجد}$$

$$. a^4 + b^4 = 7 \text{ أي } a^4 + b^4 = 9 - 2 \times 1$$

$$(3) \text{ نبين أن : } a^2 = a + 1 \text{ و } a^3 = 2a + 1$$

$$a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ و منه } a^2 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 \text{ أي } a^2 = \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} \text{ أي } a^2 = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4}$$

$$a^2 = \frac{2(3 + \sqrt{5})}{2 \times 2} \text{ و منه نجد } a^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \text{ أي } a^2 = \frac{2 + 1 + \sqrt{5}}{2} \text{ أي } a^2 = \frac{2}{2} + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$. a^2 = 1 + a \text{ و منه نجد } a^2 = 1 + a \text{ و هو المطلوب .}$$

$$\text{بما أن } a^2 = 1 + a \text{ فإن } a \times a^2 = a(1 + a) \text{ أي } a^3 = a + a^2 \text{ و منه } a^3 = a + 1 + a \text{ أي } a^3 = 2a + 1 \text{ و هو المطلوب .}$$

ملحظة : العدد الحقيقي a يسمى العدد الذهبي (La section dorée)

التمرين رقم 53 :

$$\text{ليكن } x \text{ و } y \text{ عددين من } \mathbb{R} - \{-1, 1\} \text{ ، نضع : } A = \frac{x + y}{1 + xy}$$

$$(1) \text{ أوجد قيمة } A \text{ من أجل } x = \frac{1}{3} \text{ و } y = \frac{-2}{5}$$

$$(2) \text{ أحسب } (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 \text{ و } (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 .$$

$$(3) \text{ نضع } x = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} \text{ و } y = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$$

$$\text{بين أن } A = \sqrt{3} .$$

$$(4) \text{ بين أنه من أجل كل } x \text{ و } y \text{ من } \mathbb{R} - \{-1, 1\} \text{ فإن :}$$

$$1 - A = \frac{(x-1)(y-1)}{1+xy} \quad , \quad 1 + A = \frac{(x+1)(y+1)}{1+xy}$$

حل مقترح :

$$(1) \text{ إيجاد قيمة } A \text{ من أجل } x = \frac{1}{3} \text{ و } y = \frac{-2}{5}$$

$$A = -\frac{1}{13} \text{ أي } A = -\frac{1}{15} \times \frac{15}{13} \text{ و منه } A = \frac{-\frac{1}{15}}{\frac{15-2}{15}} \text{ أي } A = \frac{5-2 \times 3}{1-\frac{2}{15}} \text{ أي } A = \frac{\frac{1}{3} - \frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{3} \times \frac{2}{5}}$$

$$(2) \text{ حساب } (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 \text{ و } (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 :$$

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = 3 - 2\sqrt{6} + 2 \text{ أي } (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = \sqrt{3}^2 - 2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} + \sqrt{2}^2$$

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = 5 - 2\sqrt{6}$$

$$(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{6} + 2 \text{ أي } (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = \sqrt{3}^2 + 2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} + \sqrt{2}^2$$

$$(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = 5 + 2\sqrt{6}$$

$$(3) \text{ نضع } x = \sqrt{5+2\sqrt{6}} \text{ و } y = \sqrt{5-2\sqrt{6}}$$

$$A = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{6}} + \sqrt{5-2\sqrt{6}}}{1 + \sqrt{(5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})}} \text{ أي } A = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{6}} + \sqrt{5-2\sqrt{6}}}{1 + \sqrt{5+2\sqrt{6}} \times \sqrt{5-2\sqrt{6}}} : A = \sqrt{3} \text{ نبين أن}$$

$$A = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{6}} + \sqrt{5-2\sqrt{6}}}{1 + \sqrt{25-24}} \text{ أي } A = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{6}} + \sqrt{5-2\sqrt{6}}}{1 + \sqrt{5^2 - (2\sqrt{6})^2}} \text{ أي و من السؤال (3) نعلم أن}$$

$$\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^2 = 5 + 2\sqrt{6} \text{ و } \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^2 = 5 - 2\sqrt{6} \text{ و منه نجد}$$

$$A = \frac{\sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}}{2} \text{ أي } A = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} \text{ أي } A = \frac{2\sqrt{3}}{2} \text{ و منه نجد}$$

$$A = \sqrt{3} \text{ و هو المطلوب .}$$

(4) نبين أنه من أجل كل x و y من $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ فإن :

$$1 - A = \frac{(x-1)(y-1)}{1+xy} \text{ و } 1 + A = \frac{(x+1)(y+1)}{1+xy}$$

$$1 + A = 1 + \frac{x+y}{1+xy} \text{ و بتوحيد المقامات نحصل على : } 1 + A = \frac{1+xy+x+y}{1+xy} \text{ أي}$$

$$1 + A = \frac{(x+1)(y+1)}{1+xy} \text{ و هو المطلوب .}$$

$$1 - A = 1 - \frac{x+y}{1+xy} \text{ و بتوحيد المقامات نحصل على : } 1 - A = \frac{1+xy-(x+y)}{1+xy} \text{ أي}$$

$$1 - A = \frac{1+xy-x-y}{1+xy} \text{ أي } 1 - A = \frac{x(y-1)-(y-1)}{1+xy} \text{ أي } 1 - A = \frac{(x-1)(y-1)}{1+xy} \text{ و هو}$$

المطلوب .

التمرين رقم 54 :

(1) أكتب الأعداد التالية بمقامات ناطقة :

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}, \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \text{ بحيث } n \text{ عدد طبيعي .}$$

$$(2) \text{ أحسب المجموع } S \text{ الآتي : } S = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{144}+\sqrt{143}}$$

حل مقترح :

(1) كتابة الأعداد التالية بمقامات ناطقة :

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} ، \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} ، \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \text{ بحيث } n \text{ عدد طبيعي .}$$

$$\cdot \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1 \text{ أي } \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} \text{ أي } \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}^2-1^2}$$

$$\text{أي } \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} \text{ أي } \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}^2-\sqrt{2}^2}$$

$$\cdot \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$\text{أي } \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}^2-\sqrt{n}^2}$$

$$\cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \text{ أي } \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n+1-n}$$

ملاحظة : جميع الكسور السابقة مقاماتها أعداد ناطقة تساوي 1 .

$$(2) \text{ حساب المجموع } S \text{ الآتي : } S = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{144}+\sqrt{143}}$$

$$\text{من السؤال السابق نعلم أن : } \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} = \sqrt{2}-\sqrt{1} ، \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \sqrt{3}-\sqrt{2} ، \dots ،$$

$$\frac{1}{\sqrt{144}+\sqrt{143}} = \sqrt{144}-\sqrt{143} \text{ لأنه بصفة عامة من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ فإن :}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \text{ و منه يصبح المجموع } S \text{ كالآتي :}$$

$\sqrt{143}$ حتى $\sqrt{2}$ من الحدود من $S = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \dots + \sqrt{144} - \sqrt{143}$ ، و من الواضح أن الحدود من $\sqrt{2}$ حتى $\sqrt{143}$

توجد في المجموع مع معاكساتها أي (1 و $-\sqrt{1}$) و ($\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$) ($\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$) و)

$\sqrt{143}$ و $-\sqrt{143}$) بينما يوجد فقط $\sqrt{144}$ و لا يوجد معاكسه $-\sqrt{144}$ و منه نستنتج أن :

$$S = \sqrt{144} \text{ أي } S = 12.$$

التمرين رقم 55 :

(1) حل كلا من العددين 1386 و 999 إلى جداء عوامل أولية .

(2) إستنتج تحليلا للعدد $1386^2 \times 999^2$ إلى جداء عوامل أولية .

(3) عين $PGCD(1386;999)$ و $PPCM(1386;999)$

$$(4) \text{ أوجد قيمة المجموع : } \frac{1}{1386} + \frac{2}{999}$$

(5) ليكن العدد $\alpha = 1, \underline{387}387\dots$

• ما هي طبيعة العدد α ؟

• أعط الكتابة الكسرية لـ α ثم إستنتج شكله غير قابل للاختزال .

حل مقترح :

(1) تحليل كلا من العددين 1386 و 999 إلى جداء عوامل أولية :

$$\begin{cases} 1386 = 2 \times 3^2 \times 11 \times 7 \\ 999 = 3^3 \times 37 \end{cases}$$

(2) إستنتج تحليلا للعدد $1386^2 \times 999^2$ إلى جداء عوامل أولية :

$$1386^2 \times 999^2 = (2 \times 3^2 \times 11 \times 7)^2 \times (3^3 \times 37)^2$$

$$1386^2 \times 999^2 = 2^2 \times 3^{10} \times 11^2 \times 7^2 \times 37^2 \text{ أي } 1386^2 \times 999^2 = 2^2 \times 3^4 \times 11^2 \times 7^2 \times 3^6 \times 37^2$$

(3) تعيين $PGCD(1386;999)$ و $PPCM(1386;999)$:

$PGCD(1386;999)$ هو جداء العوامل الأولية المشتركة مأخوذة مرة واحدة وبأصغر أس و منه نجد :

$$PGCD(1386;999) = 3^2 \text{ أي } PGCD(1386;999) = 9$$

$PPCM(1386;999)$ هو جداء العوامل الأولية المشتركة و غير المشتركة مأخوذة مرة واحدة وبأكبر أس و منه

$$PPCM(1386;999) = 2 \times 3^3 \times 11 \times 7 \times 37 \text{ أي } PPCM(1386;999) = 153846$$

$$(4) \text{ إيجاد قيمة المجموع : } \frac{1}{1386} + \frac{2}{999}$$

$$\frac{1}{1386} + \frac{2}{999} = \frac{3^3 \times 37 + 2^2 \times 3^2 \times 11 \times 7}{2 \times 3^2 \times 11 \times 7 \times 3^3 \times 37} \text{ أي } \frac{1}{1386} + \frac{2}{999} = \frac{1 \times 999 + 2 \times 1386}{1386 \times 999}$$

$$\frac{1}{1386} + \frac{2}{999} = \frac{3 \times 37 + 2^2 \times 11 \times 7}{2 \times 11 \times 7 \times 3^3 \times 37} \text{ أي } \frac{1}{1386} + \frac{2}{999} = \frac{3^2 (3 \times 37 + 2^2 \times 11 \times 7)}{2 \times 3^2 \times 11 \times 7 \times 3^3 \times 37}$$

$$\frac{1}{1386} + \frac{2}{999} = \frac{419}{153846}$$

$$(5) \text{ ليكن العدد } \alpha = 1, \underline{387}387 \dots$$

• تحديد طبيعة العدد α :

α عدد ناطق، مكتوب ككتابة عشرية دورية بحيث الدور هو 387 .

• تعيين الكتابة الكسرية لـ α ثم إستنتاج شكله غير قابل للإختزال :

$$\alpha = 1, \underline{387}387 \dots = 1 + 0, \underline{387}387 \dots \text{ و بوضع } x = 0, \underline{387}387 \dots \text{ ينتج : } \alpha = 1 + x$$

بما أن عدد أرقام الدور هو 3 إذن نضرب المعادلة $x = 0, \underline{387}3$ في 10^3 (في 1000) نتحصل على :

$$1000x = 387, \underline{387}387... \text{ أي } 1000x = 387 + 0, \underline{387}387... \text{ ، و بما أن } x = 0, \underline{387}387...$$

فينتج $1000x = 387 + x$ أي $1000x - x = 387$ أي $999x = 387$ و منه نجد $x = \frac{387}{999}$.

و منه ينتج : $\alpha = 1 + \frac{387}{999}$ أي $\alpha = \frac{1 \times 999 + 387}{999}$ أي $\alpha = \frac{1386}{999}$.

لإيجاد الشكل غير قابل للإختزال للكسر $\frac{1386}{999}$ يكفي أن نقسم كلا من البسط والمقام على نفس العدد و هو

$PGCD(1386; 999) = 9$ و منه نجد : $PGCD(1386; 999) = 9$

$$\alpha = \frac{1386}{999} = \frac{1386 \cancel{9}}{999 \cancel{9}} = \frac{154}{111} \text{ و هو المطلوب .}$$

التمرين رقم 56 :

ليكن العددين الحقيقيين a و b بحيث :

$$a + b = 1 \quad -1$$

$$a^2 + b^2 = 2 \quad -2$$

(1) أنشر المقدار $(a + b)^2$ وإستنتج قيمة الجداء ab .

(2) أنشر المقدار $(a^2 + b^2)^2$ وإستنتج أن $a^4 + b^4$ عدد عشري .

(3) تحقق بالحساب أن : $a = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ و $b = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$ يحققان الشرطين -1 و -2

حل مقترح :

(1) نشر المقدار $(a+b)^2$ وإستنتاج قيمة الجداء ab :

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ بحيث $a+b=1$ و $a^2 + b^2 = 2$ و منه ينتج :

$$ab = -\frac{1}{2} \quad 2ab = -1 \text{ أي } 1^2 = 2 + 2ab \text{ و منه نجد}$$

(2) نشر المقدار $(a^2 + b^2)^2$ وإستنتاج أن $a^4 + b^4$ عدد عشري :

$(a^2 + b^2)^2 = a^4 + b^4 + 2(a \times b)^2$ أي $(a^2 + b^2)^2 = (a^2)^2 + (b^2)^2 + 2a^2 \times b^2$ بحيث

$$a^2 + b^2 = 2 \text{ و } a \times b = -\frac{1}{2} \text{ و منه نجد } a^4 + b^4 = 4 - 2 \times \frac{1}{4} \text{ أي } a^4 + b^4 = 4 - \frac{1}{2}$$

$a^4 + b^4 = \frac{7}{2}$ ؛ و العدد $\frac{7}{2}$ عشري لأنه كسر غير قابل للإختزال و تحليل مقامه إلى جداء عوامل أولية لا يشتمل

عددا أوليا يختلف عن 2 و يختلف عن 5 .

طريقة أخرى : يمكن كتابة $\frac{7}{2} = 3,5$ و 3,5 عدد عشري (لأن الجزء العشري منته) .

(3) التحقق بالحساب أن : $a = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ و $b = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ يحققان الشرطين -1 و -2

$$a+b=1 \text{ لدينا : } a+b = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\cancel{\sqrt{3}}+1-\cancel{\sqrt{3}}}{2} = \frac{2}{2}$$

$$a^2 + b^2 = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2 \text{ و بالنشر نتحصل على :}$$

$$a^2 + b^2 = \frac{1^2 + 2 \times 1 \times \sqrt{3} + \sqrt{3}^2}{4} + \frac{1^2 - 2 \times 1 \times \sqrt{3} + \sqrt{3}^2}{4} \text{ أي } a^2 + b^2 = \frac{1+3+1+3}{4}$$

$$a^2 + b^2 = 2 \text{ و منه نجد } a^2 + b^2 = \frac{8}{4}$$

n عدد طبيعي غير معدوم .

$$(1) \text{ تحقق أن : } \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

(2) باستعمال نتيجة السؤال (1) أوجد قيمة مبسطة للمجموع S الآتي :

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{99 \times 100}$$

حل مقترح :

n عدد طبيعي غير معدوم .

$$(1) \text{ التحقق أن : } \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

بتوحيد المقامات نحصل على : $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1(n+1) - 1 \times n}{n(n+1)}$ أي $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)}$ و منه نجد :

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \text{ وهو المطلوب .}$$

(2) باستعمال نتيجة السؤال (1) إيجاد قيمة مبسطة للمجموع S الآتي :

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{99 \times 100}$$

يمكن ملاحظة أن المجموع S يكتب من الشكل : $S = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \dots + \frac{1}{99 \times 100}$

أي $S = \frac{1}{1 \times (1+1)} + \frac{1}{2 \times (2+1)} + \frac{1}{3 \times (3+1)} + \frac{1}{4 \times (4+1)} + \dots + \frac{1}{99 \times (99+1)}$ و بالتالي كل

حد في المجموع (كل كسر) يكتب من الشكل $\frac{1}{n(n+1)}$ و منه حسب السؤال (1) نتحصل على :

$$S = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right)$$

$$S = \frac{1}{1} - \frac{1}{100} \quad \text{أي} \quad S = \frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{5}} + \cancel{\frac{1}{5}} - \dots - \cancel{\frac{1}{99}} + \cancel{\frac{1}{99}} - \frac{1}{100}$$

$$S = \frac{99}{100} \quad \text{و منه نجد} \quad S = \frac{100-1}{100} \quad \text{أي}$$

التمرين رقم 58 :

نعتبر العددين الطبيعيين $A = 1200$ و $B = 5292$.

(1) حل كلا من العددين A و B إلى جداء عوامل أولية ثم إستنتج تحليلا للجداء $A^2 \times B^2$.

(2) ما طبيعة العدد $\sqrt{A \times B}$ ؟

(3) عين القيمة المضبوطة للعدد $\sqrt{A} - \sqrt{B}$.

(4) عين $PGCD(A; B)$ و $PPCM(A; B)$

(5) إختزل الكسر $\frac{A}{B}$ ثم أحسب المجموع $-\frac{3}{A} + \frac{7}{B}$

حل مقترح :

نعتبر العددين الطبيعيين $A = 1200$ و $B = 5292$.

(1) تحليل كلا من العددين A و B إلى جداء عوامل أولية ثم إستنتاج تحليلا للجداء $A^2 \times B^2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} A = 1200 = 2^4 \times 3 \times 5^2 \\ B = 5292 = 2^2 \times 3^3 \times 7^2 \end{array} \right. \quad \text{و منه يكون :} \quad A^2 \times B^2 = (2^4 \times 3 \times 5^2)^2 \times (2^2 \times 3^3 \times 7^2)^2 \quad \text{أي}$$

$$A^2 \times B^2 = 2^{12} \times 3^8 \times 5^4 \times 7^4 \text{ أي } A^2 \times B^2 = 2^8 \times 3^2 \times 5^4 \times 2^4 \times 3^6 \times 7^4$$

(2) تحديد طبيعة العدد $\sqrt{A \times B}$:

$$\sqrt{A \times B} = \sqrt{2^6 \times 3^4 \times 5^2 \times 7^2} \text{ أي } \sqrt{A \times B} = \sqrt{2^4 \times 3 \times 5^2 \times 2^2 \times 3^3 \times 7^2}$$

$$\sqrt{A \times B} = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \text{ أي } \sqrt{A \times B} = 2520 \text{ و هو عدد طبيعي أي } \sqrt{A \times B} \in \mathbb{N}$$

(3) تعيين القيمة المضبوطة للعدد $\sqrt{A} - \sqrt{B}$:

$$\sqrt{A} - \sqrt{B} = \sqrt{2^4 \times 3 \times 5^2} - \sqrt{2^2 \times 3^3 \times 7^2} \text{ و منه نجد } \sqrt{A} - \sqrt{B} = 2^2 \times 5\sqrt{3} - 2 \times 3 \times 7\sqrt{3}$$

$$\sqrt{A} - \sqrt{B} = 20\sqrt{3} - 42\sqrt{3} \text{ أي } \sqrt{A} - \sqrt{B} = -22\sqrt{3} \text{ و منه نتحصل على : } \sqrt{A} - \sqrt{B} = -22\sqrt{3}$$

(4) تعيين $PGCD(A; B)$ و $PPCM(A; B)$:

$PGCD(A; B)$ هو جداء العوامل الأولية المشتركة في تحليل العددين A و A مأخوذة مرة واحدة وبأصغر أس

$$\text{و منه نجد } PGCD(A; B) = 2^2 \times 3^1 \text{ أي } PGCD(A; B) = 12$$

$PPCM(A; B)$ هو جداء العوامل الأولية المشتركة و غير المشتركة في تحليل العددين A و A مأخوذة مرة

$$\text{واحدة وبأكبر أس و منه نجد } PPCM(A; B) = 2^4 \times 3^3 \times 5^2 \times 7^2 \text{ أي } PPCM(A; B) = 529200$$

(5) إختزال الكسر $\frac{A}{B}$:

الطريقة 1 : باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية

$$\frac{A}{B} = \frac{2^4 \times 3 \times 5^2}{2^2 \times 3^3 \times 7^2} \text{ و بإختزال كل العوامل الأولية المشتركة نتحصل على : } \frac{A}{B} = \frac{2^2 \times 5^2}{3^2 \times 7^2} \text{ أي } \frac{A}{B} = \frac{100}{441}$$

الطريقة 2 : باستعمال القاسم المشترك الأكبر $PGCD(A; B)$

نعلم أن $PGCD(A; B) = 12$ و منه بقسمة كل من البسط A و B على 12 نتحصل على :

$$\frac{A}{B} = \frac{1200}{5292} = \frac{1200 \div 12}{5292 \div 12} = \frac{100}{441} \text{ و هو كسر غير قابل للاختزال .}$$

$$\text{حساب المجموع } -\frac{3}{A} + \frac{7}{B} = -\frac{3}{1200} + \frac{7}{5292} : \text{ وباستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية}$$

$$\text{للعدين } A \text{ و } B \text{ نجد : } -\frac{3}{A} + \frac{7}{B} = -\frac{3}{2^4 \times 3 \times 5^2} + \frac{7}{2^2 \times 3^3 \times 7^2}$$

$$-\frac{3}{A} + \frac{7}{B} = -\frac{1}{400} + \frac{1}{756} \text{ أي } -\frac{3}{A} + \frac{7}{B} = -\frac{1}{2^4 \times 5^2} + \frac{1}{2^2 \times 3^3 \times 7}$$

$$-\frac{3}{A} + \frac{7}{B} = -\frac{356}{302400} \text{ و منه نجد } -\frac{3}{A} + \frac{7}{B} = \frac{-756 + 400}{400 \times 756}$$

ملاحظة: يمكن كتابة الكسر السابق على شكل كسر غير قابل للاختزال .

التمرين رقم 59 : x و y من $\mathbb{R}^+$.

$$(1) \text{ بين أن : } \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{x + y + 2\sqrt{xy}}$$

$$(2) \text{ برهن صحة المساواة الآتية : } \sqrt{17 + 12\sqrt{2}} + \sqrt{17 - 12\sqrt{2}} = 6$$

$$(3) \text{ برهن صحة المساواتين الآتيتين : } 1 + \sqrt{3} = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{2} \times \sqrt{2 + \sqrt{3}} \text{ و}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{3}} = 1$$

$$(4) \text{ أحسب : } (1 + \sqrt{5})^2 \text{ و } (2 - \sqrt{5})^2 \text{ ثم إستنتج أن : } \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} + \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} - 1$$

حل مقترح : x و y من $\mathbb{R}^+$.

$$(1) \text{ نبين أن : } \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{x + y + 2\sqrt{xy}}$$

نبدأ أولاً بحساب المقدار $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$ فنتحصل على :

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = x + y + 2\sqrt{xy} \text{ أي } (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} + 2\sqrt{x} \times \sqrt{y}$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{x + y + 2\sqrt{xy}} \text{ يكفي : } \sqrt{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2} = \sqrt{x + y + 2\sqrt{xy}}$$

$$(2) \text{ البرهان على صحة المساواة الآتية : } \sqrt{17 + 12\sqrt{2}} + \sqrt{17 - 12\sqrt{2}} = 6$$

ننشر أولاً المقدار $(\sqrt{17 + 12\sqrt{2}} + \sqrt{17 - 12\sqrt{2}})^2$ فنتحصل على :

$$(\sqrt{17 + 12\sqrt{2}} + \sqrt{17 - 12\sqrt{2}})^2 = \sqrt{17 + 12\sqrt{2}}^2 + \sqrt{17 - 12\sqrt{2}}^2 + 2\sqrt{17 + 12\sqrt{2}} \times \sqrt{17 - 12\sqrt{2}}$$

أي

$$(\sqrt{17 + 12\sqrt{2}} + \sqrt{17 - 12\sqrt{2}})^2 = 17 + 12\sqrt{2} + 17 - 12\sqrt{2} + 2\sqrt{(17 + 12\sqrt{2})(17 - 12\sqrt{2})}$$

$$\text{و منه } (\sqrt{17 + 12\sqrt{2}} + \sqrt{17 - 12\sqrt{2}})^2 = 17 + 12\sqrt{2} + 17 - 12\sqrt{2} + 2(17^2 - (12\sqrt{2})^2) \text{ أي}$$

$$(\sqrt{17 + 12\sqrt{2}} + \sqrt{17 - 12\sqrt{2}})^2 = 34 + 2(289 - 288)$$

$$\sqrt{17 + 12\sqrt{2}} + \sqrt{17 - 12\sqrt{2}} = \sqrt{36} \text{ و منه ينتج } (\sqrt{17 + 12\sqrt{2}} + \sqrt{17 - 12\sqrt{2}})^2 = 36$$

$$\sqrt{17 + 12\sqrt{2}} + \sqrt{17 - 12\sqrt{2}} = 6 \text{ وهو المطلوب .}$$

$$(3) \text{ البرهان على صحة المساواتين الآتيتين : } 1 + \sqrt{3} = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{2} \times \sqrt{2 + \sqrt{3}} \text{ و}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{3}} = 1$$

نبدأ أولاً بحساب المقدار $(1+\sqrt{3})^2$ فنتحصل على :

$$1+\sqrt{3}=\sqrt{4+2\sqrt{3}} \text{ ومنه } (1+\sqrt{3})^2=4+2\sqrt{3} \text{ أي } (1+\sqrt{3})^2=1^2+\sqrt{3}^2+2\times 1\times \sqrt{3}$$

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{2}\times\sqrt{2+\sqrt{3}} \text{ أي } \sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{2(2+\sqrt{3})} \text{ وكذلك}$$

$$1+\sqrt{3}=\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{2}\times\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

من أجل المساواة الثانية نقوم بكتابة المقامات كأعداد ناطقة :

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{(\sqrt{4}+\sqrt{3})(\sqrt{4}-\sqrt{3})}$$

$$\text{أي } \frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{4-3} \text{ أي}$$

$$\text{أي } \frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}=\cancel{\sqrt{2}}-1+\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}}+\sqrt{4}-\cancel{\sqrt{3}}$$

$$\text{ومنه } \frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}=\sqrt{4}-1=2-1$$

$$\text{وهو المطلوب . } \frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}=1$$

$$(4) \text{ حساب : } (1+\sqrt{5})^2 \text{ و } (2-\sqrt{5})^2 \text{ ثم إستنتاج أن : } \sqrt{9-4\sqrt{5}}+\sqrt{6+2\sqrt{5}}=2\sqrt{5}-1$$

$$\text{بالنشر نجد : } (1+\sqrt{5})^2=1^2+\sqrt{5}^2+2\times 1\times \sqrt{5} \text{ و } (2-\sqrt{5})^2=2^2+\sqrt{5}^2-2\times 2\times \sqrt{5} \text{ ومنه}$$

$$(2-\sqrt{5})^2=9-4\sqrt{5} \text{ و } (1+\sqrt{5})^2=6+2\sqrt{5}$$

$$\text{بما أن } 6+2\sqrt{5}=(1+\sqrt{5})^2 \text{ فإن } \sqrt{6+2\sqrt{5}}=1+\sqrt{5} \text{ و بما أن } 9-4\sqrt{5}=(2-\sqrt{5})^2 \text{ فإن}$$

$$\sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{5}-2 \text{ أي } \sqrt{9-4\sqrt{5}} = -(2-\sqrt{5}) \text{ أي } \sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} \text{ لأن}$$

$$2-\sqrt{5} < 0 \text{ و منه نتحصل على :}$$

$$\sqrt{9-4\sqrt{5}} + \sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{5}-2+1+\sqrt{5} \text{ و منه } \sqrt{9-4\sqrt{5}} + \sqrt{6+2\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}-1 .$$

التمرين رقم 60 : برهن صحة المساويات التالية :

$$\frac{\sqrt{8}+33}{7-\sqrt{2}} = \sqrt{2}+5 \quad (1)$$

$$n \in \mathbb{N} \quad ; \quad \frac{(9^{n+1}+9^n)^2}{(3^{2n+1}-3^{2n})^2} = 25 \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{\frac{4}{3}} \right) = -\frac{1}{4\sqrt{3}} \quad (3)$$

حل مقترح :

$$(1) \text{ بالضرب في المرافق نجد : } \frac{\sqrt{8}+33}{7-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{8}+33)(7+\sqrt{2})}{(7-\sqrt{2})(7+\sqrt{2})} \text{ أي}$$

$$\frac{\sqrt{8}+33}{7-\sqrt{2}} = \frac{14\sqrt{2}+235+33\sqrt{2}}{49-2} \text{ أي } \frac{\sqrt{8}+33}{7-\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{8}+\sqrt{16}+231+33\sqrt{2}}{7^2-\sqrt{2}^2}$$

$$\frac{\sqrt{8}+33}{7-\sqrt{2}} = \sqrt{2}+5 \text{ و منه نجد } \frac{\sqrt{8}+33}{7-\sqrt{2}} = \frac{47\sqrt{2}+235}{47}$$

$$(2) \text{ بكتابة } \frac{(9^{n+1}+9^n)^2}{(3^{2n+1}-3^{2n})^2} = \frac{(9 \times 9^n + 9^n)^2}{(3 \times 3^{2n} - 3^{2n})^2} \text{ ثم إستخراج } 9^n \text{ كعامل مشترك من البسط و } 3^{2n} \text{ كعامل}$$

مشترك من المقام نجد :

$$\text{أي } \frac{(9^{n+1} + 9^n)^2}{(3^{2n+1} - 3^{2n})^2} = \frac{9^{2n} \times 10^2}{3^{4n} \times 2^2} \text{ أي } \frac{(9^{n+1} + 9^n)^2}{(3^{2n+1} - 3^{2n})^2} = \frac{(9^n (9+1))^2}{(3^{2n} (3-1))^2}$$

$$\text{و منه نجد } \frac{(9^{n+1} + 9^n)^2}{(3^{2n+1} - 3^{2n})^2} = \frac{\cancel{9^{2n}} \times 100}{\cancel{9^{2n}} \times 4} \text{ أي } \frac{(9^{n+1} + 9^n)^2}{(3^{2n+1} - 3^{2n})^2} = \frac{9^{2n} \times 10^2}{(3^2)^{2n} \times 2^2}$$

$$\cdot \frac{(9^{n+1} + 9^n)^2}{(3^{2n+1} - 3^{2n})^2} = \frac{100}{4} = 25$$

$$\text{بحيث } \sqrt{4} = 2 \text{ و منه نجد } \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{\frac{4}{3}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} - \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} \right) \quad (3)$$

$$\text{و منه } \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{\frac{4}{3}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3} \times \sqrt{3} - 2 \times 2}{2\sqrt{3}} \right) \text{ أي } \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{\frac{4}{3}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\text{و منه نتحصل على : } \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{\frac{4}{3}} \right) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2\sqrt{3}} \text{ أي } \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{\frac{4}{3}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{3-4}{2\sqrt{3}} \right)$$

$$\cdot \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{\frac{4}{3}} \right) = -\frac{1}{4\sqrt{3}}$$

التمرين رقم 61 :

ليكن العددين : $A = 350$ و $B = 315$

(1) عين القاسم المشترك الأكبر $PGCD$ للعددين A و B

(2) تحقق أن العددين $\frac{A}{PGCD(A;B)}$ و $\frac{B}{PGCD(A;B)}$ أوليان فيما بينهما .

(3) ما هي طبيعة الكسر $\frac{B}{2A}$ ؟

$$(4) \text{ عين المضاعف المشترك الأصغر للعددين } A \text{ و } B \text{ ثم تحقق أن : } PPCM(A;B) = \frac{A \times B}{PGCD(A;B)}$$

حل مقترح :

(1) تعيين القاسم المشترك الأكبر $PGCD$ للعددين A و B :

$$\begin{cases} A = 2 \times 5^2 \times 7 \\ B = 3^2 \times 5 \times 7 \end{cases} \quad \text{أولا نحلل العددين } A \text{ و } B \text{ إلى جداء عوامل أولية فنتحصل على :}$$

$PGCD(A;B)$ هو جداء العوامل الأولية المشتركة في تحليل A و B مأخوذة مرة واحدة و بأصغر أس و منه

$$\text{نجد : } PGCD(A;B) = 5 \times 7 \text{ أي } PGCD(A;B) = 35$$

(2) التحقق أن العددين $\frac{A}{PGCD(A;B)}$ و $\frac{B}{PGCD(A;B)}$ أوليان فيما بينهما :

$$PGCD(10;9) = 1 \text{ بحيث } \frac{B}{PGCD(A;B)} = \frac{315}{35} = 9 \text{ و } \frac{A}{PGCD(A;B)} = \frac{350}{35} = 10$$

لأنهما عددان متعاقبان ، و منه فالعددان 10 و 9 أوليان فيما بينهما .

(3) ما هي طبيعة الكسر $\frac{B}{2A}$ ؟

$$\frac{B}{2A} = \frac{315}{2 \times 350} \text{ و باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية نجد : } \frac{B}{2A} = \frac{3^2 \times 5 \times 7}{2 \times 2 \times 5^2 \times 7}$$

$$\frac{B}{2A} = \frac{3^2}{2^2 \times 5} \text{ أي } \frac{B}{2A} = \frac{9}{20} \text{ و هو كسر غير قابل للإختزال ؛ و من جهة أخرى تحليل مقامه إلى جداء عوامل}$$

$$\text{أولية هو } 20 = 2^2 \times 5 \text{ لا يشمل عددا أوليا باستثناء 2 و 5 و بالتالي فالعدد } \frac{9}{20} \text{ عشري أي } \frac{9}{20} \in \mathbb{D} .$$

$$(4) \text{ تعيين المضاعف المشترك الأصغر للعددين } A \text{ و } B \text{ ثم التحقق أن : } PPCM(A;B) = \frac{A \times B}{PGCD(A;B)}$$

$PPCM(A;B)$ هو جداء العوامل الأولية المشتركة و غير المشتركة في تحليل A و B مأخوذة مرة واحدة و

بأكبر أس و منه نجد : $PPCM(A;B) = 5^2 \times 7 \times 2 \times 3^2$ أي $PPCM(A;B) = 3150$

من السؤال 1/ نعلم أن : $PGCD(A;B) = 35$ ؛ إذن يكون : $\frac{A \times B}{PGCD(A;B)} = \frac{350 \times 315}{35}$ أي

$$\frac{A \times B}{PGCD(A;B)} = 3150 \text{ و منه فعلا : } PPCM(A;B) = \frac{A \times B}{PGCD(A;B)}$$

التمرين رقم 62 : P و Q عددان معرفان كما يلي :

$$P = 15,714n8 \quad , \quad Q = 0,002349 \text{ مع } n \text{ عدد طبيعي .}$$

(1) عين n إذا علمت أن المدور إلى 10^{-4} للعدد P هو 15,7143 .

(2) أكتب كلا من P و Q على الشكل العلمي .

(3) حدد رتبة مقدار كل من P و Q ؛ ثم إستنتج رتبة مقدار العددين $P \times Q$ و $\frac{P}{Q}$.

حل مقترح :

(1) تعيين n علما أن المدور إلى 10^{-4} للعدد P هو 15,7143 :

$$P = 15,714n8 \text{ و بما أن } 8 \geq 5 \text{ و المدور إلى } 10^{-4} \text{ للعدد } P \text{ هو } 15,7143 \text{ فإنه يكون حتما : } n = 2$$

$$\text{أي } P = 15,71428$$

(2) كتابة كلا من P و Q على الشكل العلمي :

• الكتابة العلمية للعدد P هي : $1,571428 \times 10^1$ أزحنا الفاصلة بمرتبة واحدة نحو اليسار .

• الكتابة العلمية للعدد Q هي : $2,349 \times 10^{-3}$ أزحنا الفاصلة بثلاث مراتب نحو اليمين .

(3) تحديد رتبة مقدار كل من P و Q :

• رتبة مقدار العدد P هي : 2×10^1 لأن أقرب عدد صحيح إلى العدد 1,571428 هو 2 .

• رتبة مقدار العدد Q هي : 2×10^{-3} لأن أقرب عدد صحيح إلى العدد 2,349 هو 2 .

* إستنتاج رتبة مقدار العددين $P \times Q$ و $\frac{P}{Q}$:

تذكير : رتبة مقدار جداء عددين هي جداء رتبتي المقدارين و رتبة مقدار حاصل قسمة عددين هي حاصل قسمة رتبتي المقدارين العددين .

و منه نجد : $(2 \times 10^1) \times (2 \times 10^{-3}) = 4 \times 10^{1+(-3)} = 4 \times 10^{-2}$ و كذلك نجد :

$$\cdot \frac{2 \times 10^1}{2 \times 10^{-3}} = 1 \times 10^{1-(-3)} = 10^4$$

التمرين رقم 63 :

أعط الشكل العلمي ثم رتبة مقدار كل عدد من الأعداد الآتية :

$$C = 0,000359 \times 10^{13} \quad , \quad B = -0,1^5 \times (-0,001^2) \times 0,01^3 \quad , \quad A = \frac{9 \times 14 \times 11^2}{15 \times 21 \times 22}$$

$$\cdot \quad E = 550000 \times 39000 \quad , \quad D = 25120 \times 0,00935$$

حل مقترح :

تحديد الكتابة العلمية و رتبة مقدار العدد A :

$$A = \frac{1,5246 \times 10^4}{6,93 \times 10^3} \quad \text{أي} \quad A = \frac{9 \times 14 \times 11^2}{15 \times 21 \times 22} = \frac{9 \times 1,4 \times 10 \times 1,21 \times 10^2}{1,5 \times 10 \times 2,1 \times 10 \times 2,2 \times 10}$$

• $A = 0,22 \times 10^1$ و منه فالكتابة العلمية للعدد A هي : $2,2 \times 10^0$.

أقرب عدد صحيح للعدد 2,2 هو 2 و عليه رتبة مقدار العدد A هي : 2×10^0 .

تحديد الكتابة العلمية و رتبة مقدار العدد B :

$$\text{أي } B = -0,1^5 \times (-0,001^2) \times 0,01^3 = -(1 \times 10^{-1})^5 \times \left(-(1 \times 10^{-3})^2 \right) \times (1 \times 10^{-2})^3$$

. 1×10^{-17} : هو B و منه الشكل العلمي للعدد B : $B = 1 \times 10^{-5} \times 1 \times 10^{-6} \times 1 \times 10^{-6}$

. 1×10^{-17} : هي B رتبة مقدار العدد B :

تحديد الكتابة العلمية و رتبة مقدار العدد C :

. $3,59 \times 10^9$: هو C و منه يكون الشكل العلمي للعدد C : $C = 0,000359 \times 10^{13} = 3,59 \times 10^{-4} \times 10^{13}$

. 4×10^9 : هي C و عليه رتبة مقدار العدد C : 4×10^9 : هو C

تحديد الكتابة العلمية و رتبة مقدار العدد D :

$$\text{أي } D = 2,34872 \times 10^1 \times 10^1 \text{ أي } D = 25120 \times 0,00935 = 2,5120 \times 10^4 \times 9,35 \times 10^{-3}$$

. $2,34872 \times 10^2$: هو D و منه الشكل العلمي للعدد D : $D = 2,34872 \times 10^2$

. 2×10^2 : هي D و عليه رتبة مقدار العدد D : 2×10^2 : هو D

تحديد الكتابة العلمية و رتبة مقدار العدد E :

$$\text{أي } E = 550000 \times 39000 = 5,5 \times 10^5 \times 3,9 \times 10^4$$

$$E = 2,145 \times 10^{10} \text{ أي } E = 2,145 \times 10^1 \times 10^5 \times 10^4$$

. $2,145 \times 10^{10}$: هو E و منه الشكل العلمي للعدد E : $2,145 \times 10^{10}$: هو E

. 2×10^{10} : هي E و عليه رتبة مقدار العدد E : 2×10^{10} : هو E

التمرين رقم 64 : أعط رتبة مقدار الأعداد التالية :

$$C = \frac{7860275,25}{0,002349} , B = \frac{9,12 \times 10^5}{3,65 \times 10^3} , A = -0,0023$$

$$D = 0,00005734 \times 3274615,89$$

حل مقترح :

الشكل العلمي للعدد A هو : $-2,3 \times 10^{-3}$.

أقرب عدد صحيح للعدد $-2,3$ هو -2 و عليه رتبة مقدار العدد A هي : -2×10^{-3} .

نعلم أن رتبة مقدار حاصل قسمة هي حاصل قسمة رتبتي المقدارين :

رتبة مقدار العدد $9,12 \times 10^5$ هي : 9×10^5 لأن أقرب عدد صحيح للعدد $9,12$ هو 9

رتبة مقدار العدد $3,65 \times 10^3$ هي : 4×10^3 لأن أقرب عدد صحيح للعدد $3,65$ هو 4

إذن نحصل على : $\frac{9 \times 10^5}{4 \times 10^3} = 2,5 \times 10^2$ بحيث أقرب عدد صحيح للعدد $2,5$ هو 3 و منه رتبة مقدار العدد

B هي : 3×10^2 .

• نكتب أولاً العدد $7860275,25$ على الشكل العلمي : $7,86027525 \times 10^6$ و منه رتبة مقدار العدد

$7860275,25$ هي : 8×10^6 لأن أقرب عدد صحيح للعدد $7,86027525$ هو 8

نكتب أولاً العدد $0,002349$ على الشكل العلمي : $2,349 \times 10^{-3}$ و منه رتبة مقدار العدد $0,002349$ هي :

2×10^{-3} لأن أقرب عدد صحيح للعدد $2,349$ هو 2

إذن نحصل على : $\frac{8 \times 10^6}{2 \times 10^{-3}} = 4 \times 10^9$ و منه رتبة مقدار العدد C هي : 4×10^9 .

* نعلم أن رتبة مقدار جداء عددين هي جداء رتبتي المقدارين :

نكتب أولا العدد 0,00005734 على الشكل العلمي : $5,734 \times 10^{-5}$ و منه رتبة مقدار العدد

0,00005734 هي : 6×10^{-5} لأن أقرب عدد صحيح للعدد 5,734 هو 6

نكتب أولا العدد 3274615,89 على الشكل العلمي : $3,27461589 \times 10^6$ و منه رتبة مقدار العدد

3274615,89 هي : 3×10^6 لأن أقرب عدد صحيح للعدد 3,27461589 هو 3

إذن نتحصل على : $(6 \times 10^{-5}) \times (3 \times 10^6)$ أي 18×10^1 و منه يكون الشكل العلمي هو : $1,8 \times 10^2$ و منه

رتبة مقدار العدد D هي : 2×10^2 لأن أقرب عدد صحيح للعدد 1,8 هو 2 .

التمرين رقم 65 :

ليكن العدد الحقيقي الغير معدوم x الذي يحقق : $x + \frac{1}{x} = \sqrt{5}$

• أثبت أن $x^2 + \frac{1}{x^2}$ عدد طبيعي .

حل مقترح :

بما أن $x + \frac{1}{x} = \sqrt{5}$ فإن : $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = \sqrt{5}^2$ و بالنشر نجد : $x^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 2 \times x \times \frac{1}{x} = 5$ أي

$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 5$ و منه نتحصل على : $x^2 + \frac{1}{x^2} = 3$ ؛ إذن $x^2 + \frac{1}{x^2}$ طبيعي .

تجدون هذا الملف في مجموعة الفايسبوك :

تلاميذ أستاذ الرياضيات حناش نبيل

لا ننسونا من صالح دعائكم ...