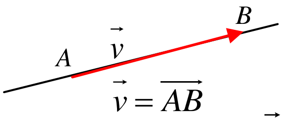
حلول الأنشطة و تمارين الكتاب المدرسي

الدرس و حلول الأنشطة :

I/ الأشعة والحساب الشعاعي

1 - مفهوم الشعاع :

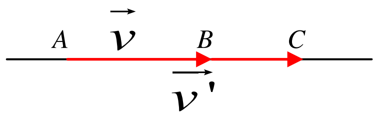


تعريف : A ، B نقطتان من المستوي. نقول أن الثنائية $(A\ ,\ B)$ تعين **شعاعا** نرمز له بالرمز $\overrightarrow{AB}$ أو $\vec{v}$.

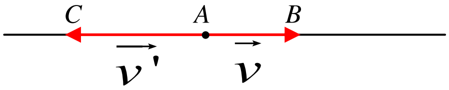
- إذا كانت النقطة A منطبقة على B فإن الشعاع $\overrightarrow{AB}$ يصبح معدوما ونكتب $\vec{v}=\overrightarrow{AB}=\vec{0}$
- يسمى طول القطعة المستقيمة $[AB]$ **طويلة** الشعاع $\overrightarrow{AB}$ ونكتب $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=AB$.
- إذا كان $\overrightarrow{AB}$ شعاعا غير معدوم فإن **منحى** الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو منحى المستقيم (AB).
- إذا كان للشعاعين $\vec{v}$ و $\vec{v}\,'$ نفس المنحى ، وبوضع $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}\,'=\overrightarrow{AC}$ فإنه :

✓ يكون للشعاعين $\vec{v}$ و $\vec{v}\,'$ **نفس الاتجاه** إذا كانت النقطة C تنتمي إلى نصف المستقيم $[AB)$.

✓ يكون للشعاعين $\vec{v}$ و $\vec{v}\,'$ **اتجاهان متعاكسان** إذا كانت النقطة A تنتمي إلى القطعة المستقيمة $[BC]$.



$\vec{v}$ و $\vec{v}\,'$ لهما نفس الاتجاه



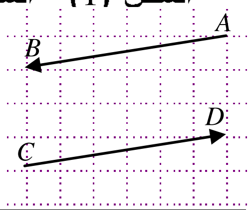
$\vec{v}$ و $\vec{v}\,'$ لهما اتجاهان متعاكسان

ليس للشعاع المعدوم منحى.

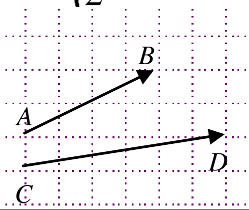
نشاط 1 : (تساوي شعاعين)

أ) لاحظ الأشكال الأربعة الآتية ، ثم أنقل الجدول أدناه وأكمله بنعم أم لا.

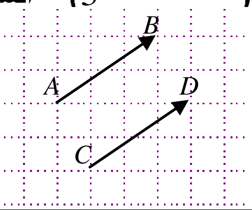
الشكل (1)



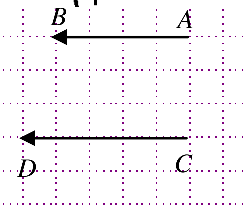
الشكل (2)



الشكل (3)



الشكل (4)



هل للشعاعين $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}$	الشكل (1)	الشكل (2)	الشكل (3)	الشكل (4)
نفس المنحى				
نفس الاتجاه				
نفس الطويلة				

ب) في أي شكل لدينا : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

حل النشاط :

أ) لاحظ الأشكال الأربعة الآتية ، ثم أنقل الجدول أدناه وأكمله بنعم أم لا.

هل للشعاعين $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}$	الشكل (1)	الشكل (2)	الشكل (3)	الشكل (4)
نفس المنحى	نعم	لا	نعم	نعم

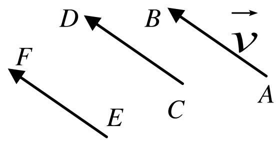
نفس الاتجاه	لا	لا	نعم	نعم
نفس الطويلة	نعم	لا	نعم	لا

ب) في أي شكل لدينا : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ (الجواب الشكل 3)

2 – تساوي شعاعين :

تعريف : نقول عن شعاعين أنهما متساويان إذا كان لهما نفس المنحى ، نفس الاتجاه و نفس الطويلة.

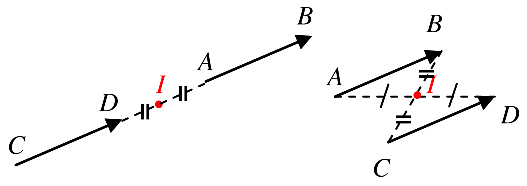
مثال :



$\vec{v}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{EF}$

نتيجة : من أجل كل أربع نقط A ، B ، C ، D من المستوي لدينا :

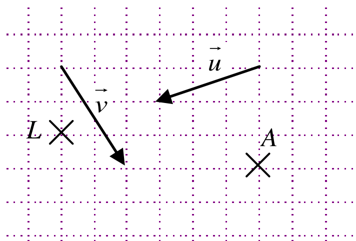
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ **معناه** $[AD]$ و $[BC]$ لهما نفس المنتصف.



نشاط 2 : (مجموع شعاعين)

أ) أنقل الشكل المجاور على ورقة مسطرة ، وعلم النقطتين B ، C حيث :

$\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ و $\overrightarrow{BC}=\vec{v}$.



ب)ماذا يمثل الشعاع الناتج $\overrightarrow{AC}$ بالنسبة إلى الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ؟

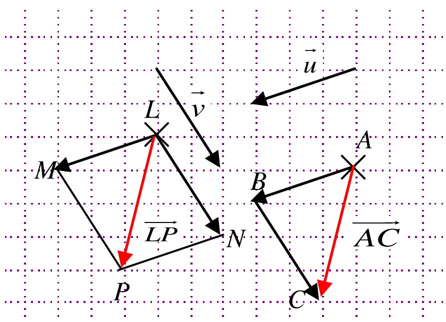
ج) علم النقطتين M ، N حيث : $\overrightarrow{LM}=\vec{u}$ و $\overrightarrow{LN}=\vec{v}$ ،

ثم أنشئ النقطة P بحيث يكون الرباعي $LMPN$ متوازي أضلاع.

د)قارن بين الشعاعين $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{LP}$.

ه)ماذا يمثل الشعاع الناتج $\overrightarrow{LP}$ بالنسبة إلى الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ؟

حل النشاط :



لدينا : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ ومنه : $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AC}$

لدينا : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{LM}=\overrightarrow{NP}=\vec{u}$ و $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{LN}=\vec{v}$

ومنه : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{LM}+\overrightarrow{LN}=\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{LN}=\overrightarrow{LP}$

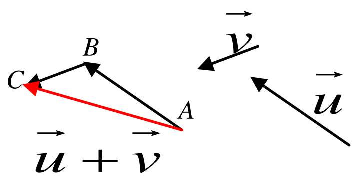
إذن : $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{LP}$

3 – مجموع شعاعين :

تعريف : مجموع الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو الشعاع الذي نرمز له بالرمز $\vec{u}+\vec{v}$

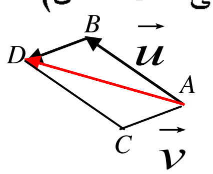
والمعرف كما يأتي :إذا كانت A ، B ، C ثلاث نقط من المستوي حيث :

$\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ و $\overrightarrow{BC}=\vec{v}$ فإن : $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AC}$



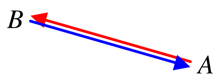
نتائج :

- من أجل كل ثلاث نقط A ، B ، C من المستوي فإن : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (هذه العلاقة تسمى علاقة شال).
- إذا كان $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ فإن : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ حيث : $ABDC$ متوازي أضلاع
- إذا كان الرباعي $ABDC$ متوازي أضلاع فإن $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$.



4 – الشعاعان المتعاكسان :

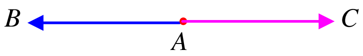
من أجل كل نقطتين A ، B من المستوي فإن : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$



تعريف : نقول عن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BA}$ أنهما متعاكسان ونكتب : $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$

نتائج :

- $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\left\|\overrightarrow{BA}\right\|$
- $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ **تعني** $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متعاكسان



- $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ **تعني** A منتصف $[BC]$.
- إذا كان $AB = AC$ و A ، B ، C ليست في استقامية فإن : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ (أي $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير متعاكسين)

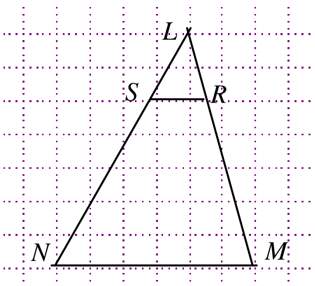
نشاط 3 : (جداء شعاع بعدد حقيقي)

1) علم نقطتين متمايزتين A و C ثم أنشئ النقطة B منتصف القطعة $[AC]$.

أ) قارن بين الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$.

ب) قارن بين الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ، من حيث المنحى والاتجاه والطويلة.

ج) عبر عن $\overrightarrow{AC}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ ثم عبر عن $\overrightarrow{AB}$ بدلالة $\overrightarrow{AC}$.



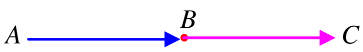
2) في الشكل المقابل ، المثلثان LSR و LNM متشابهان ومعامل التكبير هو $\frac{7}{2}$.

أ) قارن بين الشعاعين $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{SR}$ ، من حيث المنحى والاتجاه والطويلة.

ب) عبر عن الشعاع $\overrightarrow{SR}$ بدلالة الشعاع $\overrightarrow{MN}$.

حل النشاط :

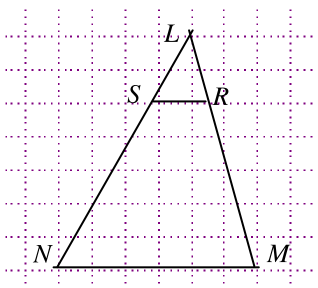
1) A و C ثم أنشئ النقطة B منتصف القطعة $[AC]$.



إذن : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$

الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ لهما نفس المنحى ونفس الاتجاه ولكن طويلتيهما مختلفتين . ولدينا $AC = 2\,AB$.

ومنه : $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.



2) لدينا : المثلثان LSR و LNM متشابهان ومعامل التكبير هو $\frac{7}{2}$.

إذن : $\frac{MN}{SR}=\frac{7}{2}$ ومنه $SR=\frac{2}{7}MN$

الشعاعان $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{SR}$ لهما نفس المنحى واتجاهان متعاكسان وطويلتان مختلفتان.

$\overrightarrow{SR}=-\frac{2}{7}\overrightarrow{MN}$.

5 – جداء شعاع بعدد حقيقي :

تعريف : $\vec{u}$ شعاع غير معدوم من المستوي ، و k عدد حقيقي غير معدوم.

جداء الشعاع $\vec{u}$ بالعدد k هو الشعاع الذي نرمز له بالرمز $k.\vec{u}$ والمعرف كما يأتي :

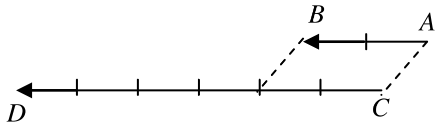
- الشعاعان $\vec{u}$ و $k.\vec{u}$ لهما نفس المنحى.

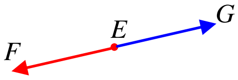
- الشعاعان $\vec{u}$ و $k.\vec{u}$ لهما نفس الاتجاه إذا كان k موجب تماما و لهما اتجاهان متعاكسان إذا كان k سالب تماما.
- طويلة الشعاع $k.\vec{u}$ تساوي جداء طويلة $\vec{u}$ بالعدد $|k|$ أي : $\|k.\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$

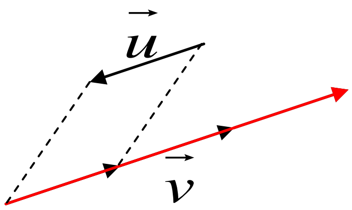
ملاحظة : عندما يكون $\vec{u} = \vec{0}$ أو $k = 0$ نقبل اصطلاحا أن $k.\vec{u} = \vec{0}$

أمثلة :

$\overrightarrow{CD} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{EG}$ $\vec{v} = -3\vec{u}$







خواص :

1. $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$.
2. $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$.
3. $k(k'\vec{u}) = kk'\vec{u}$.
4. $1\vec{u} = \vec{u}$.
5. $k\vec{u} = \vec{0}$ يكافئ (يعني) [$k = 0$ أو $\vec{u} = \vec{0}$].

تطبيق : 34 صفحة 274

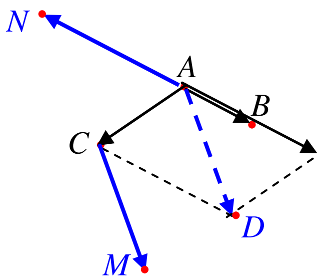
A ، B ، C ثلاث نقط ليست في استقامية .

أ – أنشئ النقطتين N ، M المعرفتين بالعلاقتين الآتيتين على الترتيب :

$\overrightarrow{AN} = -2\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

ب –بين أن النقطة C منتصف $[MN]$.

الحل :



أ – نضع $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ وننشئ النقطة M حيث : $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AD}$

ب –لدينا : $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC}$ ومنه : $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AC}$

إذن : $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$ وبالتالي : النقطة C منتصف $[MN]$.

نشاط 4 :

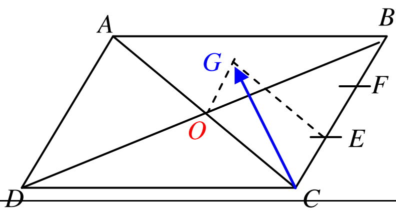
أ) أرسم متوازي أضلاع $ABCD$ مركزه النقطة O ، وعلم النقطتين E ، F من $[BC]$ حيث : $CE = EF = FB$

ب) أنشئ النقطة G حيث : $\overrightarrow{CG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CE}$.

ج) عبر عن الشعاع $\overrightarrow{AF}$ بدلالة الشعاع $\overrightarrow{AG}$. ماذا يمكن أن نقول عن النقط A ، G ، F ؟

حل النشاط :

أ) $ABCD$ متوازي أضلاع مركزه النقطة O ،



لدينا E ، F من $[BC]$ حيث : $CE = EF = FB$

ب) إنشاء النقطة G حيث : $\overrightarrow{CG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CE}$.

ج) عبر عن الشعاع $\overrightarrow{AF}$ بدلالة الشعاع $\overrightarrow{AG}$.

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CF}$ ومنه $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{AO}+2\overrightarrow{CE}$ إذن : $\overrightarrow{AF}=2(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OG})$ أي : $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{AG}$

ماذا يمكن أن نقول عن النقط A ، G ، F ؟

$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{AG}$ ومنه $\overrightarrow{AF}$ و $\overrightarrow{AG}$ أي : $(AF)//(AG)$ وبالتالي : النقط A ، G ، F في استقامية.

6 – توازي شعاعين :

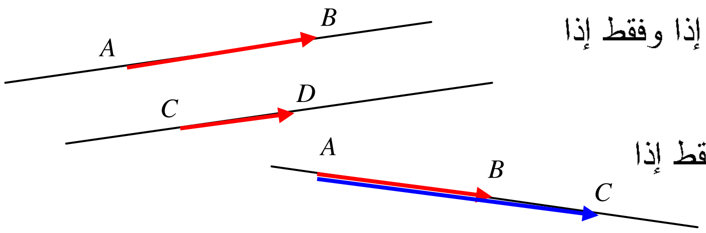
تعريف : نقول عن شعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ أنهما **مرتبطين خطيا** إذا كان أحدهما يساوي **جداء الآخر بعدد حقيقي**.

أي إذا وجد عدد حقيقي k حيث $\vec{v}=k.\vec{u}$.

ملاحظة : الشعاع المعدوم مرتبط خطيا مع أي شعاع . لأنه من أجل كل شعاع $\vec{u}$ من المستوي لدينا : $\vec{0}=0.\vec{u}$

نتيجة : يكون الشعاعان غير المعدومين **مرتبطين خطيا** إذا وفقط إذا كان لهما **نفس المنحى**.

7 – التوازي والاستقامية :



مبرهنة 1 : يكون المستقيمان (AB) و (CD) **متوازيين** إذا وفقط إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ **مرتبطين خطيا**.

مبرهنة 2 : تكون النقط A ، B ، C في **استقامية** إذا وفقط إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ **مرتبطين خطيا**.

تمرين 45 صفحة 275

A ، B ، C ثلاث نقط ليست في استقامية .

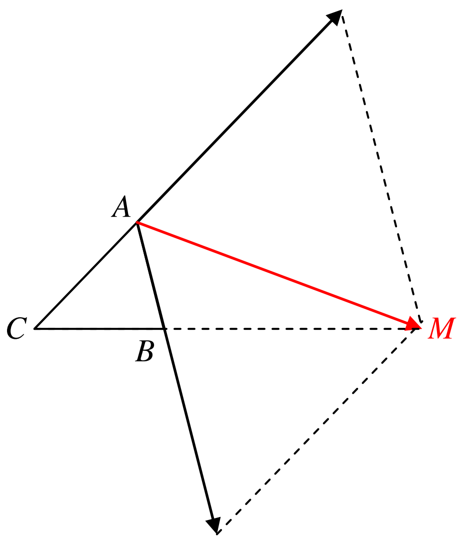
أ – أنشئ النقطة M المعرفة بالعلاقة : $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$

ب – بين أن النقط C ، B ، M في استقامية .

(إرشاد : عبر عن الشعاع $\overrightarrow{CM}$ بدلالة الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$)

الحل :

أ – أنشئ النقطة M المعرفة بالعلاقة : $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$



ب – بين أن النقط C ، B ، M في استقامية .

$\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$ معناه $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$

ومعناه $\overrightarrow{CM}=3\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$ يكافئ $\overrightarrow{CM}=3(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$

أي : $\overrightarrow{CM}=3(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA})$ يكافئ $\overrightarrow{CM}=3\overrightarrow{CB}$

وبالتالي $(CM)//(CB)$

وبما أن للمستقيمين نقطة مشتركة C فإن النقط C ، B ، M في استقامية .

II) المعلم في المستوي

نشاط :

O ، I ، J ثلاث نقط متمايزة من المستوي وليست في استقامية.

$\vec{i}$ و $\vec{j}$ شعاعان من المستوي حيث $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ و $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$

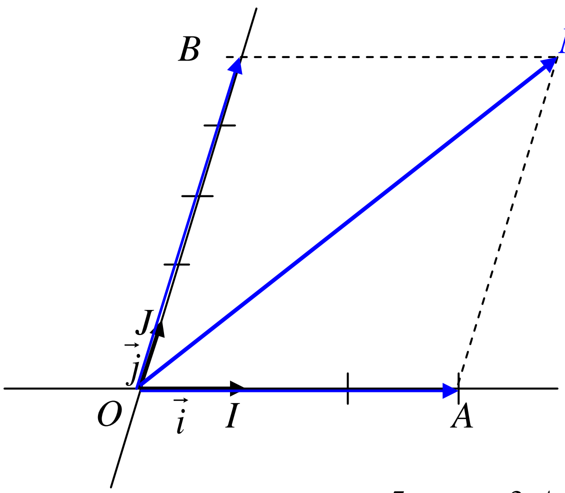
أ) بين أن الشعاعان $\vec{i}$ و $\vec{j}$ غير مرتبطين خطيا.ماذا تسمى الثلاثية $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ ؟

ب) A نقطة من المستقيم (OI) و B نقطة من المستقيم (OJ) حيث $\overrightarrow{OA}=3\,\vec{i}$ و $\overrightarrow{OB}=5\,\vec{j}$

أنشئ النقطة M حيث $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$. ماذا تمثل الثنائية $(3\,;\,5)$ بالنسبة إلى النقطة M وبالنسبة إلى الشعاع $\overrightarrow{OM}$ ؟

ج) $\vec{u}$ شعاع من المستوي حيث $\vec{u}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}$ عين العددين الحقيقيين x و y بحيث يكون $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$.

حل النشاط :



أ) لدينا النقط O ، I ، J متمايزة إذن الشعاعان $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ و $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$ غير معدومين .

وبما أن هذه النقط ليست في استقامية فإن الشعاعان $\vec{i}$ و $\vec{j}$ غير مرتبطين خطيا

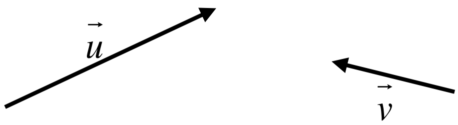
الثلاثية $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ تسمى معلما للمستوي.

ب) $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ ومنه : $\overrightarrow{OM}=3\vec{i}+5\vec{j}$

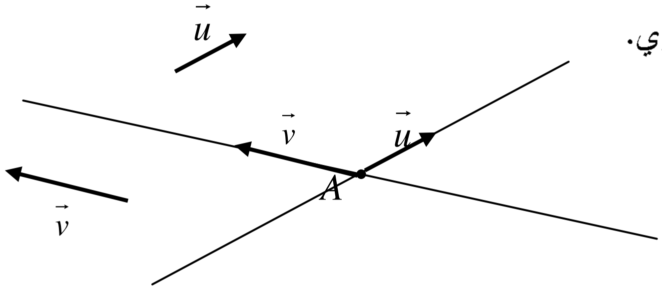
الثنائية $(3\,;\,5)$ هي إحداثيتي النقطة M وتمثل المركبتين السلميتين للشعاع $\overrightarrow{OM}$

ج) $\overrightarrow{OM}=3\vec{i}+5\vec{j}$ و $\vec{u}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}$ إذن $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$ معناه $x=3$ و $y=5$

تعريف 1 : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان من المستوي. نقول عن الثنائية $(\vec{u}\,;\,\vec{v})$ أنها أساس للمستوي إذا وفقط إذا كان الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا (غير متوازيين و غير معدومين)

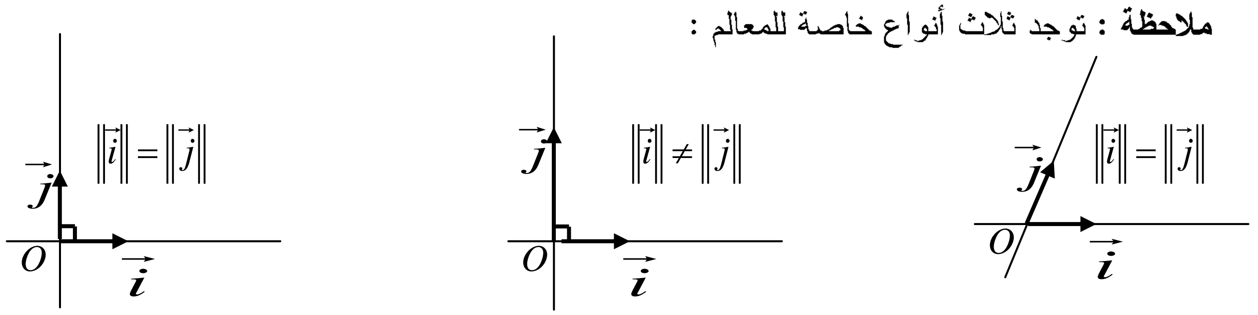


تعريف 2 : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان من المستوي و A نقطة منه . نقول عن الثلاثية $(A\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$ أنها معلما للمستوي إذا كانت $(\vec{u}\,;\,\vec{v})$ أساسا للمستوي.



- النقطة A تسمى مبدأ المعلم
- المحور $(A\,;\,\vec{u})$ يسمى محور الفواصل ؛ المحور $(A\,;\,\vec{v})$ يسمى محور التراتيب .

ملاحظة : توجد ثلاث أنواع خاصة للمعالم :



$(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ معلم متعامد ومتجانس　　　$(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ معلم متعامد　　　$(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ معلم متجانس

مبرهنة 1 : $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ معلم للمستوي.

من أجل كل نقطة M من المستوي توجد ثنائية وحيدة $(x\ ;\ y)$ من الأعداد الحقيقية بحيث $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$

ملاحظة :

إذا كانت $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ فإن الثنائية $(x\ ;\ y)$ تسمى إحداثيا النقطة M في المعلم $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ ونكتب $M(x\ ;\ y)$ ، العدد الحقيقي x يسمى فاصلة النقطة M و العدد الحقيقي y يسمى ترتيبها.

ونكتب كذلك $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ و الثنائية $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ تسمى المركبتين السلّميتين للشعاع $\overrightarrow{OM}$ في الأساس $(\vec{i}\ ;\ \vec{j})$

العدد الحقيقي x يسمى المركبة الأولى للشعاع $\overrightarrow{OM}$ العدد الحقيقي x يسمى المركبة الثانية له.

$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ **تعني** $M(x\ ;\ y)$ في المعلم $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ **ومعناه** $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ في الأساس $(\vec{i}\ ;\ \vec{j})$

تمرين 61 صفحة 276

ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$. $ABCD$ متوازي أضلاع ، النقطة A' نظيرة النقطة A بالنسبة إلى النقطة D ، النقطة M منتصف $[CD]$.

أ) بين لماذا يمكن اعتبار $(B\ ;\ \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$ معلما للمستوى ؟

ب) عين إحداثيي كل من النقط A ، B ، C ، D ، M ، A' في هذا المعلم.

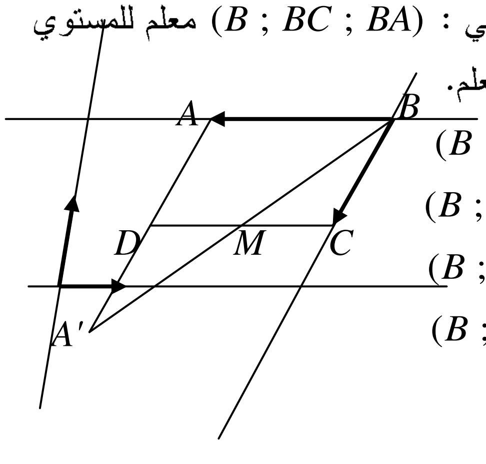
ج) بين باستعمال الإحداثيات المحصل عليها أن النقطة M هي منتصف $[BA']$.

الحل :

أ) بين لماذا يمكن اعتبار $(B\ ;\ \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$ معلما للمستوى ؟

لدينا $ABCD$ متوازي أضلاع إذن النقط الأربعة متمايزة و (BC) لا يوازي (BA) ومنه الشعاعان $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BA}$ غير مرتبطين خطيا أي الثنائية $(\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$ تشكل أساسا للمستوي وبالتالي : $(B\ ;\ \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$ معلم للمستوي

ب) عين إحداثيي كل من النقط A ، B ، C ، D ، M ، A' في هذا المعلم.



لدينا : $\overrightarrow{BA} = 0\overrightarrow{BC} + 1\overrightarrow{BA}$ ومنه : $A(0\ ;\ 1)$ في المعلم $(B\ ;\ \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$

لدينا : $\overrightarrow{BB} = 0\overrightarrow{BC} + 0\overrightarrow{BA}$ ومنه : $B(0\ ;\ 0)$ في المعلم $(B\ ;\ \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$

لدينا : $\overrightarrow{BC} = 1\overrightarrow{BC} + 0\overrightarrow{BA}$ ومنه : $C(1\ ;\ 0)$ في المعلم $(B\ ;\ \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$

لدينا : $\overrightarrow{BD} = 1\overrightarrow{BC} + 1\overrightarrow{BA}$ ومنه : $D(1\ ;\ 1)$ في المعلم $(B\ ;\ \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$

لدينا : $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

ومنه : $M(1\ ;\ \frac{1}{2})$ في المعلم $(B\ ;\ \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$

لدينا : $\overrightarrow{BA'}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}$ ومنه : $A'(2\ ;\ 1)$ في المعلم $(B\ ;\ \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$

ج) بين باستعمال الإحداثيات المحصل عليها أن النقطة M هي منتصف $[BA']$.

نفرض أن : M' منتصف $[BA']$ إذن : $M'(\frac{0+2}{2}\ ;\ \frac{0+1}{2})$ ومنه : $M'(1\ ;\ \frac{1}{2})$

إذن M' منطبقة على M ومنه النقطة M هي منتصف $[BA']$.

نتائج : ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\vec{i}\ ;\vec{j})$. $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ شعاعان من المستوي و k عدد حقيقي.

1. $\vec{u}=\vec{v}$ يكافئ $x=x'$ و $y=y'$
2. $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$
3. $k.\vec{u}\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$

مبرهنة 2 : (إحداثيي منتصف قطعة)

$(O\ ;\vec{i}\ ;\vec{j})$ معلم للمستوي و $A(x_A\ ;\ y_A)$ ، $B(x_B\ ;\ y_B)$ نقطتان منه.

إحداثيا النقطة M منتصف $[AB]$ هما $\left(\frac{x_A+x_B}{2}\ ;\ \frac{y_A+y_B}{2}\right)$

مبرهنة 3 : (مركبتا شعاع)

$(O\ ;\vec{i}\ ;\vec{j})$ معلم للمستوي . و $A(x_A\ ;\ y_A)$ ، $B(x_B\ ;\ y_B)$ نقطتان منه.

مركبتا الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هما $\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$

مبرهنة 4 : (شرط الارتباط الخطي لشعاعين)

$(O\ ;\vec{i}\ ;\vec{j})$ معلم للمستوي ، $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ شعاعان من المستوي

يكون الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا إذا وفقط إذا كان $xy'-x'y=0$.

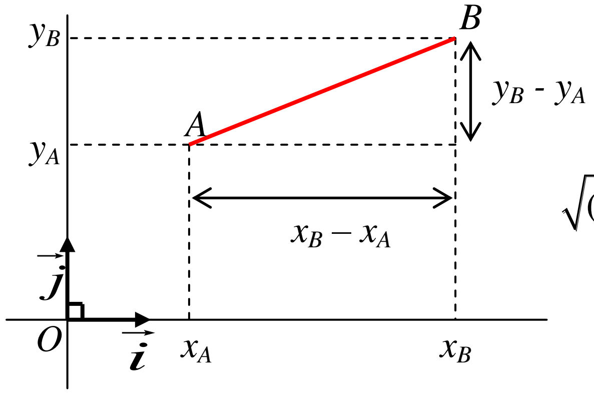
مبرهنة 5 : (المسافة بين نقطتين)

$(O\ ;\vec{i}\ ;\vec{j})$ معلم متعامد ومتجانس للمستوي .

و $A(x_A\ ;\ y_A)$ ، $B(x_B\ ;\ y_B)$ نقطتان منه.

المسافة بين النقطتين A و B هي : $\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

ولدينا : $AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

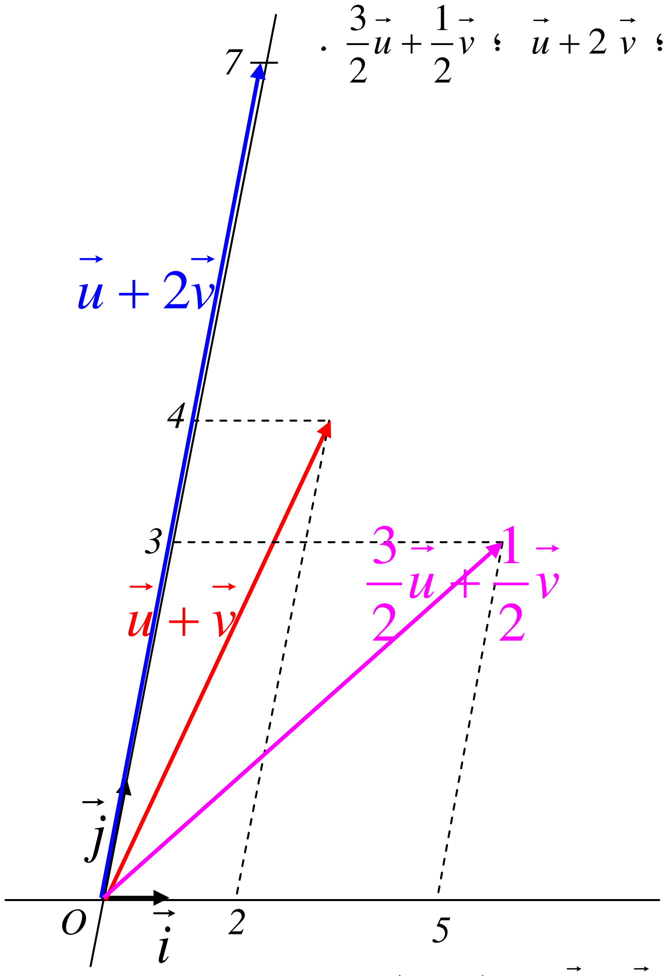


تمرين : 50 صفحة 276

ينسب المستوي إلى معلم $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$. ليكن $\vec{u}=4\,\vec{i}+\vec{j}$ و $\vec{v}=-2\,\vec{i}+3\,\vec{j}$

أ) أحسب مركبتي كل من الأشعة الآتية : $\vec{u}+\vec{v}$ ؛ $\vec{u}+2\,\vec{v}$ ؛ $\frac{3}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$.

ب) أرسم ممثلا مبدأه O لكل من الأشعة السابقة .



الحل :

أ) أحسب مركبتي كل من الأشعة الآتية :

$\vec{u}+\vec{v}$ ؛ $\vec{u}+2\,\vec{v}$ ؛ $\frac{3}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$.

$\vec{u}+\vec{v}=2\,\vec{i}+4\,\vec{j}$ ومنه : $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$

$\vec{u}+2\,\vec{v}=7\,\vec{j}$ ومنه : $\vec{u}+2\,\vec{v}\begin{pmatrix}0\\7\end{pmatrix}$

$\frac{3}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}=5\,\vec{i}+3\,\vec{j}$ ومنه : $\frac{3}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$

ب) أرسم ممثلا مبدأه O لكل من الأشعة السابقة .

تمرين : 56 صفحة 276

ينسب المستوي إلى معلم $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

عين في كل مما يأتي العدد x بحيث يكون الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا.

أ) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}x+1\\6\end{pmatrix}$ ب) $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\-5\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}2-x\\1\end{pmatrix}$ ج) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\x\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\27\end{pmatrix}$

الحل :

أ) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}x+1\\6\end{pmatrix}$ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا معناه : $1\times 6-2(x+1)=0$ معناه $x=2$

ب) $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\-5\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}2-x\\1\end{pmatrix}$ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا معناه : $x-(-5)(2-x)=0$ معناه $x=\frac{5}{2}$

ج) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\x\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\27\end{pmatrix}$ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا معناه : $x^2=81$ يكافئ أن $x=-9$ أو $x=9$.

III) معادلة مستقيم

نشاط 1 : ينسب المستوي إلى معلم $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$. لنعلم النقطتين $A(-2 ; 3)$ ، $B(3 ; -4)$.

1) بين أن الشعاع $\vec{u}\begin{pmatrix}-10\\14\end{pmatrix}$ مرتبط خطيا مع الشعاع $\overrightarrow{AB}$. ماذا يعتبر الشعاع $\vec{u}$ بالنسبة للمستقيم (AB) .

2) $M(x ; y)$ نقطة من المستوي ، عين علاقة بين x و y بحيث يكون الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطين خطيا.

3) $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ شعاع من المستوي ، عين مجموعة النقط N بحيث يكون الشعاعان $\overrightarrow{AN}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا.

باعتبار $(x ; y)$ إحداثيتي النقطة N أكتب علاقة بين x و y في هذه الحالة ، ثم أكتب y بدلالة x .

4) $\vec{W}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ شعاع غير معدوم من المستوي ، أكتب علاقة بين x و y لمجموعة النقط $L(x ; y)$ بحيث يكون الشعاعان $\overrightarrow{BL}$ و $\vec{W}$ مرتبطين خطيا.

حل النشاط :

1) بين أن الشعاع $\vec{u}\begin{pmatrix}-10\\14\end{pmatrix}$ مرتبط خطيا مع الشعاع $\overrightarrow{AB}$. ماذا يعتبر الشعاع $\vec{u}$ بالنسبة للمستقيم (AB) .

لدينا : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3+2\\-4-3\end{pmatrix}$ أي : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-7\end{pmatrix}$ ومنه : $\vec{u}=-2\overrightarrow{AB}$ إذن : $\vec{u}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطيا.

$\vec{u}$ هو شعاع التوجيه المستقيم (AB) .

2) $M(x ; y)$ نقطة من المستوي ، عين علاقة بين x و y بحيث يكون الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطين خطيا.

لدينا : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+2\\y-3\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-7\end{pmatrix}$ ؛ $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطيا معناه : $-7(x + 2) = 5(y - 3)$

ويكافئ أن : $7x + 5y - 1 = 0$. تسمى المعادلة الديكارتية للمستقيم (AB) .

3) $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ شعاع من المستوي ، عين مجموعة النقط N بحيث يكون الشعاعان $\overrightarrow{AN}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا.

مجموعة النقط N هي المستقيم الذي يشمل النقطة A ويوازي منحى الشعاع $\vec{v}$.

باعتبار $(x ; y)$ إحداثيتي النقطة N أكتب علاقة بين x و y في هذه الحالة ، ثم أكتب y بدلالة x .

لدينا : $\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix}x+2\\y-3\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{AN}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا معناه أن : $3(x + 2) = 2(y - 3)$

ويكافئ أ ن : $3x - 2y + 12 = 0$ أي : $2y = 3x + 12$ ومعناه أن : $y=\frac{3}{2}x+4$

4) $\vec{W}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ شعاع غير معدوم من المستوي ، أكتب علاقة بين x و y لمجموعة النقط $L(x ; y)$ بحيث يكون الشعاعان $\overrightarrow{BL}$ و $\vec{W}$ مرتبطين خطيا.

لدينا : $\overrightarrow{BL}\begin{pmatrix}x-3\\y+4\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{W}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{BL}$ و $\overrightarrow{W}$ مرتبطان خطيا معناه أن : $\beta(x-3)=\alpha(y+4)$

ويكافئ $\beta x-\alpha y-4\alpha-3\beta=0$

1. التعريف :

$\vec{v}$ شعاع غير معدوم من المستوي ، مجموعة النقط M من المستوي بحيث يكون $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا ، هي مستقيم (Δ) يوازي منحى $\vec{v}$.

كل شعاع غير معدوم منحاه المستقيم (Δ) يسمى شعاع التوجيه للمستقيم (Δ).

ملاحظات :

- إذا كان $\vec{v}$ شعاع التوجيه المستقيم (Δ) فإن من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم k ، $k.\vec{v}$ هو أيضا شعاع التوجيه للمستقيم (Δ) . (لمستقيم عدد غير منته من أشعة التوجيه)
- يعرف مستقيم بإعطاء نقطتين منه أو بإعطاء نقطة منه وأحد أشعة توجيهه.

مثال : A و B نقطتان متمايزتان من المستوي ، مجموعة النقط M بحيث يكون $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطين خطيا هي المستقيم (AB) شعاع توجيهه كل شعاع $k.\overrightarrow{AB}$ حيث $k\in\mathbb{R}^*$

2. معادلة مستقيم :

مبرهنة : ينسب المستوي إلى معلم $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

- كل مستقيم له معادلة من الشكل $a\,x+b\,y+c=0$ حيث a ، b ، c أعداد حقيقية معلومة و x ، y متغيرين حقيقيين ؛ شعاع توجيهه $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$
- a ، b ، c أعداد حقيقية معلومة حيث: $a\neq 0$ أو $b\neq 0$.

مجموعة النقط $M(x\,;y)$ التي إحداثياتها $(x\,;y)$ تحقق المعادلة : $a\,x+b\,y+c=0$ هي مستقيم شعاع توجيهه $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$

تعريف : العلاقة $a\,x+b\,y+c=0$ حيث: $a\neq 0$ أو $b\neq 0$ تسمى المعادلة الديكارتية لمستقيم.

إذا كان $b\neq 0$ فالمعادلة تصبح من الشكل $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$ وتسمى المعادلة المبسطة ، العدد $-\dfrac{a}{b}$ يسمى معامل التوجيه للمستقيم.

ملاحظات :

01. إذا كان $b=0$ فإن $a\neq 0$ والمعادلة الديكارتية للمستقيم تكون من الشكل : $a\,x+c=0$ أي : $x=-\dfrac{c}{a}$ شعاع التوجيه لهذا المستقيم هو $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\a\end{pmatrix}$ ولدينا : $\vec{u}=a.\vec{i}$ معناه أن هذا المستقيم يوازي حامل محور التراتيب.

نتيجة :

يكون مستقيم موازيا لحامل محور التراتيب إذا وفقط إذا كانت له معادلة من الشكل $x=a$ حيث a ثابت حقيقي.

02. إذا كان $b \neq 0$ لدينا شعاع توجيهه المستقيم هو $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ و ولدينا : $\vec{u} = -b\vec{v}$ حيث $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-\frac{a}{b}\end{pmatrix}$

نتيجة : $y = \alpha x + \beta$ معادلة للمستقيم (Δ) معناه أن $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\\alpha\end{pmatrix}$ هو شعاع التوجيه للمستقيم (Δ)

03. إذا كان المعلم متعامد ومتجانس معامل التوجيه لمستقيم يدعى كذلك ميل هذا المستقيم

تمرين 68 صفحة 277 ينسب المستوي إلى معلم $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

(D) مستقيم معادلته $3x - 5y = 7$ ، أوجد شعاع توجيه للمستقيم (D) ، وعين معامل توجيهه.

الحل :

شعاع التوجيه المستقيم (D) هو $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ ومعامل توجيهه : $\frac{3}{5}$ يمكن أن نعتبر $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\\frac{3}{5}\end{pmatrix}$ شعاع التوجيه .

تمرين 70 صفحة 277 ينسب المستوي إلى معلم $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

(D) مستقيم معادلته $3x = -7$ ، أوجد شعاع توجيه للمستقيم (D) ، هل للمستقيم (D) معامل توجيه ؟

الحل :

شعاع التوجيه المستقيم (D) هو $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ و يمكن أن نعتبر $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ شعاع التوجيه .

المستقيم (D) يوازي حامل محور التراتيب ليس له معامل توجيه.

تمرين 71 صفحة 277 ينسب المستوي إلى معلم $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$. أرسم المستقيمات (D_1) ، (D_2) ، (D_3) ، (D_4) ، (D_5) حيث: $(D_1): y = 3x$ ؛ $(D_2): y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$ ؛ $(D_3): x = -4$ ؛ $(D_4): y = -\frac{3}{2}x + 7$ ؛

$(D_5): y = 3$

الحل :

$(D_1) : y = 3x$

شعاع توجيهه : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

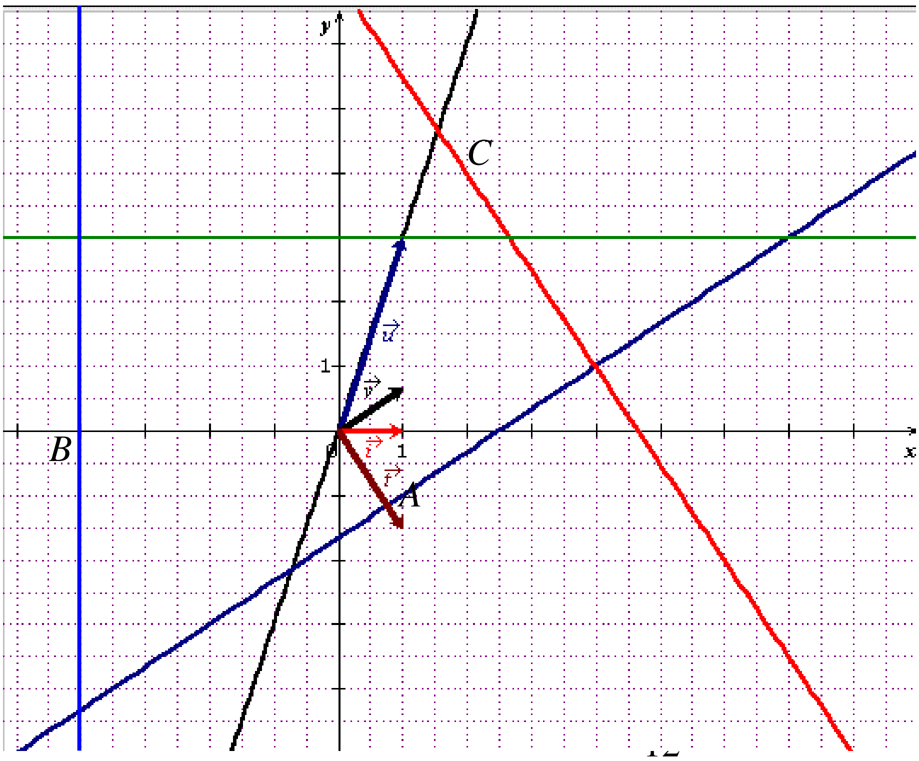
ويشمل النقطة $O(0\,;0)$

$(D_2) : y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$

شعاع توجيهه : $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

ويشمل النقطة $A(1\,;-1)$

$(D_3) : x = -4$



شعاع توجيهه : $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ ويشمل النقطة $B(-4 ; 0)$

(D_4) : $y=-\frac{3}{2}x+7$ شعاع توجيهه : $\vec{t}\begin{pmatrix}1\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ ويشمل النقطة $C(2 ; 4)$

(D_5) : $y=3$ شعاع توجيهه : $\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ويشمل النقطة $D(0 ; 3)$

تمرين 73 صفحة 277 ينسب المستوي إلى معلم $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

لتكن النقطة $A(3 ; -2)$ والشعاع $\vec{u}=2\vec{i}-\vec{j}$.

جد معادلة للمستقيم الذي يشمل النقطة A و $\vec{u}$ شعاع توجيه له .

الحل :

الطريقة 1 : لتكن $M(x ; y)$ نقطة من المستوي . لدينا : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-3\\y+2\end{pmatrix}$ و $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

$M\in(AB)$ معناه أن : $-(x-3)=2(y+2)$ ومعناه أن : $x+2y+1=0$.

الطريقة 2 : معادلة المستقيم هي من الشكل $ax+by+c=0$ شعاع التوجيه $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$

ومنه : $b=-2$ و $a=-1$ إذن : $-x-2y+c=0$ بما أن المستقيم يشمل A فإن : $-3+4+c=0$

ومنه : $c=-1$ إذن : المعادلة هي : $-x-2y-1=0$

الطريقة 3 : $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ شعاع التوجيه للمستقيم كذلك $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ شعاع التوجيه لهذا المستقيم ومنه : معادلته هي :

$y=-\frac{1}{2}x+b$ بما أن المستقيم يشمل A فإن : $-2=-\frac{1}{2}\times3+b$ أي : $b=-\frac{1}{2}$ ومنه : $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$.

تمرين 76 صفحة 277 ينسب المستوي إلى معلم $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

أ) جد معادلة للمستقيم (D) الذي معامل توجيهه $-\frac{3}{2}$ ويشمل النقطة $A(-2 ; -3)$.

ب) عين إحداثيي نقطة تقاطع (D) مع محور الفواصل وكذا إحداثيي نقطة تقاطعه مع محور التراتيب .

الحل :

أ) جد معادلة للمستقيم (D) الذي معامل توجيهه $-\frac{3}{2}$ ويشمل النقطة $A(-2 ; -3)$.

(D) : $y=-\frac{3}{2}x+b$ ولدينا : $A\in(D)$ معناه : $-3=-\frac{3}{2}\times(-2)+b$ أي : $b=-6$

ومنه : (D) : $y=-\frac{3}{2}x-6$

ب) عين إحداثيي نقطة تقاطع (D) مع محور الفواصل وكذا إحداثيي نقطة تقاطعه مع محور التراتيب .

إحداثيي نقطة تقاطع (D) مع محور الفواصل: $(-4\,;\,0)$ و إحداثيي نقطة تقاطعه مع محور التراتيب: $(0\,;\,-6)$

3. شرط توازي مستقيمين

نشاط 2 :

1) $(D):\ ax+by+c=0$ و $(D'):\ a'x+b'y+c'=0$. بين أن $(D)\,//\,(D')$ يكافئ : $ab'=a'b$

2) $(D):\ y=\alpha x+\beta$ و $(D'):\ y=\alpha' x+\beta'$. بين أن $(D)\,//\,(D')$ يكافئ : $(\alpha=\alpha')$

حل النشاط :

1) $(D)\,//\,(D')$ معناه : $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}-b'\\ a'\end{pmatrix}$ مرتبطان خطيا ويكافئ أن : $-ab'=-a'b$ أي : $ab'=a'b$

2) $(D)\,//\,(D')$ معناه : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ \alpha\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\ \alpha'\end{pmatrix}$ مرتبطان خطيا ويكافئ أن $(\alpha=\alpha')$

مبرهنة 1 : (D) و (D') مستقيمان معادلتاهما $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$ على الترتيب. يكون المستقيمان (D) و (D') متوازيين إذا وفقط إذا كان $ab'=a'b$

مبرهنة 2 : (D) و (D') مستقيمان معادلتاهما $y=\alpha x+\beta$ و $y=\alpha' x+\beta'$ على الترتيب.
يكون المستقيمان (D) و (D') متوازيين إذا وفقط إذا كان لهما نفس معامل التوجيه (أي: $\alpha=\alpha'$)

تمرين 75 صفحة 277 ينسب المستوي إلى معلم $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$. (D) مستقيم معادلته $y=\sqrt{2}x-3$
أكتب معادلة للمستقيم (D') الذي يوازي المستقيم (D) ويقطع محور الفواصل في النقطة التي فاصلتها 4 .

الحل :

المستقيمان (D) و (D') متوازيان إذن لهما نفس معامل التوجيه $\sqrt{2}$ ومنه: معادلة (D') هي : $y=\sqrt{2}x+b$
إحداثيتي نقطة تقاطع (D') و محور الفواصل هما : $(4\,;\,0)$ إذن : $0=\sqrt{2}\times 4+b$ أي : $b=-4\sqrt{2}$
ومنه معادلة (D') هي : $y=\sqrt{2}x-4\sqrt{2}$

تمرين 77 صفحة 277 ينسب المستوي إلى معلم $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$.
بين في كل من الحالتين الآتيتين أن المستقيمين (D) و (D') متوازيان .

أ) $(D):\ 2x-3y=1$ $\quad (D'):\ -x+\frac{3}{2}y=0$

ب) $(D):\ -3x+7=0$ $\quad (D'):\ x-\frac{\sqrt{3}}{5}=0$

الحل :

أ) $(D):\ 2x-3y=1$ $\quad (D'):\ -x+\frac{3}{2}y=0$

$(D)\,//\,(D')$ يكافئ : $2\times\frac{3}{2}=(-1)\times(-3)$ أي : $3=3$ و هذا صحيح

ب) $(D):\ -3x+7=0$ $\quad (D'):\ x-\frac{\sqrt{3}}{5}=0$

لدينا : $ab'=(-3)\times 0=0$ و $ba'=0\times 1=0$ إذن : $ab'=a'b$ معناه : $(D)\,//\,(D')$

IV) جملة معادلتين خطيتين لمجهولين :

نشاط 1 : ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\vec{i}\ ;\vec{j})$

نعتبر المعادلات : $(E_1)\ :\ x+2y=4$ ، $(E_2)\ :\ x-y=1$ ، $(E_3)\ :\ x+2y=-1$

(D_1) ، (D_2) ، (D_3) مستقيمات معادلاتها (E_1) ، (E_2) ، (E_3) على الترتيب .

أ) ماذا يمثل الحرفين x و y بالنسبة للمعادلات المعطاة ؟

ب) من بين المستقيمات (D_1) ، (D_2) ، (D_3) ما هما المستقيمان المتوازيان ؟

ج)من بين المعادلات (E_1) ، (E_2) ، (E_3) ما هي المعادلة التي تحققها الثنائية $(2\ ,\ 1)$ ؟

د) ماذا تعتبر النقطة $A(2\ ,\ 1)$ بالنسبة إلى المستقيمين (D_1) و (D_2) ؟

ه) أرسم المستقيمات (D_1) ، (D_2) ، (D_3) .

حل النشاط :

أ) ماذا يمثل الحرفين x و y بالنسبة للمعادلات المعطاة ؟

الحرفان x و y هما مجهولان حقيقيان بالنسبة للمعادلات المعطاة .

ب) من بين المستقيمات (D_1) ، (D_2) ، (D_3) ما هما المستقيمان المتوازيان ؟

لدينا : $(D_1)\ :\ x+2y=4$ شعاع توجيهه $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

$(D_2)\ :\ x-y=1$ شعاع توجيهه $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$(D_3)\ :\ x+2y=-1$ شعاع توجيهه $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

(D_1) و (D_3) متوازيان لأن لهما نفس شعاع التوجيه

ولدينا : $1\times1\neq(-2)\times1$ إذن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا وبالتالي : (D_2) لا يوازي (D_1) ولا يوازي (D_3)

ج) من بين المعادلات (E_1) ، (E_2) ، (E_3) ما هي المعادلة التي تحققها الثنائية $(2\ ,\ 1)$ ؟

$(E_1)\ :\ x+2y=4$ ولدينا : $2+2\times1=4$

$(E_2)\ :\ x-y=1$ ولدينا : $2-1=1$

$(E_3)\ :\ x+2y=-1$ ولدينا : $2+2\times1=4$

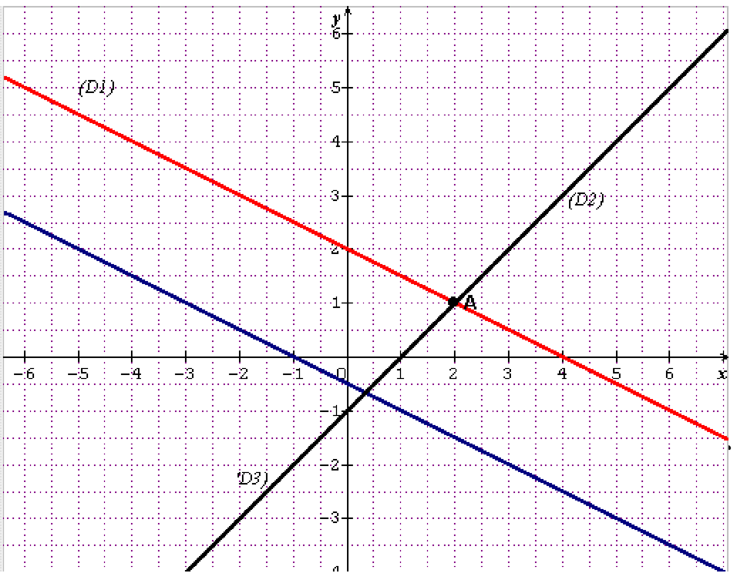
إذن الثنائية $(2\ ,\ 1)$ تحقق كل من المعادلتين

(E_1) و (E_2) ولا تحقق المعادلة (E_3).

د) ماذا تعتبر النقطة $A(2\ ,\ 1)$ بالنسبة إلى المستقيمين (D_1) و (D_2) ؟

النقطة A هي نقطة تقاطع المستقيمين (D_1) و (D_2)

ه) رسم المستقيمات (D_1) ، (D_2) ، (D_3) .



تعريف 1 : نسمي معادلة خطية ذات مجهولين كل معادلة من الشكل $ax+by=c$ حيث a ، b ، c أعداد حقيقية معطاة و x ، y مجهولان حقيقيان.

ملاحظات :

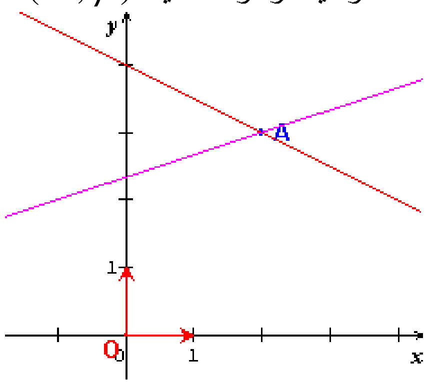
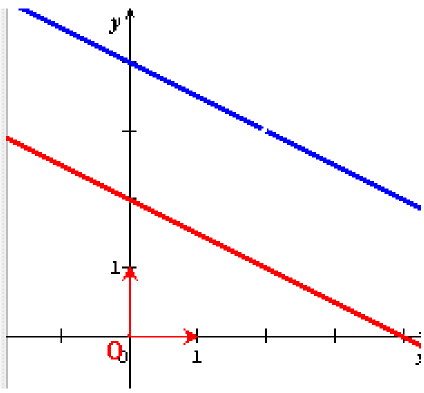
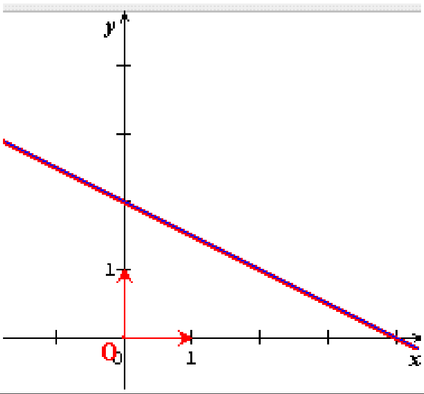
- كل معادلة مستقيم هي معادلة خطية ذات مجهولين حقيقيين
- نرمز إلى $\mathbb{R}^2$ مجموعة الثنائيات من الأعداد الحقيقية . الثنائيات $(x\ ;\ y)$ من $\mathbb{R}^2$ التي تحقق معادلة خطية تسمى حلولها.
- إذا كانت $(a\ ;\ b) = (0\ ;\ 0)$ فإن : $\mathbb{R}^2$ هي مجموعة حلول المعادلة في حالة $c = 0$ و Φ هي مجموعة حلول المعادلة في حالة $c \neq 0$
- في كل معادلة خطية نعتبر أن $a \neq 0$ أو $b \neq 0$ وتعتبر معادلة مستقيم.

تعريف 2 : نسمي جملة معادلتين خطيتين لمجهولين كل جملة من الشكل $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ حيث a ، b ، c ، a' ، b' ، c' أعداد حقيقية معطاة و x ، y مجهولان حقيقيان.

حل جملة معادلتين خطيتين لمجهولين معناه إيجاد كل الثنائيات $(x\ ;\ y)$ من المجموعة $\mathbb{R}^2$ التي تحقق معادلتي الجملة في آن واحد.

ملاحظة : الثنائية $(\alpha\ ;\ \beta)$ حل للجملة $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ معناه أن النقطة $A(\alpha\ ;\ \beta)$ هي نقطة من تقاطع المستقيمين (D_1) و (D_2) الذين معادلتاهما $ax+by=c$ و $a'x+b'y=c'$ على الترتيب.

ثلاث حالات ممكنة لحل الجملة (S) : $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$

(D) و (D') متقاطعان في النقطة $A(\alpha\ ;\ \beta)$ إذن الجملة (S) تقبل حلا وحيدا وهو الثنائية $(\alpha\ ;\ \beta)$ 	(D) و (D') متوازيان تماما إذن الجملة (S) لا تقبل حلول . 	(D) و (D') منطبقان إذن للجملة (S) ما لا نهاية من حلول . 
في هذه الحالة : $ab'-ba' \neq 0$	في هاتين الحالتين لدينا : $ab'-ba'=0$	
$s=\{(\alpha\ ;\ \beta)\}$	$s=\Phi$	$s=\{(x\ ;\ y)/\,ax+by=c\}$

مبرهنة : (S) هي الجملة $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$.

$ab'-ba'\neq 0$ معناه أن الجملة (S) تقبل حلا وحيدا

$ab'-ba'=0$ معناه إما الجملة (S) لا تقبل حلول و إما الجملة (S) تقبل ما لانهاية من الحلول.

تعريف 3 : العدد الحقيقي $ab'-ba'$ يسمى محدد الجملة (S) ونرمز له بالرمز $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$

ونكتب : $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=ab'-ba'$

تطبيق : 79 صفحة 278

لتكن جملة المعادلتين (S) : $\begin{cases} 3x-y=5 \\ kx+y=11 \end{cases}$ ما هي القيم الممكنة للعدد k بحيث يكون للجملة (S) حل وحيد :

الحل :

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ k & 1 \end{vmatrix}=3\times 1-(-1)k=k+3$$

للجملة (S) حل وحيد يكافئ أن: $k+3\neq 0$ معناه أن : $k\neq -3$ أي : $k\in\mathbb{R}-\{-3\}$

طرق حل جملة معادلتين خطيتين لمجهولين :

تمرين 78 صفحة 278 ينسب المستوي إلى معلم $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$

في كل مما يأتي حل جملة المعادلتين ، ثم مثل الحل بيانيا :

أ) $\begin{cases} x+y=6 \\ -2x+y=0 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} x\sqrt{2}+\frac{1}{2}y=2-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ x\sqrt{6}-2y=0 \end{cases}$ ج) $\begin{cases} -7x+11y=43 \\ 6x+y=-16 \end{cases}$ د) $\begin{cases} -x+y=-2 \\ 7x+y=22 \end{cases}$

الحل :

أ) $\begin{cases} x+y=6 \\ -2x+y=0 \end{cases}$ (S) . . .

- **طريقة التعويض :** (S) تكافئ : $\begin{cases} y=-x+6 \\ y=2x \end{cases}$ بما أن $2\neq -1$ فللجملة (s) حل وحيد .

و (S) تكافئ : $\begin{cases} 2x=-x+6 \\ y=2x \end{cases}$ ومعناه أن : $\begin{cases} 3x=6 \\ y=2x \end{cases}$ أي : $\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$ وبالتالي : $s=\{(2\,;\,4)\}$

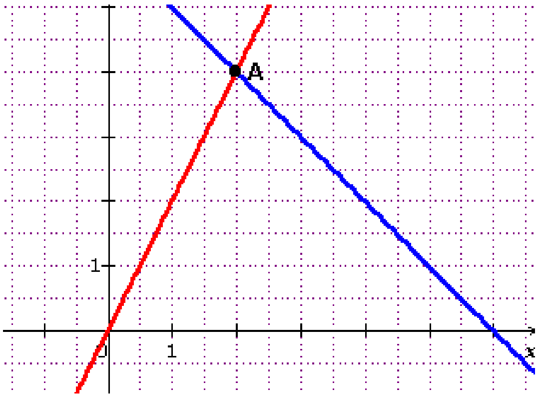
- **طريقة الجمع :** (S) تكافئ : $\begin{cases} y=-x+6 \\ y=2x \end{cases}$ بطرح طرف من طرف للمعادلتين نجد $3x-6=0$ معناه

$x=2$ و (S) تكافئ : $\begin{cases} 2y=-2x+12 \\ y=2x \end{cases}$ بجمع طرف من طرف للمعادلتين نجد $3y=12$

معناه أن : $y=4$ وبالتالي : $s=\{(2\,;\,4)\}$

• طريقة المحدد : $(S)\;\ldots\;\begin{cases}x+y=6\\-2x+y=0\end{cases}$

$\begin{vmatrix}1&1\\-2&1\end{vmatrix}=1\times1-1(-2)=3$ ومنه : $\begin{vmatrix}1&1\\-2&1\end{vmatrix}\neq0$ فللجملة (S) حل وحيد $(x\,;\,y)$ حيث :



$x=\dfrac{\begin{vmatrix}6&1\\0&1\end{vmatrix}}{3}=\dfrac{6}{3}=2$ و $y=\dfrac{\begin{vmatrix}1&6\\-2&0\end{vmatrix}}{3}=\dfrac{12}{3}=4$

وبالتالي : $s=\{(2\,;\,4)\}$

نضع : (D) : $x+y=6$

و(D') : $-2x+y=0$

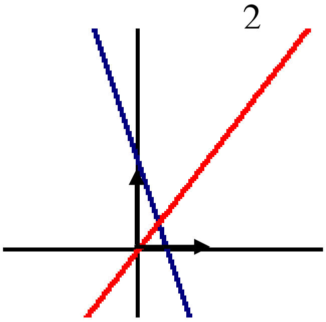
ب) $\begin{cases}x\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}y=2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\x\sqrt{6}-2y=0\end{cases}$ لدينا : $\begin{vmatrix}\sqrt{2}&\frac{1}{2}\\\sqrt{6}&-2\end{vmatrix}=-2\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{6}}{2}=\dfrac{-\sqrt{2}(4+\sqrt{3})}{2}$

المحدد غير معدوم ومنه الجملة تقبل حلا وحيد $(x\,;\,y)$ حيث :

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2-\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\\0&-2\end{vmatrix}}{\frac{-\sqrt{2}(4+\sqrt{3})}{2}}=\frac{2(-4+\sqrt{3})}{-\sqrt{2}(4+\sqrt{3})}=\frac{-\sqrt{2}(4-\sqrt{3})(4-\sqrt{3})}{-(4+\sqrt{3})(4-\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{2}(16-8\sqrt{3}+3)}{16-3}$$

$$x=\frac{19\sqrt{2}-8\sqrt{6}}{13}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}\sqrt{2}&2-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\sqrt{6}&0\end{vmatrix}}{\frac{-\sqrt{2}(4+\sqrt{3})}{2}}=\frac{-2(2\sqrt{6}-\frac{3}{2}\sqrt{2})}{-\sqrt{2}(4+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{6}(4-\sqrt{3})(4-\sqrt{3})}{\sqrt{2}(4+\sqrt{3})(4-\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{3}(16-8\sqrt{3}+3)}{16-3}$$



$y=\dfrac{19\sqrt{3}-24}{13}$ وبالتالي : $s=\left\{\left(\dfrac{19\sqrt{2}-8\sqrt{6}}{13}\,;\,\dfrac{19\sqrt{3}-24}{13}\right)\right\}$.

نضع : (D) : $x\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}y=2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

و(D') : $x\sqrt{6}-2y=0$

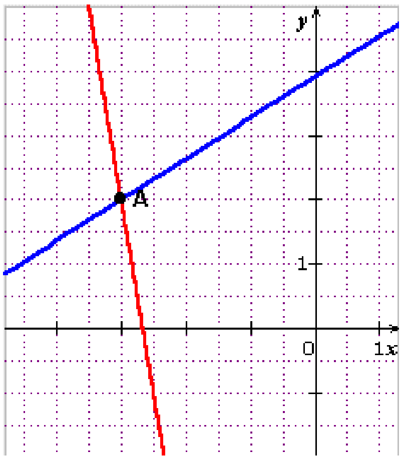
ج) $\begin{cases}-7x+11y=43\\6x+y=-16\end{cases}$ لدينا : $\begin{vmatrix}-7&11\\6&1\end{vmatrix}=-7-66=-73$

إذن للجملة حل وحيد $(x\ ;\ y)$ حيث :

$$x=\frac{\begin{vmatrix}43 & 11\\ -16 & 1\end{vmatrix}}{-73}$$ و $$y=\frac{\begin{vmatrix}-7 & 43\\ 6 & -16\end{vmatrix}}{-73}$$ أي :

$$x=\frac{43+176}{-73}=-\frac{219}{73}=-3$$ و $$y=\frac{112-258}{-73}=\frac{146}{73}=2$$

وبالتالي : $s=\{(-3\ ;\ 2)\}$



نضع : $(D)\ :\ -7x+11y=43$ و $(D')\ :\ 6x+y=-16$

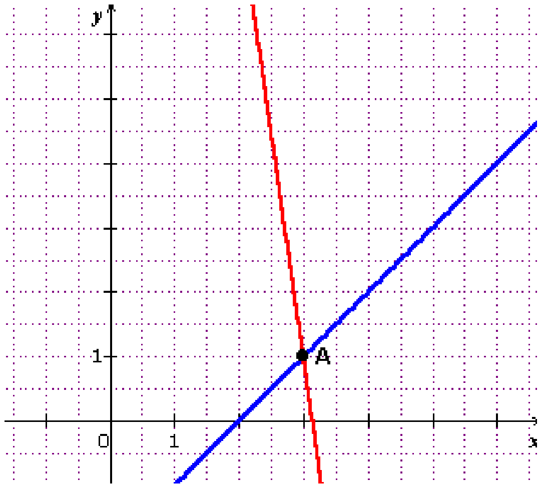
د) $\begin{cases}-x+y=-2\\ 7x+y=22\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}y=x-2\\ y=-7x+22\end{cases}$

بما أن : $-7\neq 1$ فإن للجملة حل وحيد .

$\begin{cases}-x+y=-2\\ 7x+y=22\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}y=x-2\\ x-2=-7x+22\end{cases}$

ومعناه أن : $\begin{cases}y=x-2\\ 8x=24\end{cases}$ وتكافئ أن : $\begin{cases}x=3\\ y=3-2\end{cases}$

وبالتالي : $s=\{(3\ ;\ 1)\}$



تمرين 80 صفحة 278 لتكن الجملة $(S)\ :\ \begin{cases}x-\frac{1}{2}y=3\\ -6x+3y=k\end{cases}$

أ) بين أن الجملة (S) إما أنها لا تقبل حلا وإما أن لها عددا غير منته من الحلول.

ب) ما هي القيم الممكنة للعدد k بحيث يكون للجملة (S) ما لانهاية من الحلول.

الحل :

أ) $\begin{cases}x-\frac{1}{2}y=3\\ -6x+3y=k\end{cases}$ معناه أن : $\begin{cases}y=2x-6\\ y=2x+\frac{1}{3}k\end{cases}$ بما أن للمعدلتين المختصرين نفس معامل x فإن الجملة (S) إما أنها لا تقبل حلا وإما أن لها عددا غير منته من الحلول.

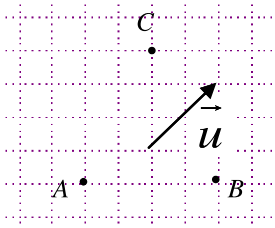
- طريقة أخرى : $\begin{vmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ -6 & 3\end{vmatrix}=3-3=0$ إذن الجملة (S) إما لا تقبل حلا وإما لها ما لانهاية من الحلول.

ب) للجملة (S) ما لانهاية من الحلول معناه أن : $\frac{1}{3}k=-6$ أي : $k=-18$.

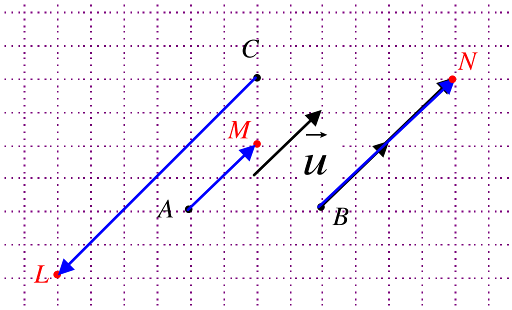
حلول تمارين الكتاب المدرسي

التمرين 27 صفحة 274

أنقل الشكل أدناه ثم علم النقط L ، M ، N المعرفة كما يأتي : $\overrightarrow{AM}=\vec{u}$ ، $\overrightarrow{BN}=2\vec{u}$ ، $\overrightarrow{LC}=3\vec{u}$.



الحل :



$\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ لهما نفس المنحى ، نفس الاتجاه ونفس الطويلة.

$\overrightarrow{BN}$ و $\vec{u}$ لهما نفس المنحى ، نفس الاتجاه و . $BN=2\|\vec{u}\|$.

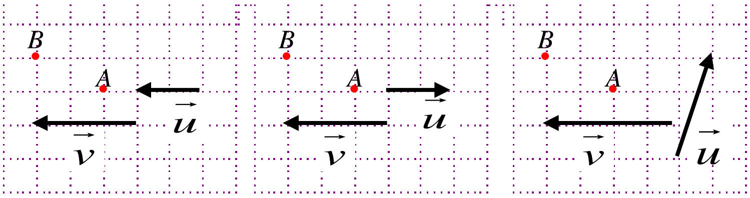
$\overrightarrow{LC}$ و $\vec{u}$ لهما نفس المنحى ، اتجاهان متعاكسان و . $CL=3\|\vec{u}\|$.

التمرين 28 صفحة 274

أنقل كلا من الأشكال الآتية على ورقة مسطرة ،

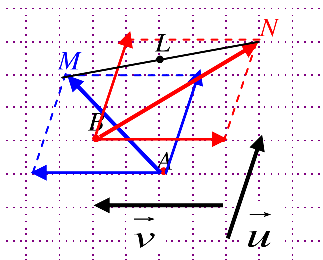
ثم علم النقط M ، N ، L حيث :

$\overrightarrow{AM}=\vec{u}+\vec{v}$ ، $\overrightarrow{BN}=\vec{u}-\vec{v}$ ، $\overrightarrow{ML}=\overrightarrow{LN}$.



الحل :

الشكل 1 :

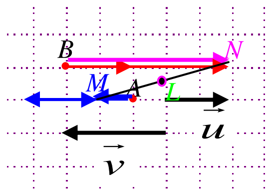


$\overrightarrow{AM}=\vec{u}+\vec{v}$

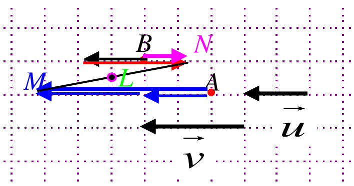
$\overrightarrow{BN}=\vec{u}-\vec{v}$

$\overrightarrow{ML}=\overrightarrow{LN}$ معناه L منتصف $[MN]$

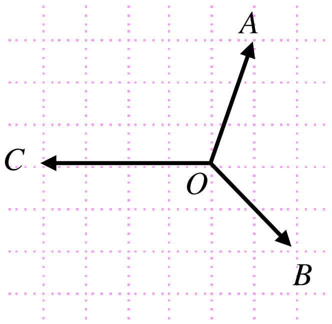
الشكل 2 :



الشكل 3 :



التمرين 29 صفحة 274

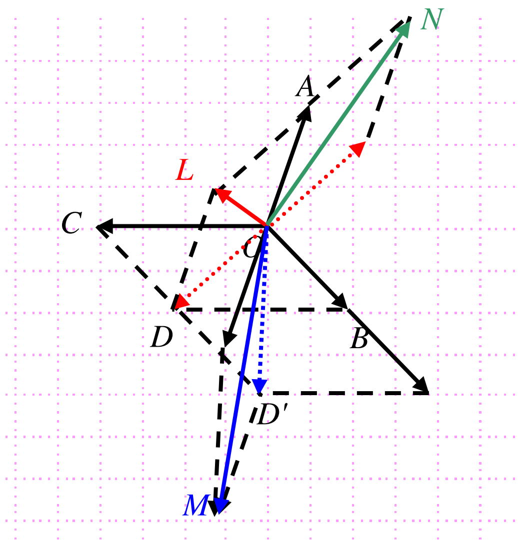


أنقل الشكل أدناه على ورقة مسطرة ، ثم علم النقط L ، M ، N بحيث :

$$\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

الحل :



نضع $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

ومنه : $\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}$

نضع : $\overrightarrow{OD'} = 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

$$\overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD'}$$

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} - (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD}$$

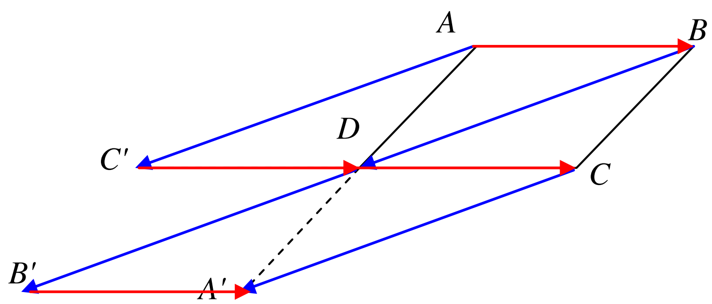
التمرين 30 صفحة 274

$ABCD$ متوازي أضلاع ، النقط A' ، B' ، C' نظائر النقط A ، B ، C بالنسبة إلى النقطة D على الترتيب .

أ – ما هي الأشعة التي كل منها يساوي $\overrightarrow{AB}$ ؟

ب – ما هي الأشعة التي كل منها يساوي $\overrightarrow{AC'}$ ؟

الحل :



أ – الأشعة التي كل منها يساوي $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{C'D} = \overrightarrow{B'A'}$$

ب – الأشعة التي كل منها يساوي $\overrightarrow{AC'}$:

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DB'} = \overrightarrow{CA'}$$

التمرين 31 صفحة 274

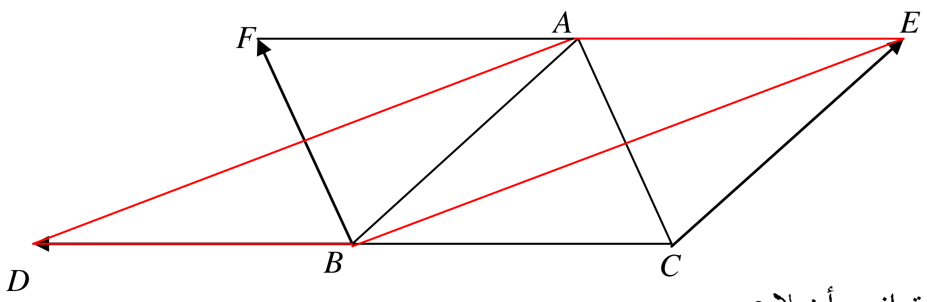
ABC مثلث كيفي ، أنشئ النقط D ، E ، F المعرفة كما يأتي :

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB}$ ، $\overrightarrow{CE} = -\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{AC}$

ت – بين أن الرباعي $AEBD$ متوازي أضلاع .

ث – بين أن النقط E ، A ، F في استقامية .

الحل :



أ − بين أن الرباعي $AEBD$ متوازي أضلاع .

لدينا : $\overrightarrow{CE} = -\overrightarrow{AB}$ أي : $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BA}$ معناه أن الرباعي $ABCE$ متوازي أضلاع ومنه : $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CB}$

بما أن : $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB}$ فإن : $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{BD}$ وبالتالي : الرباعي $AEBD$ متوازي أضلاع

ب −بين أن النقط E ، A ، F في استقامية .

لدينا : $\overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{AC}$ أي : $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CA}$ معناه أن الرباعي $ACBF$ متوازي أضلاع ومنه : $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CB}$

بما أن : $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CB}$ فإن : $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AF}$ ومنه الشعاعان لهما نفس المنحى أي : $(EA) // (AF)$

وبين المستقيمين نقطة مشتركة A إذن النقط E ، A ، F في استقامية .

التمرين32 صفحة 274

ليكن $\vec{u} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{BC}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$

أ − أكتب كلا من $\vec{u}$ و $\vec{v}$ على أبسط شكل ممكن .

ب −أحسب $\vec{u} + \vec{v}$

الحل :

أ − أكتب كلا من $\vec{u}$ و $\vec{v}$ على أبسط شكل ممكن .

$\vec{u} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{BC}$ معناه $\vec{u} = 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}$ معناه $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$

$\vec{v} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ معناه $\vec{v} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD}$

ب −أحسب $\vec{u} + \vec{v}$

$\vec{u} + \vec{v} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD}$ معناه $\vec{u} + \vec{v} = 3\overrightarrow{AB}$.

التمرين33 صفحة 274

A ، B ، C ثلاث نقط ليست في استقامية .

أنشئ النقطتين M ، N المعرفتين بالعلاقتين $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$

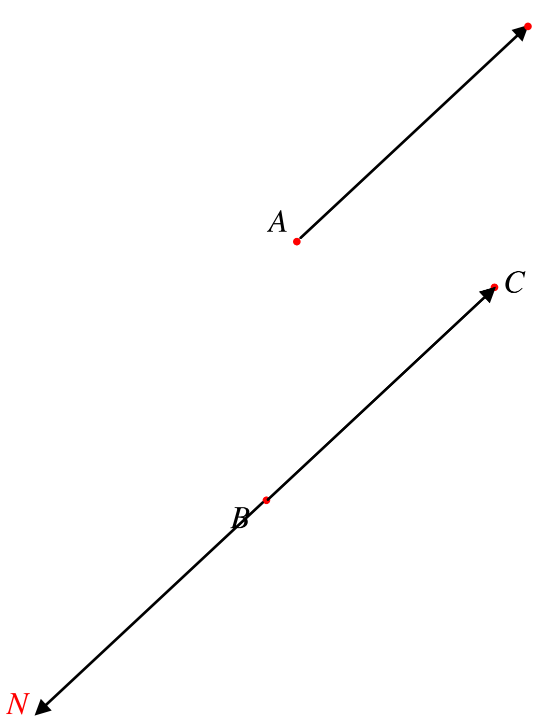
الحل :

$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ معناه $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

يكافئ $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$ ومعناه $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$ معناه $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$

يكافئ $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB}$ ومعناه $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{CB}$.



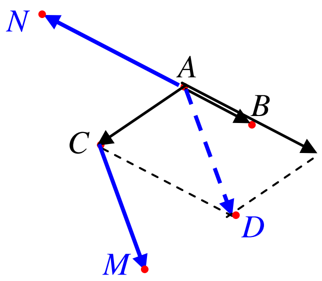
التمرين 34 صفحة 274

A ، B ، C ثلاث نقط ليست في استقامية .

أ – أنشئ النقطتين N ، M المعرفتين بالعلاقتين الآتيتين على الترتيب :

$\overrightarrow{AN} = -2\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

ب –بين أن النقطة C منتصف $[MN]$.



الحل :

أ – نضع $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ وننشئ النقطة M حيث : $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AD}$

ب –لدينا : $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC}$ ومنه : $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AC}$

إذن : $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$ وبالتالي : النقطة C منتصف $[MN]$.

التمرين 35 صفحة 274

A ، B ، C ، D أربع نقط متمايزة. بين أن : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

الحل :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}$ يكافئ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

لأن الشعاعان $\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{DB}$ متعاكسان .

التمرين 36 صفحة 274

A ، B ، C ثلاث نقط من المستوي .أي المساويات الآتية تعني أن C منتصف $[AB]$ ؟

أ) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ ب) $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CB}$ ج) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$ د) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$

الحل :

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$ تكافئ $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$ وتعني أن C منتصف $[AB]$.

$\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{CB}$ تكافئ $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$ وتعني أن C منتصف $[AB]$.

$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}$ تكافئ $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$ وتعني $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}$ تكافئ $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$ وتعني أن C منتصف $[AB]$

التمرين37 صفحة 274

A ، B نقطتان من المستوي .

أ) بفرض I منتصف $[AB]$. بين أنه من أجل كل نقطة M من المستوي فإن $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$

ب) بفرض $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$. بين أن النقطة I هي منتصف $[AB]$.

ج) صغ جملة واحدة ما برهنت على صحته في أ) و ب) .

الحل :

أ) بفرض I منتصف $[AB]$. بين أنه من أجل كل نقطة M من المستوي فإن $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$

نفرض I منتصف $[AB]$ معناه $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ ومنه : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{MI}$

ب) بفرض $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$. بين أن النقطة I هي منتصف $[AB]$.

نفرض $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$ معناه $\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{MI}$ يكافئ $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

وبالتالي النقطة I هي منتصف $[AB]$.

ج) صغ جملة واحدة ما برهنت على صحته في أ) و ب) .

تكون النقطة I منتصف $[AB]$ إذا وفقط إذا كان من أجل كل نقطة M من المستوي : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$

التمرين38 صفحة 274

ABC مثلث . G مركز ثقله . A' منتصف $[BC]$.

د) بين أن : $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GA'}$

ه) بين أن : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

الحل :

أ) لدينا A' منتصف $[BC]$ إذن : $\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{A'C}=\vec{0}$

ومنه : $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{A'C}=2\overrightarrow{GA'}$

ب) بين أن : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{A'A}+2\overrightarrow{GA'}=\overrightarrow{A'A}+3\overrightarrow{GA'}$$

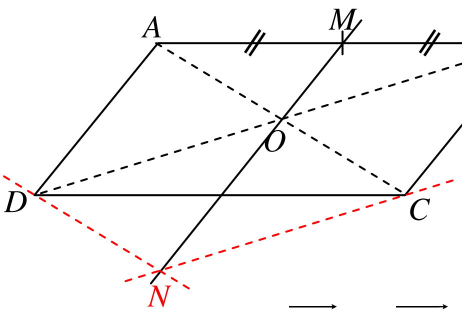
بما أن G مركز ثقل المثلث ABC فإن : $AA' = 3\ GA'$ و الشعاعان $\overrightarrow{GA'}$ و $\overrightarrow{AA'}$ لهما نفس الاتجاه

إذن : $\overrightarrow{AA'}=3\overrightarrow{GA'}$ وبالتالي : $\overrightarrow{A'A}+3\overrightarrow{GA'}=\vec{0}$ إذن : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

التمرين 39 صفحة 275

$ABCD$ متوازي أضلاع مركزه النقطة O . M منتصف $[AB]$ ، المستقيم الذي يشمل النقطة D ويوازي (AC) يقطع المستقيم الذي يشمل النقطة C ويوازي (BD) في النقطة N . بين أن النقط M ، O ، N في استقامية.

الحل :



باستعمال الأشعة نجد :

$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}$ وكذلك $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}$

إذن : $2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}$

بما أن : M منتصف $[AB]$ فإن : $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}$

ومنه: $2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$

وبما أن : $ABCD$ متوازي أضلاع مركزه النقطة O فإن : $\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OC}$ و $\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OD}$

ومنه : $2\overrightarrow{OM}=-\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=-(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})=-\overrightarrow{ON}$

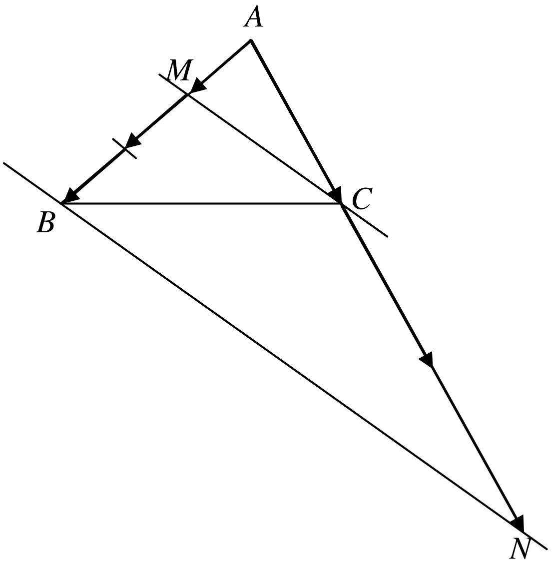
وبالتالي: $\overrightarrow{ON}=-2\overrightarrow{OM}$ ومنه $(ON)\,//\,(OM)$ وللمستقيمين نقطة مشتركة إذن: النقط M ، O ، N في استقامية .

التمرين 40 صفحة 275

أرسم مثلثا ABC ، وعلم النقطتين M و N بحيث : $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{AC}$.

بين أن المستقيمين (CM) و (BN) متوازيان.

الحل :



باستعمال الأشعة نجد :

$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}$

ومنه : $\overrightarrow{BN}=3\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{AC}$

إذن : $\overrightarrow{BN}=3(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC})$

وبالتالي : $\overrightarrow{BN}=3\overrightarrow{MC}$

ومنه : الشعاعان $\overrightarrow{BN}$ و $\overrightarrow{MC}$ لهما نفس المنحى

ومنه : المستقيمان (CM) و (BN) متوازيان.

التمرين 41 صفحة 275

$\vec{u}$ ، $\vec{v}$ شعاعان غير معدومين من المستوي ومرتبطان خطيا .

أ) بين أن الشعاعين $2\vec{u}+3\vec{v}$ و $\vec{u}$ مرتبطان خطيا .

ب) بين أن الشعاعين $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$ و $\vec{u}$ مرتبطان خطيا وذلك من أجل كل عددين حقيقيين α و β .

الحل :

أ) بين أن الشعاعين $2\vec{u}+3\vec{v}$ و $\vec{u}$ مرتبطان خطيا .

$\vec{u}$ ، $\vec{v}$ شعاعان غير معدومين من المستوي ومرتبطان خطيا معناه أنه يوجد عدد حقيقي غير معدوم k حيث :

$\vec{v}=k.\vec{u}$ ومنه : $2\vec{u}+3\vec{v}=2\vec{u}+3k\vec{u}=(2+3k)\vec{u}$

بوضع $(2 + 3k = k')$ نجد $2\vec{u}+3\vec{v}=k'\vec{u}$ حيث k' عدد حقيقي

وبالتالي : الشعاعان $2\vec{u}+3\vec{v}$ و $\vec{u}$ مرتبطان خطيا .

ملاحظة : يمكن أن يكون $k' = 0$ ويصبح $2\vec{u}+3\vec{v}=\vec{0}$ والشعاع المعدوم مرتبط خطيا مع أي شعاع.

ب) بين أن الشعاعين $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$ و $\vec{u}$ مرتبطان خطيا وذلك من أجل كل عددين حقيقيين α و β .

$\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}=\alpha\vec{u}+\beta k\vec{u}=(\alpha+\beta k)\vec{u}$

بوضع $(\alpha+\beta k=k')$ نجد $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}=k'\vec{u}$ حيث k' عدد حقيقي

ومنه : الشعاعان $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$ و $\vec{u}$ مرتبطان خطيا وذلك من أجل كل عددين حقيقيين α و β .

التمرين 42 صفحة 275

$[AB]$ قطعة مستقيمة طولها $9\ cm$. C نقطة منها حيث $AC = 5\ cm$.

جد العدد الحقيقي x حيث : $\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}$

الحل :

لدينا : الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ لهما نفس المنحى ونفس الاتجاه و $AB = 9\ cm$ و $AC = 5\ cm$

ومنه : $AC=\frac{5}{9}AB$ إذن : $\overrightarrow{AC}=\frac{5}{9}\overrightarrow{AB}$ وبالتالي : $x=\frac{5}{9}$.

التمرين 43 صفحة 275

$[AB]$ قطعة مستقيم .

– بين أنه إذا كانت M تنتمي إلى $[AB]$ فإنه يوجد عدد حقيقي k من $[0 ; 1]$ حيث : $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$

الحل :

لدينا : إذا كانت M تنتمي إلى $[AB]$ فإن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AM}$ لهما نفس المنحى ونفس الاتجاه

و $AM \le AB$ أي : $AM = k \times AB$ حيث k عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $[0 ; 1]$

ومنه $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$ حيث k عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $[0 ; 1]$.

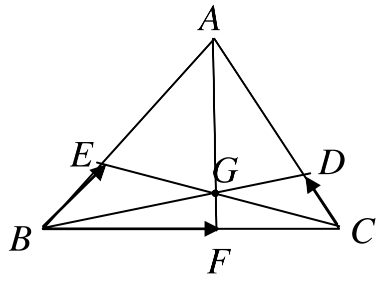
التمرين 44 صفحة 275

ABC مثلث كيفي . النقط D ، E ، F معرفة كما يأتي : $\overrightarrow{BA}=3\overrightarrow{BE}$ و $\overrightarrow{CA}=4\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{BF}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$

و G منتصف $[CE]$.

– بين أن (DB) و (AF) يتقاطعان في النقطة G . (إرشاد : عبر عن الشعاعين $\overrightarrow{BG}$ ، $\overrightarrow{BD}$ بدلالة $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BA}$ وكذلك بالنسبة للشعاعين $\overrightarrow{AG}$ ، $\overrightarrow{AF}$)

الحل :



- $\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BE})$

ومنه : $\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{6}\overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$

ومنه : $\overrightarrow{BD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$

وبالتالي : $\overrightarrow{BG}=\frac{1}{6}(3\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})$ و $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{4}(3\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})$ إذن : $4\overrightarrow{BD}=6\overrightarrow{BG}$ أي : $\overrightarrow{BD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BG}$

ومنه : الشعاعان $\overrightarrow{BG}$ و $\overrightarrow{BD}$ لهما نفس المنحى وبالتالي النقط B ، D ، G في استقامية.

- $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CE}=-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BE}$

$\overrightarrow{AG}=-\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{6}\overrightarrow{BA}=-\frac{5}{6}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{6}(-5\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{BC})$

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{BA}+\frac{3}{5}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{5}(-5\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{BC})$

وبالتالي : $6\overrightarrow{AG}=5\overrightarrow{AF}$ أي : $\overrightarrow{AG}=\frac{5}{6}\overrightarrow{AF}$

ومنه : $\overrightarrow{AG}$ ، $\overrightarrow{AF}$ لهما نفس المنحى وبالتالي النقط A ، F ، G في استقامية.

خلاصة : النقطة G تنتمي إلى المستقيمين (DB) و (AF) .

التمرين 45 صفحة 275

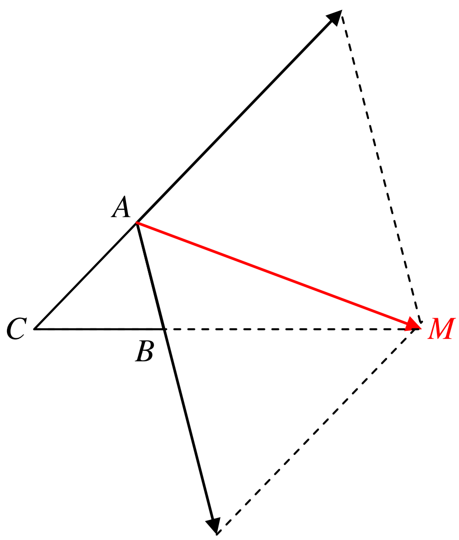
A ، B ، C ثلاث نقط ليست في استقامية .

أ – أنشئ النقطة M المعرفة بالعلاقة : $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$

ب –بين أن النقط C ، B ، M في استقامية .

(إرشاد : عبر عن الشعاع $\overrightarrow{CM}$ بدلالة الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$)

الحل :



أ – أنشئ النقطة M المعرفة بالعلاقة : $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$

ب –بين أن النقط C ، B ، M في استقامية .

$\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$ معناه $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$

ومعناه $\overrightarrow{CM}=3\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$ يكافئ $\overrightarrow{CM}=3(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$

أي : $\overrightarrow{CM}=3(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA})$ يكافئ $\overrightarrow{CM}=3\overrightarrow{CB}$

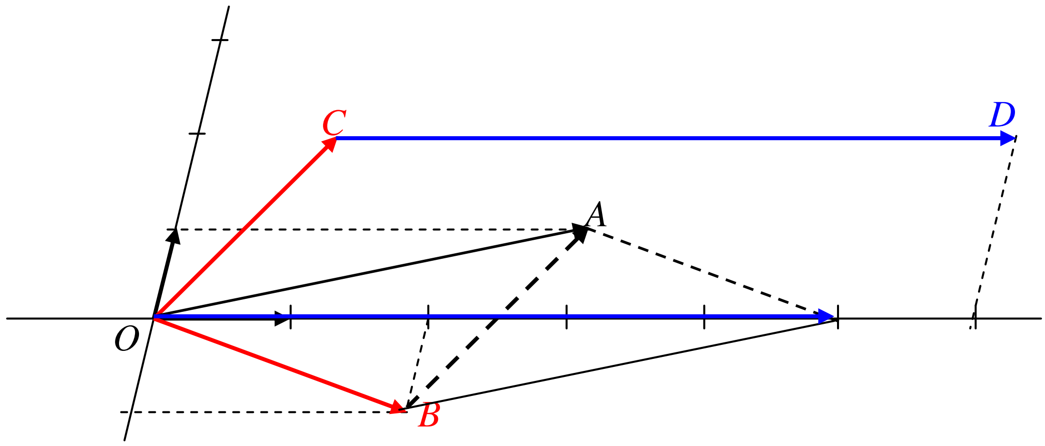
وبالتالي $(CM)\,//\,(CB)$

وبما أن للمستقيمين نقطة مشتركة C فإن النقط C ، B ، M في استقامية .

التمرين 49 صفحة 276

ينسب المستوي إلى معلم $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$. ليكن $A(3\,;1)$ ، $\overrightarrow{OB}=2\vec{i}-\vec{j}$ ، $\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$. علم النقط A ، B ، C ، D .

الحل :



التمرين 50 صفحة 276

ينسب المستوي إلى معلم $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$. ليكن $\vec{u}=4\vec{i}+\vec{j}$ و $\vec{v}=-2\vec{i}+3\vec{j}$

أ) أحسب مركبتي كل من الأشعة الآتية : $\vec{u}+\vec{v}$ ؛ $\vec{u}+2\vec{v}$ ؛ $\frac{3}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$.

ب) أرسم ممثلا مبدأه O لكل من الأشعة السابقة .

الحل :

أ) أحسب مركبتي كل من الأشعة الآتية :

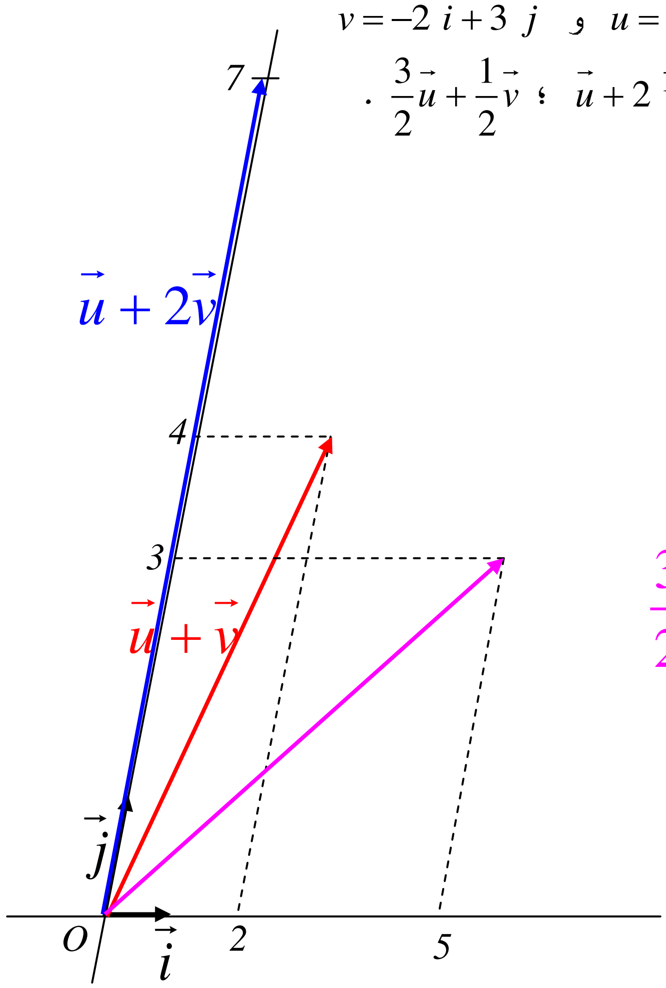
$\vec{u}+\vec{v}$ ؛ $\vec{u}+2\vec{v}$ ؛ $\frac{3}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$.

$\vec{u}+\vec{v}=2\vec{i}+4\vec{j}$ ومنه : $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$

$\vec{u}+2\vec{v}=7\vec{j}$ ومنه : $\vec{u}+2\vec{v}\begin{pmatrix}0\\7\end{pmatrix}$

$\frac{3}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}=5\vec{i}+3\vec{j}$ ومنه : $\frac{3}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$

ب) أرسم ممثلا مبدأه O لكل من الأشعة السابقة .



التمرين 51 صفحة 276

ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\vec{i}\ ;\vec{j})$.

من أجل أية قيمة لعدد x تكون النقط A ، B ، C في استقامية في كل حالة من الحالتين الآتيتين :

أ) $A(x\ ;3)$ ، $B(4\ ;5)$ ، $C(7\ ;6)$

ب) $A(x\ ;5)$ ، $B(x+4\ ;3)$ ، $C(7\ ;1)$

الحل :

أ) $A(x\ ;3)$ ، $B(4\ ;5)$ ، $C(7\ ;6)$

النقط A ، B ، C في استقامية تعني أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ مرتبطان خطيا

لدينا : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4-x\\5-3\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}7-4\\6-5\end{pmatrix}$ أي : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4-x\\2\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

إذن : النقط A ، B ، C في استقامية تعني أن $4-x=6$ أي : $x=-2$

ب) $A(x\ ;5)$ ، $B(x+4\ ;3)$ ، $C(7\ ;1)$

النقط A ، B ، C في استقامية تعني أن الشعاعين $\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{CB}$ مرتبطان خطيا

لدينا : $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}x-7\\5-1\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}x+4-7\\3-1\end{pmatrix}$ أي : $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}x-7\\4\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}x-3\\2\end{pmatrix}$

إذن : النقط A ، B ، C في استقامية تعني أن $2x-14=4x-12$ أي : $2x=-2$ معناه $x=-1$

التمرين 53 صفحة 276

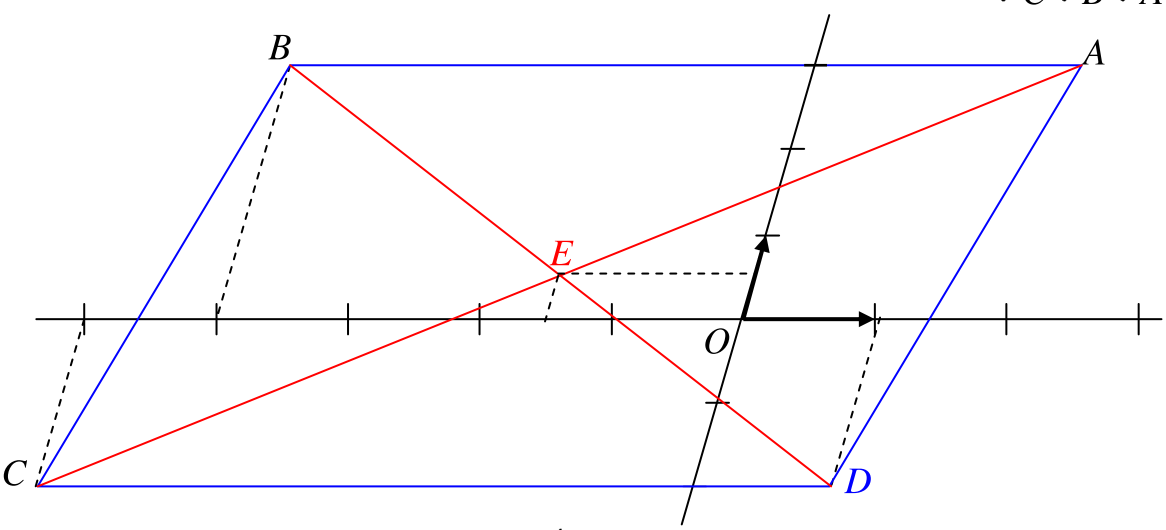
ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\vec{i}\ ;\vec{j})$. نعتبر النقط $A(2\ ;3)$ ؛ $B(-4\ ;3)$ ؛ $C(-5\ ;-2)$.

أ) علم النقط A ، B ، C ، ثم أحسب إحداثيتي النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع .

ب) أحسب إحداثيتي النقطة E مركز $ABCD$.

الحل :

أ) تعليم النقط A ، B ، C .



حساب إحداثيتي النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع .

الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع معناه أن $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

نضع $D(x\ ;\ y)$ ومنه : $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}x-2\\y-3\end{pmatrix}$ ولدينا : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-5+4\\-2-3\end{pmatrix}$ أي : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\-5\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ يكافئ أن : $\begin{cases}x-2=-1\\y-3=-5\end{cases}$ ومعناه أن : $\begin{cases}x=1\\y=-2\end{cases}$ أي : $D(1\ ;\ -2)$

ب) حساب إحداثيتي النقطة E مركز $ABCD$.

النقطة E هي منتصف $[AC]$ و منتصف $[BD]$ إذن : $E\left(\frac{3-2}{2}\ ;\ \frac{2-5}{2}\right)$ أي : $E\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{-3}{2}\right)$.

التمرين 54 صفحة 276

ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\vec{i}\ ;\ \vec{j})$. نعتبر النقط $A(0\ ;3)$ ، $B(3\ ;0)$ ، $C(-1\ ;\ 2)$ ، $D(4\ ;-4)$.

أ) هل المستقيمان (AB) و (CD) متوازيان ؟

ب) M نقطة فاصلتها 4 . عين ترتيب M بحيث يكون المستقيمان (AB) و (CM) متوازيين .

الحل :

أ) هل المستقيمان (AB) و (CD) متوازيان ؟

المستقيمان (AB) و (CD) متوازيان معناه أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطان خطيا.

لدينا : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-0\\0-3\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4+1\\-4-2\end{pmatrix}$ أي : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}5\\-6\end{pmatrix}$

لدينا : $3\times(-6)=-18$ و $(-3)\times 5=-15$ إذن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ غير مرتبطين خطيا وبالتالي :
المستقيمان (AB) و (CD) غير متوازيين .

ب) M نقطة فاصلتها 4 . عين ترتيب M بحيث يكون المستقيمان (AB) و (CM) متوازيين .

المستقيمان (AB) و (CM) متوازيان معناه أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CM}$ مرتبطان خطيا.

لدينا : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}4+1\\y-2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CM}$ مرتبطان خطيا يكافئ أن : $3(y-2)=5\times(-3)$ ومعناه أن $3y=-9$ أي : $y=-3$.

التمرين 55 صفحة 276

ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\vec{i}\ ;\ \vec{j})$.

بين فيما يأتي أن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا ، ثم عبر عن أحدهما بدلالة الآخر .

ج) $\vec{u}=\vec{i}+3\vec{j}$ و $\vec{v}=(\vec{i}+5\vec{j})+\frac{1}{2}(\vec{i}-\vec{j})$.

د) $\vec{u}=(2-\sqrt{3})\vec{i}+\vec{j}$ و $\vec{v}=\vec{i}+(2+\sqrt{3})\vec{j}$

الحل :

أ) $\vec{u}=\vec{i}+3\vec{j}$ و $\vec{v}=(\vec{i}+5\vec{j})+\frac{1}{2}(\vec{i}-\vec{j})$.

ب) $\vec{u}=(2-\sqrt{3})\vec{i}+\vec{j}$ و $\vec{v}=\vec{i}+(2+\sqrt{3})\vec{j}$.

التمرين 56 صفحة 276

ينسب المستوي إلى معلم $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

عين في كل مما يأتي العدد x بحيث يكون الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا.

أ) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}x+1\\6\end{pmatrix}$ ب) $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\-5\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}2-x\\1\end{pmatrix}$ ج) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\x\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\27\end{pmatrix}$

الحل :

أ) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}x+1\\6\end{pmatrix}$ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا معناه : $1\times 6-2(x+1)=0$ معناه $x = 2$

ب) $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\-5\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}2-x\\1\end{pmatrix}$ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا معناه : $x-(-5)(2-x)=0$ معناه $x=\frac{5}{2}$

ج) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\x\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\27\end{pmatrix}$ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا معناه : $x^2 = 81$ يكافئ أن $x = -9$ أو $x = 9$.

التمرين 57 صفحة 276

ينسب المستوي إلى معلم $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$. نعتبر النقطتين $A(-3\,;\,1)$ ؛ $B(7\,;\,6)$. M نقطة فاصلتها 1 .

عين ترتيب النقطة M بحيث تكون النقط A ، M ، B في استقامية .

الحل :

النقط A ، M ، B في استقامية معناه أن الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطيا

نضع $M(1\,;\,y)$ ومنه : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}1+3\\y-1\end{pmatrix}$ أي : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}4\\y-1\end{pmatrix}$ ولدينا : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7+3\\6-1\end{pmatrix}$ أي : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}10\\5\end{pmatrix}$

النقط A ، M ، B في استقامية معناه أن : $4\times 5 = 10(y-1)$ ويكافئ $10\,y = 30$ يعني أن : $y = 3$.

إذن : ترتيب النقطة M هو 3 .

التمرين 58 صفحة 276

ينسب المستوي إلى معلم $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$. نعتبر النقطتين $A(-3\,;\,1)$ ؛ $B(7\,;\,6)$.

أوجد علاقة بين العددين الحقيقيين x و y والتي من أجلها تكون النقطة $M(x\,;\,y)$ تنتمي إلى المستقيم (AB) .

الحل :

$M\in(AB)$ معناه أن : النقط A ، M ، B في استقامية ومعناه أن الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطيا.

لدينا : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+3 \\ y-1 \end{pmatrix}$ ولدينا : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 7+3 \\ 6-1 \end{pmatrix}$ أي : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$

$M \in (AB)$ معناه أن : $5(x + 3) = 10(y - 1)$ ويكافئ $5x + 15 = 10y - 10$

يعني أن : $5x + 25 = 10y$ ويكافئ أن : $x + 5 = 2y$.

التمرين 59 صفحة 276

ينسب المستوي إلى معلم $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$. $ABCD$ متوازي أضلاع ، النقط E ، F ، G ، H معرفة كما يلي :

$\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AE}$ ؛ $\overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{DF}$ ؛ $\overrightarrow{CB} = 3\overrightarrow{CG}$ ؛ $\overrightarrow{BA} = 3\overrightarrow{BH}$

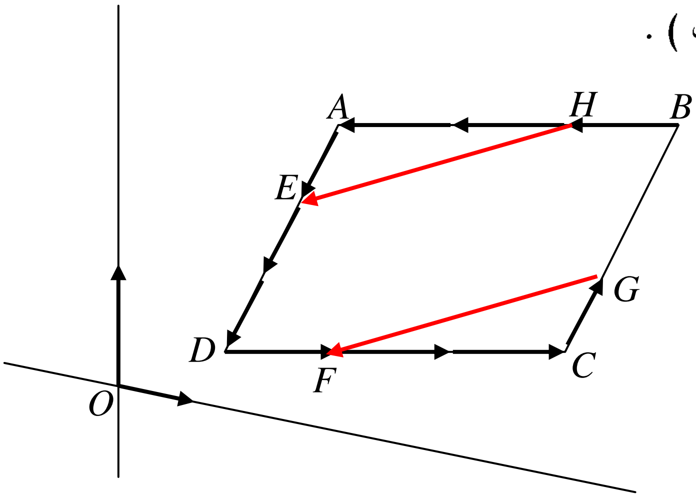
ج) أنجز شكلا مناسبا.

د) بين أن الشعاعين $\overrightarrow{HE}$ و $\overrightarrow{GF}$ متساويان ، واستنتج نوع الرباعي $EFGH$.

ه) عين إحداثيي كل نقطة من النقط E ، F ، G ، H في المعلم $(B\,;\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA})$ ، ثم تحقق من إجابة الجزء (ب) تحليليا (أي باستعمال الإحداثيات) .

الحل :

أ) أنجز شكلا مناسبا.



ب) بين أن الشعاعين $\overrightarrow{HE}$ و $\overrightarrow{GF}$ متساويان ، واستنتج نوع الرباعي $EFGH$.

$\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GF}$

بما أن : $\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{GF}$ فإن : $(HE) // (GF)$ و $HE = GF$ ومنه الرباعي $EFGH$ هو متوازي أضلاع.

ج) عين إحداثيي كل نقطة من النقط E ، F ، G ، H في المعلم $(B\,;\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA})$ ، ثم تحقق من إجابة الجزء (ب) تحليليا (أي باستعمال الإحداثيات) .

$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$ ومنه : $E(\frac{1}{3}\,;1)$ في المعلم $(B\,;\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA})$

$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$ ومنه : $F(1\,;\frac{2}{3})$ في المعلم $(B\,;\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA})$

$\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ ومنه : $G(\frac{2}{3}\,;0)$ في المعلم $(B\,;\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA})$

$\overrightarrow{BH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ ومنه : $H(0\,;\frac{1}{3})$ في المعلم $(B\,;\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA})$

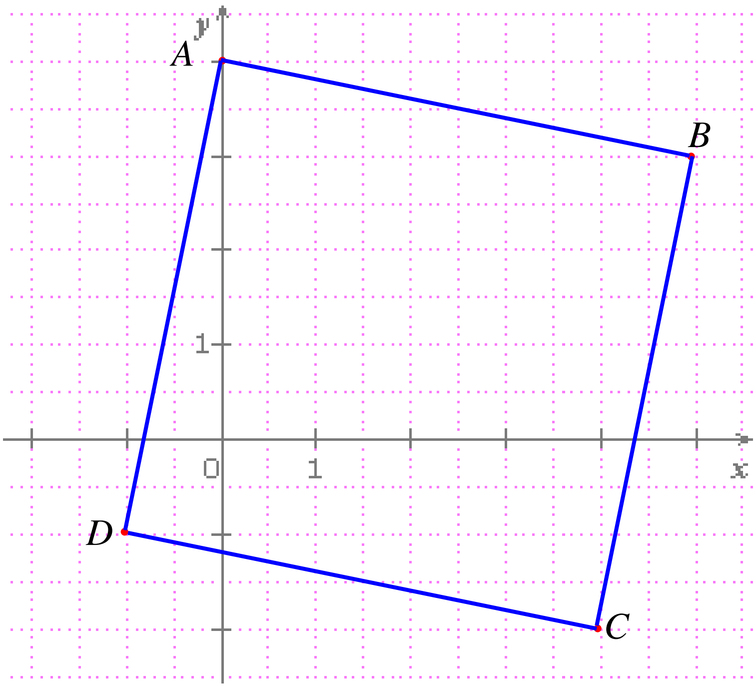
$\overrightarrow{HE}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}-0\\1-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ ومنه : $\overrightarrow{HE}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{GF}\begin{pmatrix}1-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}-0\end{pmatrix}$ ومنه : $\overrightarrow{GF}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ إذن : $\overrightarrow{HE}=\overrightarrow{GF}$.

التمرين 60 صفحة 276

في معلم متعامد ومتجانس $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ علم النقط $A(0\,;4)$ ، $B(5\,;3)$ ، $C(4\,;-2)$ ، $D(-1\,;-1)$.

تحقق من أن الرباعي $ABCD$ مربع.

الحل :



لدينا : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5-0\\3-4\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}4-5\\-2-3\end{pmatrix}$ ،

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-1-4\\-1+2\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4-0\\-2-4\end{pmatrix}$ ،

أي : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\-5\end{pmatrix}$ ،

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\-6\end{pmatrix}$ ،

لدينا الشعاعان $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$ متعاكسان

إذن : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

ومنه : الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.

لدينا : $AB=\sqrt{5^2+(-1)^2}=\sqrt{26}$ و $BC=\sqrt{(-1)^2+(-5)^2}=\sqrt{26}$ إذن $AB = BC$

ومنه : الرباعي $ABCD$ معين.

لدينا : $AC=\sqrt{4^2+(-6)^2}=\sqrt{52}$ و $AB^2+BC^2=26+26=52=AC^2$ وحسب مبرهنة فيثاغورس

المثلث ABC قائم في B ومنه : الرباعي $ABCD$ مربع.

التمرين 61 صفحة 276

ينسب المستوي إلى معلم $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$. $ABCD$ متوازي أضلاع ، النقطة A' نظيرة النقطة A بالنسبة إلى النقطة D ، النقطة M منتصف $[CD]$.

أ) بين لماذا يمكن اعتبار $(B\,;\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA})$ معلما للمستوي ؟

ب) عين إحداثيي كل من النقط A ، B ، C ، D ، M ، A' في هذا المعلم.

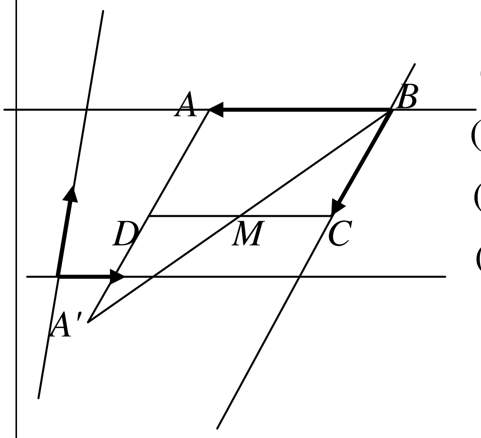
ج) بين باستعمال الإحداثيات المحصل عليها أن النقطة M هي منتصف $[BA']$.

الحل :

أ) بين لماذا يمكن اعتبار $(B\ ;\ \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$ معلما للمستوي ؟

لدينا $ABCD$ متوازي أضلاع إذن النقط الأربعة متمايزة و (BC) لا يوازي (BA) ومنه الشعاعان $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BA}$ غير مرتبطين خطيا أي الثنائية $(\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$ تشكل أساسا للمستوي وبالتالي : $(B\ ;\ \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$ معلم للمستوي

ب) عين إحداثيي كل من النقط A ، B ، C ، D ، M ، A' في هذا المعلم.



لدينا : $\overrightarrow{BA} = 0\overrightarrow{BC} + 1\overrightarrow{BA}$ ومنه : $A(0\ ;\ 1)$ في المعلم $(B\ ;\ \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$

لدينا : $\overrightarrow{BB} = 0\overrightarrow{BC} + 0\overrightarrow{BA}$ ومنه : $B(0\ ;\ 0)$ في المعلم $(B\ ;\ \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$

لدينا : $\overrightarrow{BC} = 1\overrightarrow{BC} + 0\overrightarrow{BA}$ ومنه : $C(1\ ;\ 0)$ في المعلم $(B\ ;\ \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$

لدينا : $\overrightarrow{BD} = 1\overrightarrow{BC} + 1\overrightarrow{BA}$ ومنه : $D(1\ ;\ 1)$ في المعلم $(B\ ;\ \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$

لدينا : $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BC} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

ومنه : $M(1\ ;\ \dfrac{1}{2})$ في المعلم $(B\ ;\ \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$

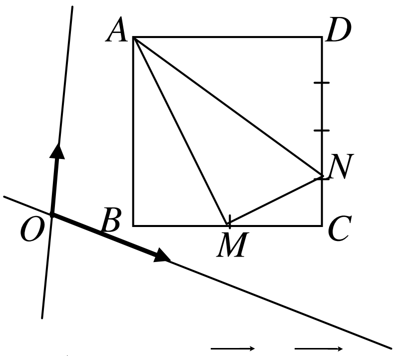
لدينا : $\overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$ ومنه : $A'(2\ ;\ 1)$ في المعلم $(B\ ;\ \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$

ج) بين باستعمال الإحداثيات المحصل عليها أن النقطة M هي منتصف $[BA']$.

نفرض أن : M' منتصف $[BA']$ إذن : $M'(\dfrac{0+2}{2}\ ;\ \dfrac{0+1}{2})$ ومنه : $M'(1\ ;\ \dfrac{1}{2})$

إذن M' منطبقة على M ومنه النقطة M هي منتصف $[BA']$.

التمرين 62 صفحة 277



ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$. $ABCD$ مربع ،

النقطة M منتصف $[BC]$ و النقطة N معرفة بالعلاقة : $\overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{CN}$

أ) بين لماذا يمكن اعتبار $(B\ ;\ \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$ معلما متعامدا ومتجانسا للمستوي ؟

ب) بين تحليليا أن المثلث AMN قائما في M .

الحل :

أ) بما أن $ABCD$ مربع فإن النقط A ، B ، C متمايزة وليست في استقامية ومنه : $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BA}$ غير مرتبطين خطيا وبالتالي : $(B\ ;\ \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$ معلم للمستوي وبما أن $BA = BC$ و $(BA) \perp (BC)$ فإن :

$(B\ ;\ \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$ معلم متعامد ومتجانس للمستوي .

ب) بين تحليليا أن المثلث AMN قائما في M .

في المعلم $(B\ ;\ \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})$ لدينا : $A(0\ ;\ 1)$ ؛ $M(\dfrac{1}{2}\ ;\ 0)$ ؛ $N(1\ ;\ \dfrac{1}{4})$

$AN^2 = (1-0)^2 + (\dfrac{1}{4}-1)^2 = 1 + \dfrac{9}{16} = \dfrac{25}{16}$ $\qquad$ $AM^2 = (\dfrac{1}{2}-0)^2 + (0-1)^2 = \dfrac{1}{4} + 1 = \dfrac{5}{4}$

$MN^2 = (1-\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{4}-0)^2 = \frac{1}{4}+\frac{1}{16} = \frac{5}{16}$ $\qquad$ $MN^2 + AM^2 = \frac{5}{16}+\frac{5}{4} = \frac{5+20}{16} = \frac{25}{16}$

ومنه : $MN^2 + AM^2 = AN^2$ إذن حسب مبرهنة فيثاغورس المثلث AMN قائما في M .

التمرين 68 صفحة 277

ينسب المستوي إلى معلم $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

(D) مستقيم معادلته $3x-5y=7$ ، أوجد شعاع توجيه للمستقيم (D) ، وعين معامل توجيهه.

الحل :

شعاع التوجيه المستقيم (D) هو $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ ومعامل توجيهه : $\frac{3}{5}$ يمكن أن نعتبر $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\\frac{3}{5}\end{pmatrix}$ شعاع التوجيه .

التمرين 69 صفحة 277

ينسب المستوي إلى معلم $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

(D') مستقيم معادلته $2x\sqrt{3}+2y=-4$ ، أوجد شعاع توجيه للمستقيم (D') ، وعين معامل توجيهه.

الحل :

شعاع التوجيه المستقيم (D') هو $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\2\sqrt{3}\end{pmatrix}$ ومعامل توجيهه : $-\sqrt{3}$ يمكن أن نعتبر $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}$ شعاع التوجيه .

التمرين 70 صفحة 277

ينسب المستوي إلى معلم $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$. (D) مستقيم معادلته $3x=-7$.

– جد شعاع توجيه للمستقيم (D) ، هل للمستقيم (D) معامل توجيه ؟

الحل :

شعاع التوجيه المستقيم (D) هو $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ و يمكن أن نعتبر $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ شعاع التوجيه .

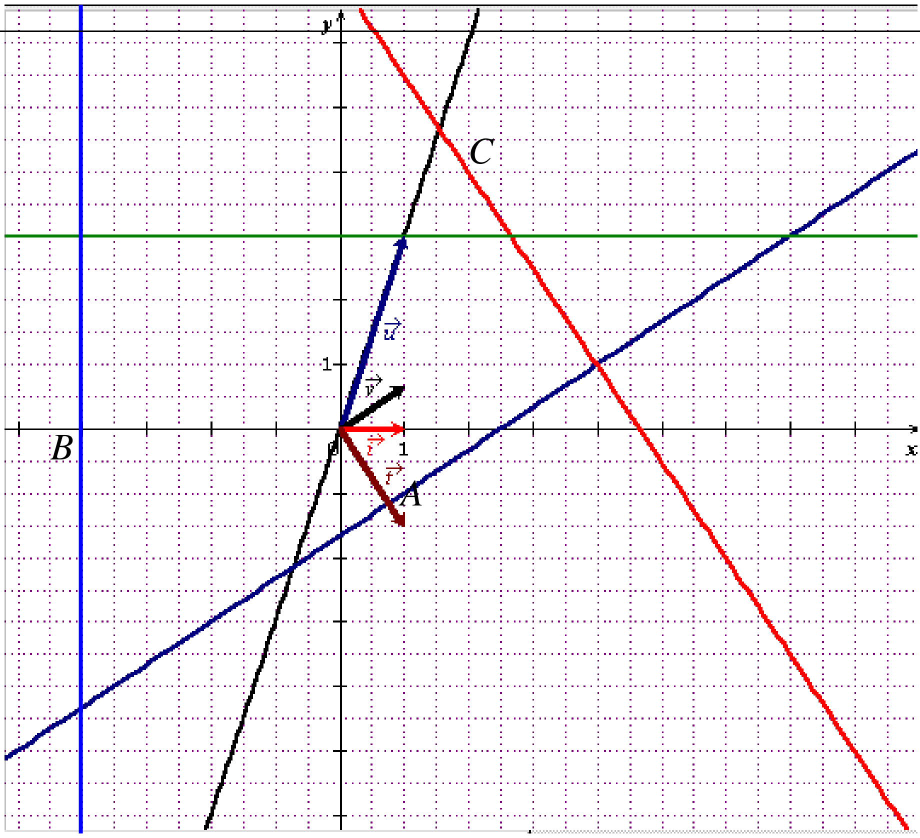
المستقيم (D) يوازي حامل محور التراتيب ليس له معامل توجيه.

التمرين 71 صفحة 277

ينسب المستوي إلى معلم $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$. أرسم المستقيمات (D_1) ، (D_2) ، (D_3) ، (D_4) ، (D_5) حيث :

$(D_1) : y = 3x$ $\qquad$ $(D_2) : y=\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$ $\qquad$ $(D_3) : x = -4$

$(D_4) : y=-\frac{3}{2}x+7$ $\qquad$ $(D_5) : y=3$



الحل :

(D_1) : $y = 3x$

شعاع توجيهه : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

ويشمل النقطة $O(0\ ;\ 0)$

(D_2) : $y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$

شعاع توجيهه : $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}$

ويشمل النقطة $A(1\ ;\ -1)$

(D_3) : $x = -4$

شعاع توجيهه : $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

ويشمل النقطة $B(-4\ ;\ 0)$

(D_4) : $y = -\frac{3}{2}x + 7$ شعاع توجيهه : $\vec{t}\begin{pmatrix}1\\ -\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ ويشمل النقطة $C(2\ ;\ 4)$

(D_5) : $y = 3$ شعاع توجيهه : $\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ويشمل النقطة $D(0\ ;\ 3)$

التمرين 72 صفحة 277

ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$. لتكن النقط $A(1\ ;\ 3)$ ، $B(3\ ;\ 1)$ ، $C(3\ ;\ 4)$.

أكتب معادلة لكل مستقيم من المستقيمات (AB) ، (BC) ، (AC)

على الشكل: $m\,y + p\,x = n$ ، ثم على الشكل : $y = a\,x + b$.

الحل :

- معادلة المستقيم (AB) : لدينا $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-1\\1-3\end{pmatrix}$ أي : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$ وهو شعاع التوجيه للمستقيم (AB)

لتكن $M(x\ ;\ y)$ نقطة من المستوي . $M \in (AB)$ معناه $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-3\end{pmatrix}$ مرتبطان خطيا

ومعناه أن : $-2(x-1) = 2(y-3)$ أي : $2x + 2y - 4 = 0$ معناه $x + y - 2 = 0$ يكافئ $y = -x + 2$

- معادلة المستقيم (BC) : لدينا $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3-3\\4-1\end{pmatrix}$ أي : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ وهو شعاع التوجيه للمستقيم (BC)

معادلة المستقيم (BC) من الشكل $a\,x + b\,y + c = 0$ حيث $b = 0$ و $a = 3$

أي : المعادلة هي : $3x + 0y + c = 0$ بما أن إحداثيتي النقطة B تحقق المعادلة فلدينا :

$3 \times 3 + 0 \times 1 + c = 0$ معناه أن : $c = -9$ وبالتالي : معادلة المستقيم (BC) هي $3x - 9 = 0$ أي : $x = 3$

لا يمكن كتابة معادلة المستقيم (BC) على الشكل : $y = ax + b$ لأن $b = 0$.

- معادلة المستقيم (AC) : لدينا $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3-1\\4-3\end{pmatrix}$ أي : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ وهو شعاع التوجيه للمستقيم (AC)

معادلة المستقيم (AC) من الشكل $ax + by + c = 0$ حيث $b = -2$ و $a = 1$

أي : المعادلة هي : $x - 2y + c = 0$ بما أن إحداثيتي النقطة A تحقق المعادلة فلدينا :

$1 - 2\times 3 + c = 0$ معناه أن : $c = 5$ وبالتالي : معادلة المستقيم (AC) هي $x - 2y + 5 = 0$

ومعناه : $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

التمرين 73 صفحة 277

ينسب المستوي إلى معلم $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$. لتكن النقطة $A(3\,;-2)$ والشعاع $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$.

جد معادلة للمستقيم الذي يشمل النقطة A و $\vec{u}$ شعاع توجيه له .

الحل :

الطريقة 1 :

لتكن $M(x\,;y)$ نقطة من المستوي . لدينا : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-3\\y+2\end{pmatrix}$ و $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

$M \in (AB)$ معناه أن : $-(x-3) = 2(y+2)$ ومعناه أن : $x + 2y + 1 = 0$.

الطريقة 2 : معادلة المستقيم هي من الشكل $ax + by + c = 0$ شعاع التوجيه $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$

ومنه : $b = -2$ و $a = -1$ إذن : $-x - 2y + c = 0$ بما أن المستقيم يشمل A فإن : $-3 + 4 + c = 0$

ومنه : $c = -1$ إذن : المعادلة هي : $-x - 2y - 1 = 0$

الطريقة 3 : $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ شعاع التوجيه للمستقيم كذلك $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ شعاع التوجيه لهذا المستقيم

ومنه : معادلته هي : $y = -\frac{1}{2}x + b$ بما أن المستقيم يشمل A فإن : $-2 = -\frac{1}{2}\times 3 + b$ أي : $b = -\frac{1}{2}$

ومنه : $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

التمرين 74 صفحة 277

ينسب المستوي إلى معلم $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

جد معادلة للمستقيم الذي معامل توجيهه $\frac{1}{2}$ ويقطع محور التراتيب في النقطة التي ترتيبها -5 .

الحل :

المستقيم يقطع محور التراتيب في النقطة التي ترتيبها 5 – معناه أن $(0\ ;\ -5)$ هي إحداثيتي هذه النقطة .

معادلة المستقيم هي : $y=\frac{1}{2}x+b$ ولدينا : $-5=\frac{1}{2}\times 0+b$ أي : $b = -5$ إذن : $y=\frac{1}{2}x-5$

التمرين 75 صفحة 277

ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\vec{i}\ ;\vec{j})$. (D) مستقيم معادلته $y=\sqrt{2}x-3$ أكتب معادلة للمستقيم (D') الذي يوازي المستقيم (D) ويقطع محور الفواصل في النقطة التي فاصلتها 4 .

الحل :

المستقيمان (D) و (D') متوازيان إذن لهما نفس معامل التوجيه $\sqrt{2}$ ومنه: معادلة (D') هي : $y=\sqrt{2}x+b$

إحداثيتي نقطة تقاطع (D') و محور الفواصل هما : $(4\ ;\ 0)$ إذن : $0=\sqrt{2}\times 4+b$ أي : $b=-4\sqrt{2}$

ومنه معادلة (D') هي : $y=\sqrt{2}x-4\sqrt{2}$.

التمرين 76 صفحة 277

ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\vec{i}\ ;\vec{j})$.

أ) جد معادلة للمستقيم (D) الذي معامل توجيهه $-\frac{3}{2}$ ويشمل النقطة $A(-2\ ;\ -3)$.

ب) عين إحداثيي نقطة تقاطع (D) مع محور الفواصل وكذا إحداثيي نقطة تقاطعه مع محور التراتيب .

الحل :

أ) جد معادلة للمستقيم (D) الذي معامل توجيهه $-\frac{3}{2}$ ويشمل النقطة $A(-2\ ;\ -3)$.

(D) : $y=-\frac{3}{2}x+b$ ولدينا : $A\in(D)$ معناه : $-3=-\frac{3}{2}\times(-2)+b$ أي : $b = -6$

ومنه : (D) : $y=-\frac{3}{2}x-6$

ب) عين إحداثيي نقطة تقاطع (D) مع محور الفواصل وكذا إحداثيي نقطة تقاطعه مع محور التراتيب .

إحداثيي نقطة تقاطع (D) مع محور الفواصل: $(-4\ ;\ 0)$ و إحداثيي نقطة تقاطعه مع محور التراتيب: $(0\ ;\ -6)$

التمرين 77 صفحة 277

ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\vec{i}\ ;\vec{j})$.

بين في كل من الحالتين الآتيتين أن المستقيمين (D) و (D') متوازيان .

أ) (D) : $2x-3y=1$ $\quad$ (D') : $-x+\frac{3}{2}y=0$

ب) (D) : $-3x+7=0$ $\quad$ (D') : $x-\frac{\sqrt{3}}{5}=0$

الحل :

أ) $2x-3y=1\ :\ (D)$ $\quad -x+\frac{3}{2}y=0\ :\ (D')$

$(D)\,//\,(D')$ يكافئ : $2\times\frac{3}{2}=(-1)\times(-3)$ أي : $3 = 3$ و هذا صحيح

ب) $-3x+7=0\ :\ (D)$ $\quad x-\frac{\sqrt{3}}{5}=0\ :\ (D')$

لدينا : $ab' = (-3)\times 0 = 0$ و $ba' = 0 \times 1 = 0$ إذن : $ab' = a'b$ معناه : $(D)\,//\,(D')$

التمرين 78 صفحة 278 ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\vec{i}\ ;\vec{j})$

في كل مما يأتي حل جملة المعادلتين ، ثم مثل الحل بيانيا :

أ) $\begin{cases} x+y=6 \\ -2x+y=0 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} x\sqrt{2}+\frac{1}{2}y=2-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ x\sqrt{6}-2y=0 \end{cases}$ ج) $\begin{cases} -7x+11y=43 \\ 6x+y=-16 \end{cases}$ د) $\begin{cases} -x+y=-2 \\ 7x+y=22 \end{cases}$

الحل :

أ) $\begin{cases} x+y=6 \\ -2x+y=0 \end{cases} \ldots (S)$

- **طريقة التعويض :** (S) تكافئ : $\begin{cases} y=-x+6 \\ y=2x \end{cases}$ بما أن $-1\neq 2$ فللجملة (s) حل وحيد .

و (S) تكافئ : $\begin{cases} 2x=-x+6 \\ y=2x \end{cases}$ ومعناه أن : $\begin{cases} 3x=6 \\ y=2x \end{cases}$ أي : $\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$ وبالتالي : $s=\{(2\ ;\ 4)\}$

- **طريقة الجمع :** (S) تكافئ : $\begin{cases} y=-x+6 \\ y=2x \end{cases}$ بطرح طرف من طرف للمعادلتين نجد $3x-6=0$

معناه $x = 2$ و (S) تكافئ : $\begin{cases} 2y=-2x+12 \\ y=2x \end{cases}$ بجمع طرف من طرف للمعادلتين نجد $3y = 12$ معناه

أن : $y = 4$ وبالتالي : $s=\{(2\ ;\ 4)\}$

- **طريقة المحدد :** $\begin{cases} x+y=6 \\ -2x+y=0 \end{cases} \ldots (S)$

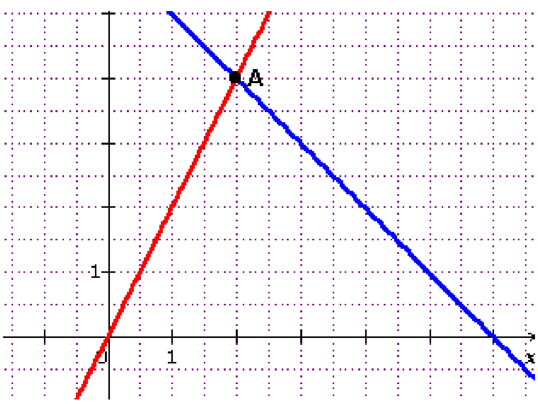
$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=1\times1-1(-2)=3$ ومنه : $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$ فللجملة (S) حل وحيد $(x\ ;\ y)$ حيث :

$x=\frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{3}=\frac{6}{3}=2$ و $y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}}{3}=\frac{12}{3}=4$

وبالتالي : $s=\{(2\ ;\ 4)\}$

نضع : $(D)\ :\ x+y=6$

و$(D')\ :\ -2x+y=0$



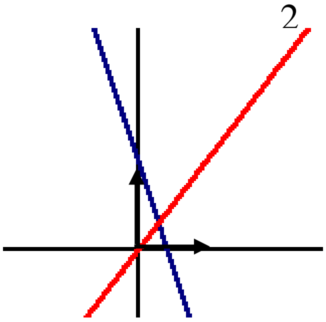
ب) $\begin{cases} x\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}y=2-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ x\sqrt{6}-2y=0 \end{cases}$ لدينا :

$$\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{2} \\ \sqrt{6} & -2 \end{vmatrix} = -2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{-\sqrt{2}(4+\sqrt{3})}{2}$$ المحدد غير معدوم ومنه الجملة تقبل حلا وحيد $(x\ ;\ y)$ حيث :

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2-\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 \end{vmatrix}}{\frac{-\sqrt{2}(4+\sqrt{3})}{2}}=\frac{2(-4+\sqrt{3})}{-\sqrt{2}(4+\sqrt{3})}=\frac{-\sqrt{2}(4-\sqrt{3})(4-\sqrt{3})}{-(4+\sqrt{3})(4-\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{2}(16-8\sqrt{3}+3)}{16-3}$$

$$x=\frac{19\sqrt{2}-8\sqrt{6}}{13}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 2-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{6} & 0 \end{vmatrix}}{\frac{-\sqrt{2}(4+\sqrt{3})}{2}}=\frac{-2(2\sqrt{6}-\frac{3}{2}\sqrt{2})}{-\sqrt{2}(4+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{6}(4-\sqrt{3})(4-\sqrt{3})}{\sqrt{2}(4+\sqrt{3})(4-\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{3}(16-8\sqrt{3}+3)}{16-3}$$

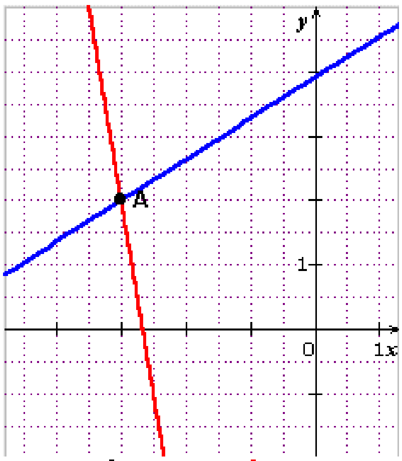


$y=\dfrac{19\sqrt{3}-24}{13}$ وبالتالي : $s=\left\{\left(\dfrac{19\sqrt{2}-8\sqrt{6}}{13}\ ;\ \dfrac{19\sqrt{3}-24}{13}\right)\right\}$.

نضع : (D) : $x\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}y=2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

و(D') : $x\sqrt{6}-2y=0$

ج) $\begin{cases} -7x+11y=43 \\ 6x+y=-16 \end{cases}$ لدينا : $\begin{vmatrix} -7 & 11 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}=-7-66=-73$



إذن للجملة حل وحيد $(x\ ;\ y)$ حيث :

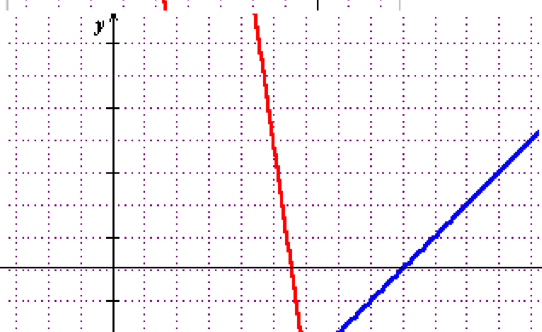
$x=\dfrac{\begin{vmatrix} 43 & 11 \\ -16 & 1 \end{vmatrix}}{-73}$ و $y=\dfrac{\begin{vmatrix} -7 & 43 \\ 6 & -16 \end{vmatrix}}{-73}$ أي :

$x=\dfrac{43+176}{-73}=-\dfrac{219}{73}=-3$ و $y=\dfrac{112-258}{-73}=\dfrac{146}{73}=2$

وبالتالي : $s=\{(-3\ ;\ 2)\}$

نضع : (D) : $-7x+11y=43$

و(D') : $6x+y=-16$



د) $\begin{cases} -x+y=-2 \\ 7x+y=22 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} y=x-2 \\ y=-7x+22 \end{cases}$

بما أن : $1 \neq -7$ فإن للجملة حل وحيد .

$\begin{cases} -x+y=-2 \\ 7x+y=22 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} y=x-2 \\ x-2=-7x+22 \end{cases}$

ومعناه أن : $\begin{cases} y=x-2 \\ 8x=24 \end{cases}$ وتكافئ أن : $\begin{cases} x=3 \\ y=3-2 \end{cases}$

وبالتالي : $s=\{(3\,;1)\}$

التمرين 79 صفحة 278

لتكن جملة المعادلتين (S) : $\begin{cases} 3x-y=5 \\ kx+y=11 \end{cases}$ ما هي القيم الممكنة للعدد k بحيث يكون للجملة (S) حل وحيد :

الحل :

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ k & 1 \end{vmatrix} = 3\times 1-(-1)k=k+3$$

للجملة (S) حل وحيد يكافئ أن : $k+3\neq 0$ معناه أن : $k\neq -3$ أي : $k\in\mathbb{R}-\{-3\}$

التمرين 80 صفحة 278

لتكن الجملة (S) : $\begin{cases} x-\frac{1}{2}y=3 \\ -6x+3y=k \end{cases}$

أ) بين أن الجملة (S) إما أنها لا تقبل حلا وإما أن لها عددا غير منته من الحلول.

ب) ما هي القيم الممكنة للعدد k بحيث يكون للجملة (S) ما لانهاية من الحلول.

الحل :

أ) $\begin{cases} x-\frac{1}{2}y=3 \\ -6x+3y=k \end{cases}$ معناه أن : $\begin{cases} y=2x-6 \\ y=2x+\frac{1}{3}k \end{cases}$ بما أن للمعدلتين المختصرين نفس معامل x فإن الجملة (S) إما أنها لا تقبل حلا وإما أن لها عددا غير منته من الحلول.

- طريقة أخرى : $\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -6 & 3 \end{vmatrix}=3-3=0$ إذن الجملة (S) إما لا تقبل حلا وإما لها ما لانهاية من الحلول.

ب) للجملة (S) ما لانهاية من الحلول معناه أن : $\frac{1}{3}k=-6$ أي : $k = -18$.

التمرين 81 صفحة 278

ينسب المستوي إلى معلم $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$. نعتبر النقط $A(0\ ;\ 5)$ ، $B(6\ ;\ 2)$ ، $C(7\ ;\ 4)$ ، $D(-2\ ;\ 1)$.

أ) بيّن أن المستقيمين (AB) و (CD) متقاطعان .

ب) أحسب إحداثيتي نقطة تقاطعهما ، وتحقق من ذلك بيانيا.

الحل :

أ) بيّن أن المستقيمين (AB) و (CD) متقاطعان .

لدينا : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6-0\\2-5\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2-7\\1-4\end{pmatrix}$ معناه $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-9\\-3\end{pmatrix}$

ولدينا : $6\times(-3)=-18$ و $(-9)\times(-3)=27$ إذن $(-9)\times(-3)\neq 6\times(-3)$ ومنه الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ غير مرتبطان خطيا وبالتالي : المستقيمان (AB) و (CD) متقاطعان في نقطة واحدة.

ب) أحسب إحداثيتي نقطة تقاطعهما ، وتحقق من ذلك بيانيا.

لدينا : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}$ ومنه : $\overrightarrow{AB}=6\vec{u}$ حيث : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ وبالتالي : (AB) : $y=-\frac{1}{2}x+\alpha$

$B\in(AB)$ إذن : $2=-\frac{1}{2}6+\alpha$ معناه أن $\alpha=5$ وبالتالي : (AB) : $y=-\frac{1}{2}x+5$

لدينا : $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-9\\-3\end{pmatrix}$ ومنه : $\overrightarrow{CD}=-9\vec{v}$ حيث : $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ وبالتالي : (CD) : $y=\frac{1}{3}x+\beta$ ، $C\in(CD)$ إذن :

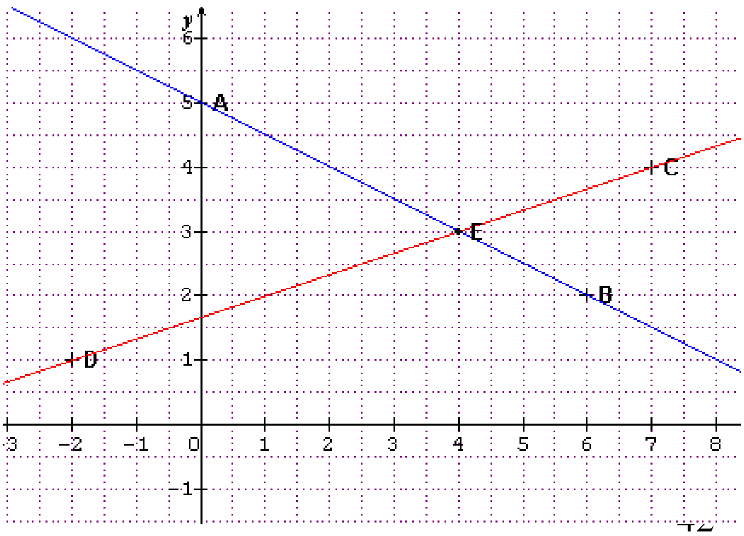
$4=\frac{1}{3}\times 7+\beta$ معناه $\beta=\frac{5}{3}$

وبالتالي: (CD) : $y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$

نسمي $E(x\ ;\ y)$ نقطة تقاطع المستقيمين (AB) و (CD) إذن : $y=-\frac{1}{2}x+5$ و $y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$

معناه $-\frac{1}{2}x+5=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$ و $y=-\frac{1}{2}x+5$ يكافئ أن : $\frac{5}{6}x=\frac{10}{3}$ و $y=-\frac{1}{2}x+5$

معناه أن : $x=4$ و $y=3$ إذن : $E(4\ ;\ 3)$.



التمرين 82 صفحة 278

نريد حل جملة المعادلتين (S) : $\begin{cases} 2z^2 - t^2 = -1 \\ 3z^2 + t^2 = 21 \end{cases}$

أ) بوضع $z^2 = x$ و $t^2 = y$ أكتب جملة معادلتين (S') تكافئ (S) .

ب) حل جملة المعادلتين (S') ثم استنتج حل الجملة (S) .

الحل :

أ) بوضع $z^2 = x$ و $t^2 = y$ أكتب جملة معادلتين (S') تكافئ (S) .

(S') : $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ 3x + y = 21 \end{cases}$ وتكافئ : $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ 3x + y = 21 \end{cases}$

ب) حل جملة المعادلتين (S') ثم استنتج حل الجملة (S) .

(S') تكافئ : $\begin{cases} 5x = 20 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$ (S') تكافئ : $\begin{cases} x = 4 \\ y = 9 \end{cases}$

(S) تكافئ : $\begin{cases} z^2 = 4 \\ t^2 = 9 \end{cases}$ (S) تكافئ : $\begin{cases} z = 2 \text{ أو } z = -2 \\ t = 3 \text{ أو } t = -3 \end{cases}$

إذن : مجموعة حلول الجملة (S) هي : $s = \{(-2\ ;\ -3)\ ,\ (-2\ ;\ 3)\ ,\ (2\ ;\ -3)\ ,\ (2\ ;\ 3)\}$

التمرين 83 صفحة 278

نريد حل جملة المعادلتين (S) : $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{7}{y-2} = 6 \\ \dfrac{7}{x} - \dfrac{3}{y-2} = 16 \end{cases}$

ج)بين أن $x \neq 0$ وأن $y \neq 2$.

د) بوضع $z = \dfrac{1}{x}$ و $t = \dfrac{1}{y-2}$ أكتب جملة معادلتين (S') تكافئ (S) .

ه) حل جملة المعادلتين (S') ثم استنتج حل الجملة (S) .

الحل :

أ) بين أن $x \neq 0$ وأن $y \neq 2$.

الجملة (S) لها معنى إذا كان $x \neq 0$ و $y \neq 2$

ب) بوضع $z = \dfrac{1}{x}$ و $t = \dfrac{1}{y-2}$ أكتب جملة معادلتين (S') تكافئ (S) .

(S') : $\begin{cases} z + 7t = 6 \\ 7z - 3t = 16 \end{cases}$

ج)حل جملة المعادلتين (S') ثم استنتج حل الجملة (S) .

(S') تكافئ $\begin{cases} 7z+49t=42 \\ 7z-3t=16 \end{cases}$ (S') تكافئ $\begin{cases} 52t=26 \\ z=-7t+6 \end{cases}$ (S') تكافئ $\begin{cases} t=\frac{1}{2} \\ z=-\frac{7}{2}+6 \end{cases}$ (S') تكافئ $\begin{cases} t=\frac{1}{2} \\ z=\frac{5}{2} \end{cases}$

(S) تكافئ $\begin{cases} \frac{1}{x}=\frac{5}{2} \\ \frac{1}{y-2}=\frac{1}{2} \end{cases}$ (S) تكافئ $\begin{cases} x=\frac{2}{5} \\ y=4 \end{cases}$ ومنه مجموعة حلول الجملة (S) هي : $s=\left\{(\frac{5}{2}\ ;\ 4)\right\}$

التمرين 84 صفحة 278

عددان مجموعهما 15 ، إذا أضفنا إلى كل منهما 3 صار أحدهما نصف الآخر . جد هذين العددين.

الحل :

نسمي هذين العددين x و y

لدينا مجموعهما 15 معناه $x+y=15$

ولدينا : $x+3=\frac{1}{2}(y+3)$ أو $y+3=\frac{1}{2}(x+3)$

ومنه جملة المعادلتين التالية : $\begin{cases} x+y=15 \\ 2x+6=y+3 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x+y=15 \\ 2y+6=x+3 \end{cases}$ معناه :

$\begin{cases} y=-x+15 \\ 2x+3=y \end{cases}$ أو $\begin{cases} x=-y+15 \\ 2y+3=x \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} y=-x+15 \\ 2x+3=-x+15 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x=-y+15 \\ 2y+3=-y+15 \end{cases}$

ومعناه أن : $\begin{cases} x=4 \\ y=11 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x=11 \\ y=4 \end{cases}$ مجموعة الحلول هي : $s=\{(4\ ;\ 11)\ ,(11\ ;\ 4)\ \}$

التمرين 85 صفحة 278

بمناسبة انتقاله إلى الثانوية نظم يوسف وليمة دعا إلها تلاميذ قسمه . لاحظ أنه لو يجلس كل 5 تلاميذ حول طاولة فإن 3 منهم لا يجد لهم أماكن الجلوس ، ولو يجلس كل 6 تلاميذ حول طاولة فإن 4 أماكن تبقى شاغرة.

ما هو عدد التلاميذ الذين دعاهم يوسف ؟ و ما هو عدد الطاولات ؟

الحل :

نسمي x عدد التلاميذ و y عدد الطاولات .

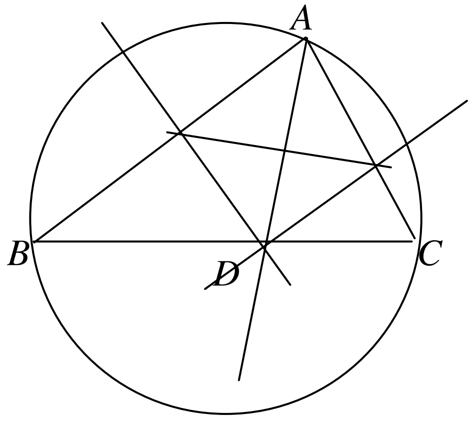
لو يجلس كل 5 تلاميذ حول طاولة فإن 3 منهم لا يجد لهم أماكن الجلوس معناه أن $x = 5\,y + 3$.

ولو يجلس كل 6 تلاميذ حول طاولة فإن 4 أماكن تبقى شاغرة معناه : $x = 6y - 4$

ومنه الجملة $\begin{cases} x=5y+3 \\ x=6y-4 \end{cases}$ معناه أن : $\begin{cases} x=5y+3 \\ 5y+3=6y-4 \end{cases}$ ويكافئ : $\begin{cases} x=38 \\ y=7 \end{cases}$

التمرين 86 صفحة 278

ABC مثلث أطوال أضلاعه $AB = 9\ cm$ ، $BC = 10\ cm$ ، $AC = 6\ cm$. منصف الزاوية الرأس A يقطع $[BC]$ في النقطة D . أحسب الطولين BD و CD .



الحل :

$$BD + CD = BC = 10$$