الهندسة المستوية

الكفاءات المستهدفة

1. متوازي الأضلاع ومتوازيات الأضلاع الخاصة : المستطيل ، المربع ، المعين .
2. المثلثات الخاصة ، والمستقيمات الخاصة في مثلث .
3. الزوايا والدائرة .
4. مبرهنتا طاليس و فيثاغورس وعكس كل منهما ، و توظيفهما في حل مسائل هندسية .
5. النسب المثلثية .
6. المثلثات المتقايسة والمثلثات المتشابهة .
7. التحويلات النقطية .

الهندسة المستوية

1. متوازي الأضلاع:

الكفاءات المستهدفة

متوازي الأضلاع ومتوازيات الأضلاع الخاصة : المستطيل ، المربع ، المعين .

نشاط 1 :

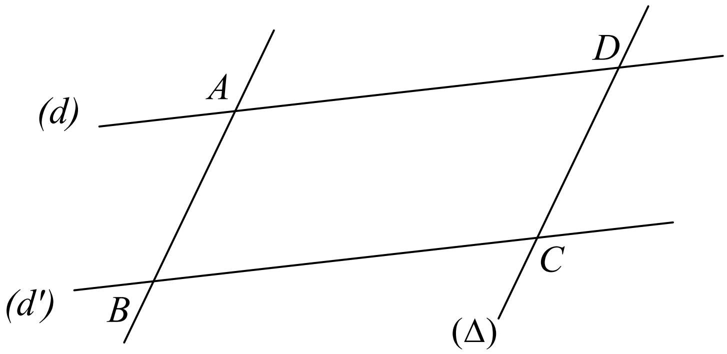
أرسم مستقيمين متوازيين تماما (d) و (d') ، علم النقطتين A و B على المستقيمين (d) و (d') على الترتيب.

أرسم مستقيم (Δ) يوازي تماما المستقيم (AB) .

المستقيم (Δ) يقطع (d) و (d') في النقطتين

D و C على الترتيب.

ما هي طبيعة الرباعي $ABCD$



حل النشاط 1 :

لدينا : $(AD) // (BC)$ و $(AB) // (CD)$

إذن : الرباعي $ABCD$ هو متوازي الأضلاع.

التعريف : متوازي الأضلاع هو رباعي حاملا كلّ ضلعين متقابلين فيه ، متوازيين .

$ABCD$ متوازي الأضلاع معناه $[(AB) // (CD)$ و $(AD) // (BC)]$

نشاط 2 :

أ) علم على ورقة غير مسطرة ثلاث نقط A ، B ، O ليست في استقامية.

ب) أنشئ النقطتين C و D نظيرتي A و B بالنسبة إلى النقطة O على الترتيب.

ج) ما هي طبيعة الرباعي $ABCD$ ؟

د) تحقق أن :

1. القطعتين $[AC]$ و $[BD]$ متناصفتين .
2. كل ضلعين متقابلين متقايسان .
3. كل زاويتين متقابلتين متقايستان .

ه) علم النقط A' ، B' ، C' ، D' من $[AB)$ و $[BC)$ و $[CD)$ و$[DA)$ على الترتيب حيث النقط A' ، B' ، C' ، D' لا تنتمي إلى أضلاع الرباعي $ABCD$ و $BA' = CB' = DC' = AD'$

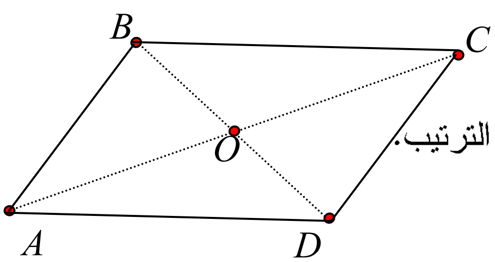
و) ما نوع الرباعي $A'B'C'D'$ ؟ (إرشاد: يمكن البدء بنوع كلّ من الرباعيين $A'CC'A$ و $D'BB'D$).

حل النشاط 2 :

أ. تعليم النقط : A ، B ، O ليست في استقامية.

ب. إنشاء النقطتين C و D نظيرتي A و B بالنسبة إلى النقطة O على الترتيب.

ج. طبيعة الرباعي $ABCD$



لدينا المستقيمان (AB) و (DC) متناظران بالنسبة إلى O إذن هما متوازيان

وكذلك المستقيمان (AD) و (BC) متناظران بالنسبة إلى O إذن هما متوازيان

وبالتالي الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع .

د. التحقيق

1) بما أن الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع فإن قطراه $[AC]$ و $[BD]$ متناصفين

2) بما أن الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع فإن $AB = CD$ و $BC = AD$

3) بما أن الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع فإن $\hat{A} = \hat{C}$ و $\hat{B} = \hat{D}$

ه. تعليم النقط A' ، B' ، C' ، D' من $[AB)$

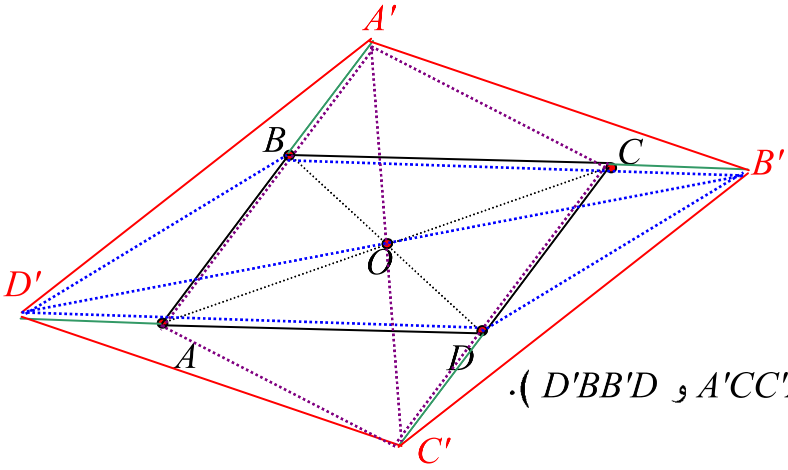
و $[BC)$ و $[CD)$ و $[DA)$ على الترتيب

حيث النقط A' ، B' ، C' ، D' لا تنتمي

إلى أضلاع الرباعي $ABCD$

و $BA' = CB' = DC' = AD'$

و) ما نوع الرباعي $A'B'C'D'$ ؟



(إرشاد: يمكن البدء بنوع كلّ من الرباعيين $A'CC'A$ و $D'BB'D$).

لدينا : $(AB) // (CD)$ ومنه $(AA') // (CC')$

ولدينا : $AB = CD$ و $BA' = DC'$ إذن $AA' = CC'$ وبالتالي الرباعي $A'CC'A$ متوازي أضلاع

إذن قطراه $[A'C']$ و $[AC]$ لهما نفس المنتصف O .

لدينا : $(BC) // (AD)$ ومنه $(BB') // (D'D)$

ولدينا : $AD = BC$ و $AD' = CB'$ إذن $DD' = BB'$ وبالتالي الرباعي $D'BB'D$ متوازي أضلاع

إذن قطراه $[D'B']$ و $[BD]$ لهما نفس المنتصف O .

ولدينا : القطران $[AC]$ و $[BD]$ للمتوازي الأضلاع $ABCD$ لهما نفس المنتصف O

إذن : القطعتان $[A'C']$ و $[D'B']$ لهما نفس المنتصف O وبالتالي الرباعي $A'B'C'D'$ هو متوازي أضلاع.

خواص : من أجل كل رباعي $ABCD$:

1) $[AC]$ و $[BD]$ متناصفان معناه $ABCD$ متوازي الأضلاع .

2) [$AB = DC$ و $AD = BC$] معناه $ABCD$ متوازي الأضلاع .

3) [$AB = DC$ و $(AB)//(DC)$] معناه $ABCD$ متوازي الأضلاع .

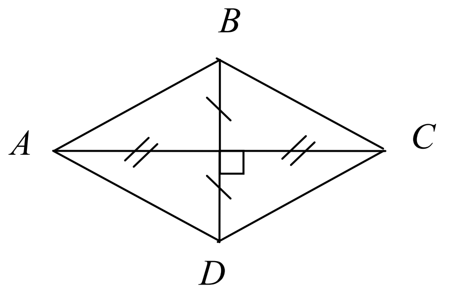
4) [$A\hat{B}C = A\hat{D}C$ و $B\hat{A}D = B\hat{C}D$] معناه $ABCD$ متوازي الأضلاع .

نشاط 3 :

1) أنشئ باستعمال المدور والمسطرة فقط متوازي أضلاع قطراه متعامدان، تحقق أن أضلاعه متقايسة، ماذا نسمي متوازي الأضلاع في هذه الحالة ؟

2) أنشئ متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة ، بين أن كل زواياه قائمة ، ماذا نسمي متوازي الأضلاع في هذه الحالة ؟ متى يكون مربعا ؟

حل النشاط :



1) إنشاء متوازي أضلاع قطراه متعامدان

$ABCD$ متوازي أضلاع إذن $[AC]$ و $[BD]$ متناصفتان

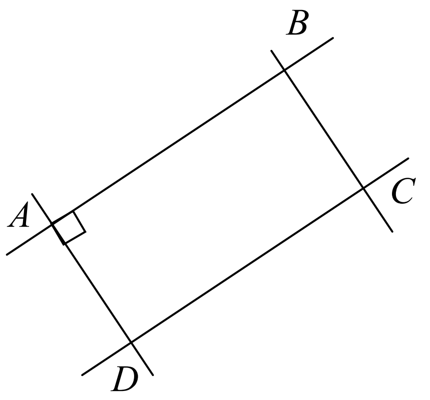
ولدينا قطراه متعامدان إذن (BD) هو محور القطعة $[AC]$

و (AC) هو محور القطعة $[BD]$

وبالتالي المثلث ABD متساوي الساقين $AB = AD$

بما أن $ABCD$ متوازي أضلاع فإن : $AB = BC = CD = DA$

متوازي أضلاع $ABCD$ يسمى معين .



2) إنشاء متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة

$ABCD$ متوازي أضلاع إذن $(AB) // (DC)$ و $(BC) // (AD)$

متوازي أضلاع $ABCD$ إحدى زواياه قائمة إذن $(AB) \perp (AD)$

ومن التوازي نستنتج أن $(AB) \perp (BC)$ و $(BC) \perp (CD)$

و $(CD) \perp (AD)$

في هذه الحالة متوازي أضلاع $ABCD$ يسمى مستطيل.

وإذا كان ضلعان متتاليان منه متقايسان فإن $ABCD$ يكون مربعا .

متوازيات الأضلاع الخاصة :

المعين : هو متوازي أضلاع له ضلعان متتاليان متقايسان .

1. $ABCD$ معين معناه [$(AC) \perp (BD)$ و $[AC]$ ، $[BD]$ متناصفان]
2. $ABCD$ معين معناه [$AB = BC = CD = DA$]
3. إذا كان $ABCD$ معينا فإن [(AC) ينصف كلا من الزاويتين $B\hat{A}D$ و $B\hat{C}D$ و (BD) ينصف كلا من الزاويتين $A\hat{B}C$ و $A\hat{D}C$]

المستطيل : هو متوازي أضلاع له زاوية قائمة .

1. $ABCD$ مستطيل معناه [$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$]
2. $ABCD$ مستطيل معناه [$AC = BD$ و $[AC]$ ، $[BD]$ متناصفان]

المربع : هو متوازي أضلاع له ضلعان متتاليان متقايسان وزاوية قائمة.

1. $ABCD$ مربع معناه [$\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=\hat{D}=90^{\circ}$ و $AB=BC=CD=DA$]

2. $ABCD$ مربع معناه [$AC=BD$ و $(BD) \perp (AC)$ و $[AC]$ ، $[BD]$ متناصفان]

تمرين : رقم 32 صفحة 242 (بعد تصحيحه)

$ABCD$ متوازي أضلاع حيث $AB \neq AD$.

أ) النقطتان A' و C' هما المسقطان العموديان للنقطتين A و C على (BD) على الترتيب.

بين أن $AA'CC'$ متوازي أضلاع.

ب) M نقطة من $[BC']$ و N نقطة من القطعة $[A'D]$ حيث: $BM = DN$

ما هي طبيعة الرباعي $AMCN$.

حل التمرين :

أ) نقارن بين المثلثين القائمين ADA' و BCC' نجد $AA' = CC'$

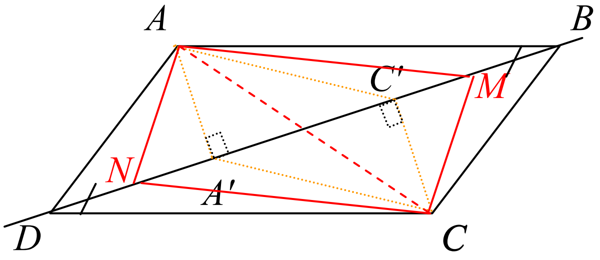
ولدينا $(AA') // (CC')$ لأنّهما عموديين على نفس المستقيم (BD)

وبالتالي : $AA'CC'$ متوازي أضلاع.

ب) نسمي O منتصف كل من $[AC]$ و $[BD]$

ولدينا : $BM = DN$ إذن O منتصف كل من $[AC]$ و $[MN]$

إذن الرباعي $AMCN$ متوازي أضلاع .



2. المثلثات والمستقيمات الخاصة:

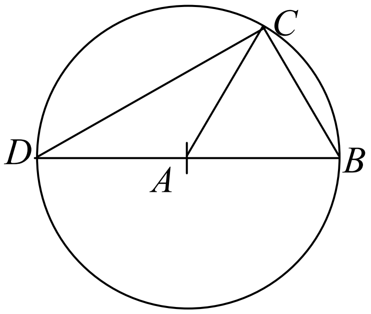
الكفاءات المستهدفة

المثلثات الخاصة ، والمستقيمات الخاصة في مثلث .

نشاط 4 : أرسم دائرة مركزها A ، علم على هذه الدائرة النقط B ، C ، D حيث $BC = AB$ و D نظيرة B بالنسبة إلى النقطة A .

ما هي طبيعة كل من المثلثات : ACD ، ABC ، BCD

عين القياسين التاليين : BAC و BCD .



حل النشاط :

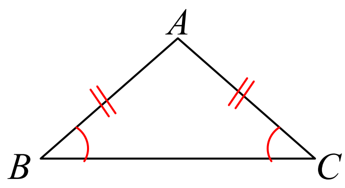
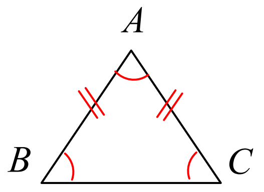
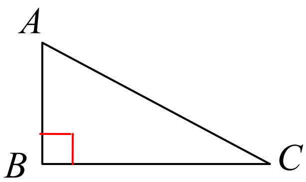
المثلث ACD متساوي الساقين ، $AC = AD$ نصفي قطر الدائرة

المثلث ABC متقايس الأضلاع ، $AC = AB = BC$.

المثلث BCD قائم في C .

$BAC = 60^\circ$ و $BCD = 90^\circ$

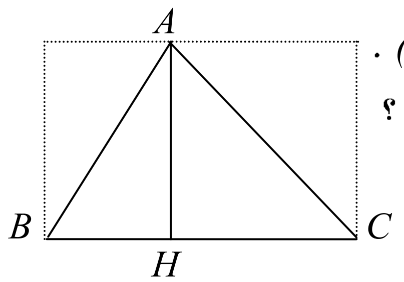
- **المثلثات الخاصة :**

المثلث متساوي الساقين	المثلث متقايس الأضلاع	المثلث القائم
		
فيه ضلعان متقايسان	أضلاعه متقايسة	فيه زاوية قائمة
$A\hat{B}C = A\hat{C}B$	$A\hat{B}C = A\hat{C}B = B\hat{A}C = 60^\circ$	$A\hat{B}C = 90^\circ$

- **المستقيمات الخاصة في مثلث :**

نشاط 5 : ABC مثلث كيفي وH المسقط العمودي للنقطة A على (BC) .

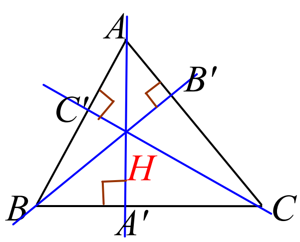
أحسب مساحة لكل من المثلثين ABH و ACH . ما هي مساحة المثلث ABC ؟



حل النشاط :

$s(ABH) = \frac{1}{2}AH.HB$ ، $s(ACH) = \frac{1}{2}AH.HC$

لدينا : $BH + CH = BC$ ومنه : $s(ABC) = \frac{1}{2}AH.BC$



- **الارتفاع** في مثلث هو المستقيم الذي يشمل أحد رؤوس المثلث ويعامد حامل الضلع المقابل له
- ارتفاعات مثلث متقاطعة في نقطة واحدة
- مساحة مثلث : $s(ABC) = \frac{1}{2}AA'.BC$ ، $s(ABC) = \frac{1}{2}BB'.AC$ ، $s(ABC) = \frac{1}{2}CC'.AB$

نشاط 6 :

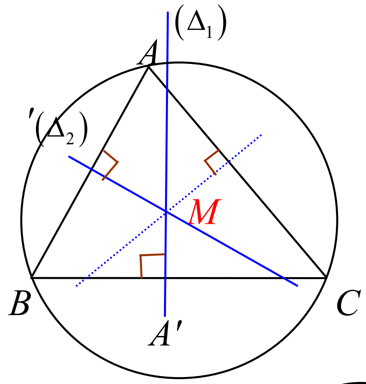
أرسم مثلثا كيفيا ABC ، و (Δ_1) ، (Δ_2) محورا الضلعين $[BC]$ و $[AB]$ على الترتيب يتقاطعان في النقطة M .

أ) بين أن محور الضلع $[AC]$ يشمل النقطة M .

ب) عين مركز الدائرة التي تشمل النقط A ، B ، C ، وارسمها.

ج) عين موقع النقطة M في الحالة التي يكون فيها المثلث ABC قائما في A .

د) أين تقع النقطة M في الحالة التي يكون فيها المثلث ABC منفرج الزاوية .

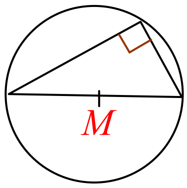


حل النشاط :

لدينا (Δ_1) محور $[BC]$ إذن : $MB = MC$

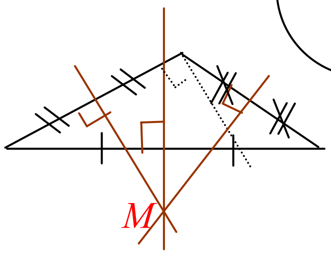
لدينا (Δ_2) محور $[AB]$ إذن : $MA = MB$

ومنه : $MA = MC$ معناه أن M هي نقطة من محور القطعة $[AC]$.



لدينا $MA = MB = MC$ وبالتالي مركز الدائرة التي تشمل النقط A ، B ، C هو النقطة M .

موقع النقطة M في الحالة التي يكون فيها المثلث ABC قائما في A هو منتصف القطعة $[BC]$



تقع النقطة M في الحالة التي يكون فيها المثلث ABC منفرج الزاوية ، خارج المثلث .

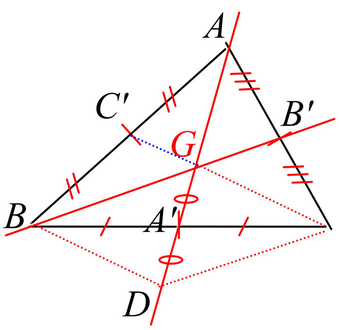
- **المحور** هو محور أحد أضلاعه.
- محاور مثلث متقاطعة في نقطة واحدة .
- نقطة تقاطع محاور مثلث هي مركز الدائرة المحيطة به (التي تشمل رؤوس المثلث)

نشاط 7 :

ABC مثلث كيفي ، A' ، B' ، C' منتصفات القطع $[BC]$ ، $[AC]$ ، $[AB]$ على الترتيب.

1. ماذا نسمي المستقيمين (AA') و (BB') في المثلث ABC ؟
2. المستقيمان (AA') و (BB') يتقاطعان في النقطة G ، أرسم النقطة D نظيرة النقطة G بالنسبة إلى A' .
3. ما هي طبيعة الرباعي $BDCG$ ؟
4. استنتج $DC = 2\,GB'$ وأن النقطة G هي منتصف القطعة $[AD]$ و $(GC') \,//\, (BD)$.
5. بين أن النقط C ، G ، C' في استقامية .
6. بين أن $AG = 2\,GA'$ و $BG = 2\,GB'$ و $CG = 2\,GC'$.

حل النشاط:



نسمي المستقيمين (AA') و (BB') المتوسطان في المثلث ABC .

القطعتان $[BC]$ و $[GD]$ متناصفتان إذن الرباعي $BDCG$ متوازي أضلاع .

لدينا في المثلث ACD ، $(GB') \,//\, (DC)$ ومنه حسب مبرهنة طاليس

$\dfrac{AB'}{AC} = \dfrac{AG}{AD} = \dfrac{GB'}{DC}$ ولدينا B' منتصف القطعة $[AC]$ إذن : $\dfrac{AB'}{AC} = \dfrac{1}{2}$

إذن $DC = 2\,GB'$ و $AD = 2\,AG$ ومنه النقطة G هي منتصف القطعة $[AD]$.

في المثلث ABD ، النقطة G منتصف القطعة $[AD]$ و C' منتصف القطعة $[AB]$ إذن : $(GC') // (BD)$.

الرباعي $BDCG$ متوازي أضلاع إذن $(GC) // (BD)$ ولدينا $(GC') // (BD)$ إذن $(GC') // (GC)$

وهذان المستقيمان لهما نقطة مشتركة G إذن النقط C ، G ، C' في استقامية .

لدينا : $AG = GD$ و $GD = 2\ GA'$ إذن $AG = 2\ GA'$

لدينا : $BG = DC$ و $DC = 2\ GB'$ إذن $BG = 2\ GB'$

في المثلث ABD ، $(GC') // (BD)$ ومنه $\frac{AC'}{AB} = \frac{AG}{AD} = \frac{GC'}{BD} = \frac{1}{2}$ ، ومنه : $BD = 2\ GC'$

بما أن $BD = GC$ فإن : $GC = 2\ GC'$

- **المتوسط** في مثلث هو المستقيم الذي يشمل أحد رؤوس المثلث ومنتصف الضلع المقابل له.
- متوسطات مثلث متقاطعة في نقطة واحدة هي مركز ثقله .
- (AA') و (BB') و (CC') متوسطات المثلث ABC و G مركز ثقله لدينا :
- $AG = 2\ GA'$ و $BG = 2\ GB'$ و $CG = 2\ GC'$.

نشاط 8 :

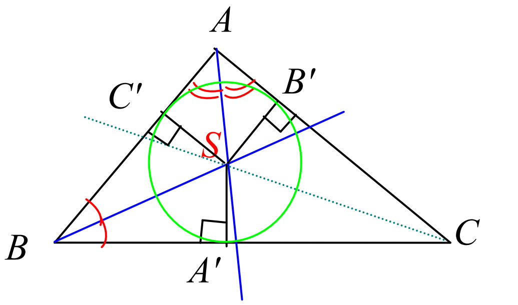
ABC مثلث كيفي ، المنصفان الداخليان لزاويتي الرأسين A و B يتقاطعان في النقطة S .

أ) النقط A' ، B' ، C' المساقط العمودية للنقطة S على المستقيمات (BC) ، (AC) ، (AB) على الترتيب .
بين $SA' = SB' = SC'$

ب) بين أن المنصف الداخلي لزاوية الرأس C يشمل النقطة S .

ج) عين مركز الدائرة التي تمس أضلاع المثلث ABC من الداخل وارسمها .

حل النشاط :



أ) نقارن بين المثلثين القائمين ASB' و ASC' لدينا
SA وتر مشترك ، $\widehat{SAB'} = \widehat{SAC'}$ إذن : $SB' = SC'$.
نقارن بين المثلثين القائمين BSA' و BSC' لدينا
SB وتر مشترك ، $\widehat{SBA'} = \widehat{SBC'}$ إذن : $SA' = SC'$.
وبالتالي : $SA' = SB' = SC'$

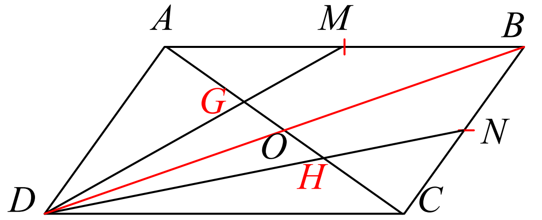
ب) نقارن بين المثلثين القائمين CSB' و $A'SC$ لدينا SC وتر مشترك ، $SA' = SB'$ إذن $\widehat{SCB'} = \widehat{SCA'}$
وبالتالي (SC) هو المنصف الداخلي للزاوية ذات الرأس C .

ج) لدينا : $SA' = SB' = SC'$ إذن S هي مركز الدائرة التي تشمل النقط A' ، B' ، C' .
بما أن $(BC) \perp (SA')$ و $(AC) \perp (SB')$ و $(BA) \perp (SC')$
إذن (BC) و (AC) و (BA) هي مماسات لهذه الدائرة .

- **المنصف** في مثلث هو منصف إحدى زواياه .
- المنصفات الداخلية في مثلث متقاطعة في نقطة واحدة .
- نقطة تقاطع المنصفات هي مركز الدائرة المرسومة داخل هذا المثلث (أي التي تمس أضلاع المثلث من الداخل) .

تمرين : رقم 41 صفحة 242

$ABCD$ متوازي الأضلاع ، النقطتان M و N منتصفا القطعتين $[AB]$ و $[BC]$ على الترتيب.



$[DM]$ و $[DN]$ يقطعان $[AC]$ في النقطتين G و H على الترتيب.

بين أن : $AG = GH = HC$.

حل التمرين :

القطران $[AC]$ و $[BD]$ متناصفان في النقطة O .

في المثلث ABD لدينا (AO) و (DM) متوسطان يتقاطعان في النقطة G ومنه $AG = 2\ GO$.

في المثلث CBD لدينا (CO) و (DN) متوسطان يتقاطعان في النقطة H ومنه $HC = 2HO$.

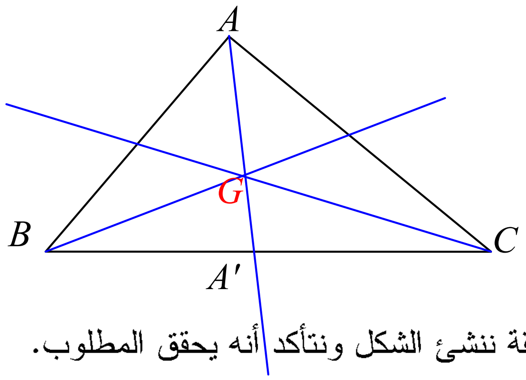
ومنه : $OC = 3\ HO$ و $OA = 3\ OG$ إذن $OG = OH = \frac{1}{2}GH$ ومنه : $AG = GH = HC$

تمرين : رقم 45 صفحة 241 (Δ_1) ، (Δ_2) ، (Δ_3) ثلاث مستقيمات متقاطعة في نقطة G .

أ) أنشئ مثلثا ABC بحيث تكون النقطة G مركز ثقله .

ب) هل يوجد مثلثا واحدا يحقق المطلوب ؟

حل التمرين :



مرحلة التحليل :

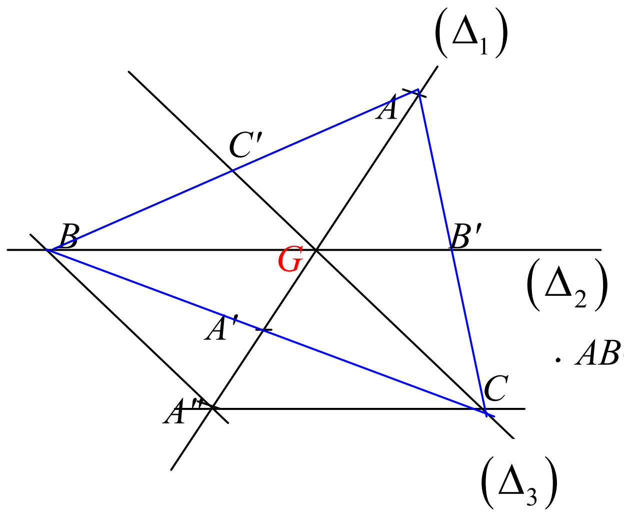
نفرض أن للمسألة حل أي يوجد على الأقل مثلثا ABC بحيث

تكون النقطة G مركز ثقله . ونرسم شكلا مناسبا له.

لدينا القواعد التالية : $A'C = A'B$ و $AG = 2\ A'G$

مرحلة التركيب والإنشاء : انطلاقا من القواعد السابقة ننشئ الشكل ونتأكد أنه يحقق المطلوب.

نرسم ثلاث مستقيمات (Δ_1) ، (Δ_2) ، (Δ_3) متقاطعة في نقطة G .



A نقطة من المستقيم (Δ_1) و A'' نظيرتها بالنسبة للنقطة G

A' منتصف القطعة $[A''G]$

الموازي من A'' للمستقيم (Δ_3) يقطع المستقيم (Δ_2) في B

والموازي من A'' للمستقيم (Δ_2) يقطع المستقيم (Δ_3) في C

إذن الرابعي $BGCA''$ متوازي أضلاع

ومنه A' هي منتصف $[BC]$ إذن (AA') هو متوسط في المثلث ABC .

(AB) يقطع (Δ_3) في النقطة C' . في المثلث ABA''

لدينا $(GC'') // (BA'')$ و G منتصف $[AA'']$

إذن C'' منتصف $[AB]$ وبالتالي (CC') هو متوسط في المثلث ABC .

بما أن المتوسطات تتلاقى في نقطة واحدة إذن كذلك (BB') هو متوسط في المثلث ABC .

ومنه النقطة G مركز ثقل المثلث ABC .

توجد ما لا نهاية من الحلول للمسألة وهذا حسب اختيار النقطة A على المستقيم (Δ_1) .

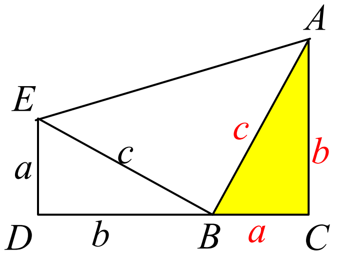
3. مبرهنة فيثاغورس:

الكفاءات المستهدفة

مبرهنة فيثاغورس وعكسها و توظيفها في حل مسائل هندسية . النسب المثلثية .

نشاط 9 :

الشكل المقابل يمثل مثلثا ABC قائما في C أطوال أضلاعه a ، b ، c ، و BDE مثلث يقايس المثلث ABC حيث C ، B ، D في استقامية و $BD = AC$.



أ) بين أن الزاوية ABE قائمة .

ب) ما نوع الرابعي $ACDE$ ؟

ج) أحسب مساحة الرابعي $ACDE$ بطريقتين مختلفتين .

د) استنتج علاقة بين c^2 و a^2 ، b^2 .

حل النشاط 9 :

أ) لدينا في المثلث ABC ، $ABD = BAC + ACB$ (زاوية خارجية) ولدينا $ABD = EBD + ABE$

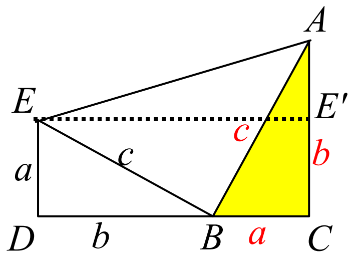
ومنه : $BAC + ACB = EBD + ABE$

بما أن المثلث BDE يقايس المثلث ABC إذن : $EBD = BAC$ وبالتالي : $ACB = ABE = 90°$

ب) نوع الرابعي $ACDE$:

الرابعي $ACDE$ شبه منحرف قائم .

ج) حساب مساحة الرابعي $ACDE$ بطريقتين مختلفتين :



الطريقة الأولى : $s(ACDE) = 2\ s(ABC) + s(ABE)$

ومنه: $\boxed{s(ACDE) = ab + (c^2 / 2)}$

الطريقة الثانية : $s(ACDE) = s(CDEE') + s(AEE')$

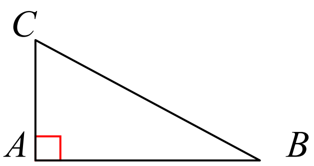
ومنه : $s(ACDE) = a(b+a) + \frac{1}{2}(b+a)(b-a)$

أي : $s(ACDE) = ab + a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2$ وبالتالي : $\boxed{s(ACDE) = ab + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2}$

د) استنتج علاقة بين c^2 و a^2 ، b^2 :

من السؤال السابق نستنتج أن : $\frac{1}{2}c^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$ ومنه : $c^2 = a^2 + b^2$

☒ **مبرهنة فيثاغورس وعكسها :**



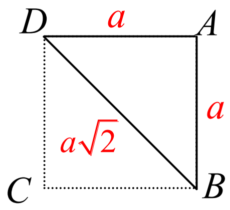
مبرهنة 1 : (مبرهنة فيثاغورس)

إذا كان ABC مثلثا قائما في A فإن : $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

مبرهنة 2 : (عكس مبرهنة فيثاغورس)

إذا كان في مثلث ABC ، $BC^2 = AB^2 + AC^2$ فإن : المثلث ABC قائم في A .

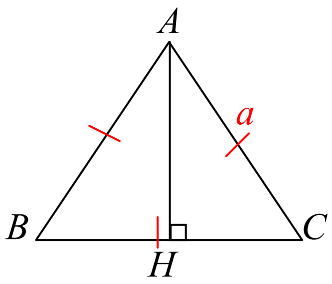
مثال 1: $ABCD$ مربع طول ضلعه يساوي a أحسب طول قطره .



$BD^2 = AB^2 + AD^2$ ومنه : $BD^2 = a^2 + a^2$

ومنه : $BD^2 = 2a^2$ إذن : $BD = a\sqrt{2}$

مثال 2:



ABC مثلث متقايس الأضلاع ، طول ضلعه يساوي a ،

(AH) الارتفاع المتعلق بالضلع $[BC]$.

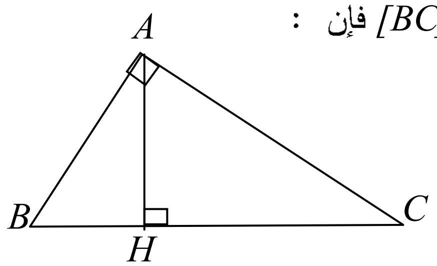
أحسب الطول AH .

حسب مبرهنة فيثاغورس لدينا : $AC^2 = AH^2 + HC^2$

ومنه : $AC^2 - HC^2 = AH^2$ إذن : $AH^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2$

أي : $AH^2 = \frac{3}{4}a^2$ وبالتالي : $AH = a\frac{\sqrt{3}}{2}$

نتائج :



إذا كان ABC مثلثا قائما في A و (AH) الارتفاع المتعلق بالضلع $[BC]$ فإن :

أ) $AB . AC = AH . BC$ (من المساحة)

ب) $AH^2 = HC . HB$ (استعمال مبرهنة فيثاغورس)

$AB^2 = AH^2 + BH^2$ و $AC^2 = AH^2 + HC^2$

ومنه : $AB^2 + AC^2 = 2\,AH^2 + BH^2 + CH^2$

إذن : $BC^2 = 2AH^2 + BH^2 + CH^2$. ومنه : $(BH + HC)^2 = 2AH^2 + BH^2 + CH^2$.

إذن : $BH^2 + HC^2 + 2\,BH \times HC = 2AH^2 + BH^2 + CH^2$. وبالتالي : $AH^2 = BH \times HC$

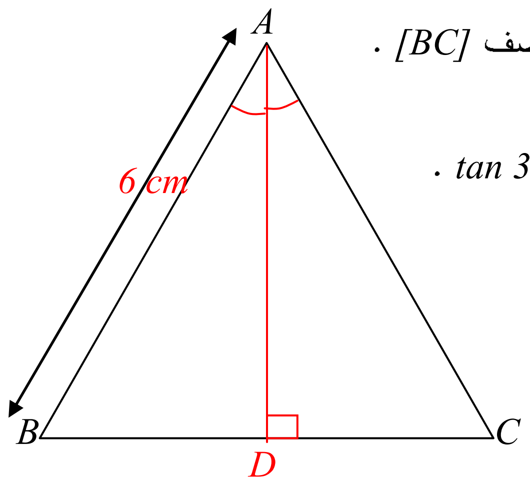
ج) $AB^2 = BH . BC$ (مبرهنة فيثاغورس و النتيجة ب)

$AB^2 = AH^2 + BH^2$ ومنه $AB^2 = BH \times HC + BH^2$ إذن : $AB^2 = BH \times (HC + BH)$

وبالتالي : $AB^2 = BH . BC$

د) $AC^2 = CH . CB$ (بنفس الطريقة للنتيجة السابقة)

نشاط 11 :



ABC مثلث متقايس الأضلاع طول ضلعه $6\ cm$ ، النقطة D منتصف $[BC]$.

بين أن (AD) منصف زاوية الرأس A .

أحسب الطول AD ، واستنتج كلا من $\sin 30°$ ، $\cos 30°$ ، $\tan 30°$.

حل النشاط :

المستقيم (AD) هو متوسط في المثلث المتقايس الأضلاع ABC

إذن هو محور وبالتالي منصف زاوية الرأس A .

من مبرهنة فيثاغورس لدينا : $AD^2 = 36 - 9 = 27$

ومنه : $AD = 3\sqrt{3}$

$$\sin 30° = \frac{BD}{AB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad ، \quad \cos 30° = \frac{AD}{AB} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ، \quad \tan 30° = \frac{BD}{AD} = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

☒ النسب المثلثية في مثلث قائم :

تعريف : ABC مثلث قائم في C حيث : $\widehat{BAC} = \alpha$

جيب الزاوية α : $\sin\alpha = \frac{\text{طول الضلع المقابل ل } \alpha}{\text{طول الوتر}} = \frac{BC}{AB}$

جيب تمام الزاوية α : $\cos\alpha = \frac{\text{طول الضلع المجاور ل } \alpha}{\text{طول الوتر}} = \frac{AC}{AB}$

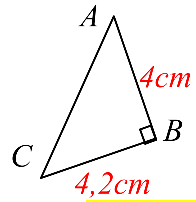
ظل الزاوية α : $\tan\alpha = \frac{BC}{AC}$

نتائج : $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad (\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$

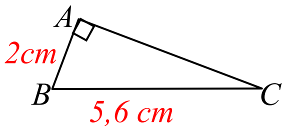
تطبيق 1 : 94 صفحة 190

أحسب كلا من AC و $\widehat{ABC}$ في كل من الحالتين الآتيتين : (تعطى النتائج مدورة إلى الوحدة)

الحالة 0



الحالة 1



حل التطبيق :

الحالة 0 : حسب مبرهنة فيثاغورس لدينا : $AC^2 = AB^2 + BC^2$ ومنه : $AC^2 = (4^2 + 4,2^2)\ cm^2$

أي : $AC^2 = 33,64\ cm^2$ ومنه : $AC = 5,8\ cm$. وبالتدوير إلى الوحدة نجد: $AC = 6\ cm$.

$\widehat{ABC} = 90°$

الحالة 1 : حسب مبرهنة فيثاغورس لدينا : $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ومنه : $AC^2 = BC^2 - AB^2$

ومنه : $AC^2 = (5,6^2 - 2^2)\ cm^2$ أي : $AC^2 = 35,36\ cm^2$ ومنه $AC = 5,946427499...$

وبالتدوير إلى الوحدة نجد : $AC = 6\ cm$.

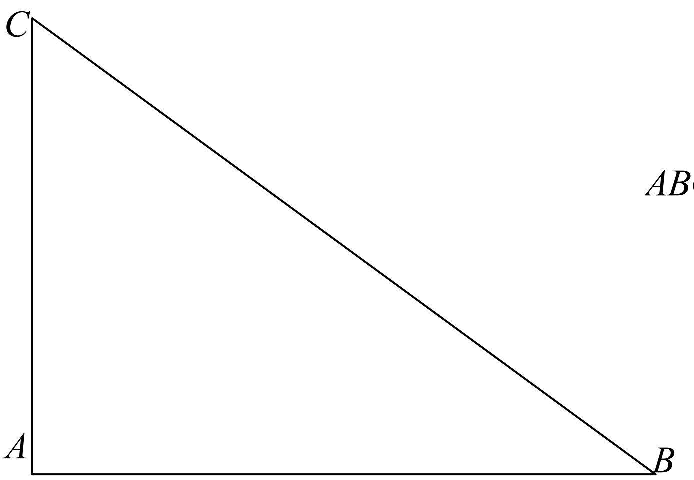
$\cos\widehat{ABC} = \frac{2}{5,6} = 0,347142857...$ ومنه : $\widehat{ABC} = 69,07516758...°$

وبالتدوير إلى الوحدة نجد : $\widehat{ABC} = 69°$

تطبيق 2 : 01 صفحة 190

ABC مثلث قائم في A حيث $BC = 10\ cm$ و $\widehat{ABC} = 37°$

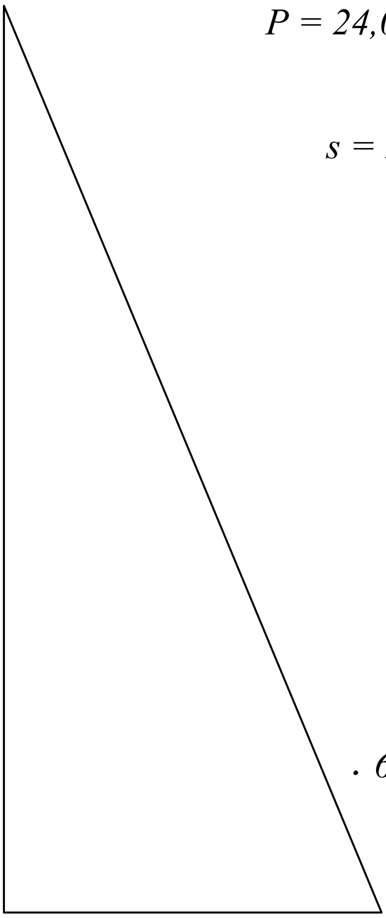
أحسب بالتدوير إلى الوحدة مساحة ومحيط هذا المثلث .



حل التطبيق :

$AC = BC \sin 37°$ ومنه : $AC = 6,01815023...$.

$AB = BC \cos 37°$ ومنه : $AB = 7,9863551...$.



نضع p محيط المثلث ABC : $P = AB + AC + BC$ ومنه : $P = 24,00450533...cm$

وبالتدوير إلى الوحدة نجد : $p = 24\ cm$

نضع s مساحة المثلث ABC : $s = (AB\times AC)/2$ ومنه : $s = 24,0315424...cm^2$

وبالتدوير إلى الوحدة نجد: $s = 24\ cm^2$.

تطبيق 3 : 00 صفحة 190

أنشئ مثلثا ABC أطوال أضلاعه $5\ cm$ ، $12\ cm$ ، $13\ cm$ ، وحدد طبيعته .

عين مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC ونصف قطرها .

حل التطبيق :

نفترض $AB = 5cm$ و $AC = 12\ cm$ و $BC = 13\ cm$

لدينا : $AB^2 + AC^2 = 144 + 25 = 169 = 13^2$

ومنه : $AB^2 + AC^2 = BC^2$

وحسب عكس مبرهنة فيثاغورس أن المثلث ABC قائم في A

مركز الدائرة المحيطة به هو منتصف القطعة $[BC]$ ونصف قطرها يساوي $6,5\ cm$.

☒ استعمال تكنلوجية الإعلام والاتصال :

الهدف من النشاط هو البحث عن الثلاثيات من الأعداد الطبيعية التي تكون أطوال أضلاع مثلث قائم .

مثلا الثلاثية (1 ، 9 ، 0) لدينا : $3^2 + 4^2 = 5^2$ تحقق مبرهنة فيثاغورس وتسمى هذه الثلاثية بثلاثية فيثاغورسية .

وللبحث عن الثلاثيات نستعمل برنامج *Excel* .

0. ليكن x و y عددين طبيعيين حيث : $x > y$. بين أن الثلاثية $(x^2 - y^2 , 2xy , x^2 + y^2)$ هي ثلاثية فيثاغورسية .

لدينا : $(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = x^4 + y^4 - 2(xy)^2 + 4(xy)^2$ ومنه : $(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = x^4 + y^4 + 2(xy)^2$

إذن : $(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = (x^2 + y^2)^2$ و هذا هو المطلوب.

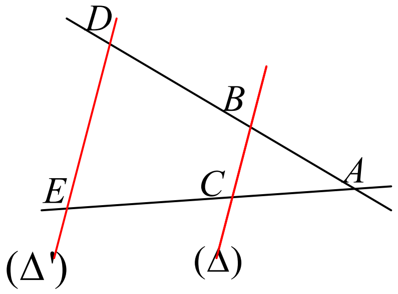
1. نعتبر مثلثا ABC قائما في A ، حيث : $AB = x^2 - y^2$ و $AC = 2xy$ و $x > y$ فيكون : $BC = x^2 + y^2$.

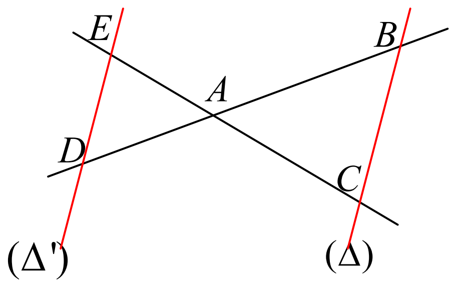
x	y	AB	AC	BC	AB² + AC²	BC²
2	1	3	4	5	25	25
3	1	8	6	10	100	100
3	2	5	12	13	169	169
4	1	15	8	17	289	289
4	2	12	16	20	400	400
4	3	7	24	25	625	625
5	1	24	10	26	676	676
5	2	21	20	29	841	841
5	3	16	30	34	1156	1156
5	4	9	40	41	1681	1681
6	1	35	12	37	1369	1369
6	2	32	24	40	1600	1600
6	3	27	36	45	2025	2025
6	4	20	48	52	2704	2704
6	5	11	60	61	3721	3721
7	1	48	14	50	2500	2500
7	2	45	28	53	2809	2809
7	3	40	42	58	3364	3364
7	4	33	56	65	4225	4225
7	5	24	70	74	5476	5476
7	6	13	84	85	7225	7225
8	1	63	16	65	4225	4225
8	2	60	32	68	4624	4624
8	3	55	48	73	5329	5329
8	4	48	64	80	6400	6400
8	5	39	80	89	7921	7921
8	6	28	96	100	10000	10000
8	7	15	112	113	12769	12769
9	1	80	18	82	6724	6724
9	2	77	36	85	7225	7225
9	3	72	54	90	8100	8100
9	4	65	72	97	9409	9409
9	5	56	90	106	11236	11236
9	6	45	108	117	13689	13689
9	7	32	126	130	16900	16900
9	8	17	144	145	21025	21025
10	1	99	20	101	10201	10201
10	2	96	40	104	10816	10816
10	3	91	60	109	11881	11881
10	4	84	80	116	13456	13456
10	5	75	100	125	15625	15625
10	6	64	120	136	18496	18496
10	7	51	140	149	22201	22201
10	8	36	160	164	26896	26896
10	9	19	180	181	32761	32761
11	1	120	22	122	14884	14884
11	2	117	44	125	15625	15625
11	3	112	66	130	16900	16900
11	4	105	88	137	18769	18769
11	5	96	110	146	21316	21316
11	6	85	132	157	24649	24649
11	7	72	154	170	28900	28900
11	8	57	176	185	34225	34225
11	9	40	198	202	40804	40804
11	10	21	220	221	48841	48841
12	1	143	24	145	21025	21025

4. مبرهنة طاليس:

الكفاءات المستهدفة

مبرهنة طاليس وعكسها ، و توظيفها في حل مسائل هندسية .





مبرهنة 1 : مبرهنة طاليس

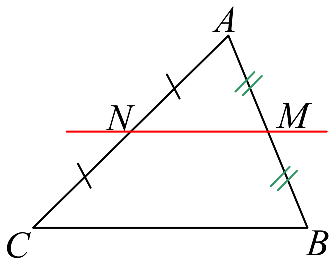
إذا كان لدينا مستقيمان متقاطعان في نقطة A يقطعهما مستقيمان متوازيان (Δ) و (Δ') في النقط B ، C ، D ، E حسب أحد الشكلين فإن أطوال أضلاع المثلث ABC تكون متناسبة مع أطوال أضلاع المثلث ADE .

أي : $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AC}{AE}=\dfrac{BC}{DE}$

مبرهنة 2 : عكس مبرهنة طاليس

إذا كانت كل من النقط A ، B ، D ، والنقط A ، C ، E على استقامة واحدة وبنفس الترتيب حسب أحد الشكلين ، وإذا كان $\dfrac{AC}{AE}=\dfrac{AB}{AD}$ فإن المستقيمين (BC) و (DE) يكونا **متوازيين**

حالة خاصة : مستقيم المنتصفين في مثلث



ABC مثلث كيفي.

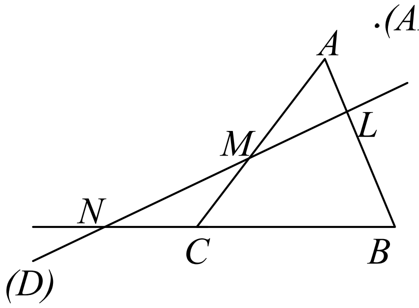
☒ إذا كانت النقطتان M و N منتصفا القطعتين $[AB]$ و $[AC]$ على الترتيب فإن $(MN) // (BC)$ و $BC = 2\,MN$

☒ إذا كانت النقطة M منتصف القطعة $[AB]$ وكان $(MN) // (BC)$ حيث N نقطة من $[AC]$ فإن N هي منتصف القطعة $[AC]$

تطبيق 1 : 96 صفحة 342

ABC مثلث كيفي ، (D) مستقيم يقطع (AB) ، (AC) ، (BC) في النقط L ، M ، N على الترتيب.

نريد البرهان أن : $\dfrac{LA}{LB}\times\dfrac{NB}{NC}\times\dfrac{MC}{MA}=1$

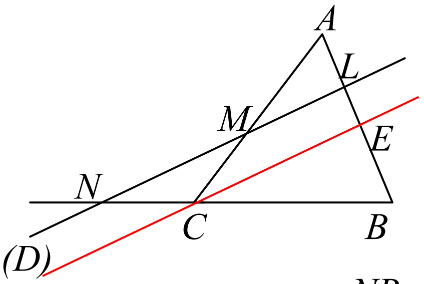


أ) أرسم الموازي للمستقيم (D) الذي يشمل النقطة C ، وسم E تقاطعه مع (AB).

ب) بين أن : $\dfrac{LB}{LE}=\dfrac{NB}{NC}$ و $\dfrac{LE}{LA}=\dfrac{MC}{MA}$

ج) استنتج العلاقة $\dfrac{LA}{LB}\times\dfrac{NB}{NC}\times\dfrac{MC}{MA}=1$

حل التطبيق 1 :



أ) رسم الموازي للمستقيم (D) الذي يشمل النقطة C ، يقطع (AB) في E.

ب) تبيان أن $\frac{NB}{NC}=\frac{LB}{LE}$

في المثلث BLN لدينا : $(CE)\,//\,(NL)$ إذن حسب مبرهنة طاليس

لدينا : $\frac{BC}{BN}=\frac{BE}{BL}$ معناه $\frac{BC}{BE}=\frac{BN}{BL}$ ومنه : $\frac{NC}{LE}=\frac{NB-BC}{LB-BE}=\frac{BC}{BE}=\frac{NB}{LB}$

إذن : $\frac{NC}{LE}=\frac{NB}{LB}$ معناه $\boxed{\frac{LB}{LE}=\frac{NB}{NC}}$

تبيان أن $\frac{LE}{LA}=\frac{MC}{MA}$

في المثلث ACE لدينا : $(CE)\,//\,(ML)$ إذن حسب مبرهنة طاليس

$\frac{AL}{AE}=\frac{AM}{AC}$ معناه $\frac{AC}{AE}=\frac{AM}{AL}$ ومنه : $\frac{MC}{LE}=\frac{AC-AM}{AE-AL}=\frac{AC}{AE}=\frac{AM}{AL}$

$\frac{MC}{LE}=\frac{MA}{LA}$ معناه $\boxed{\frac{MC}{MA}=\frac{LE}{LA}}$

ج) استنتاج العلاقة $1=\frac{MC}{MA}\times\frac{NB}{NC}\times\frac{LA}{LB}$

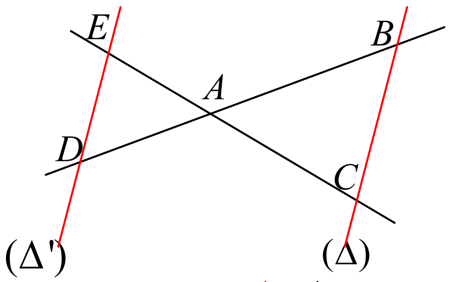
$\frac{LB}{LE}=\frac{NB}{NC}$ معناه $LE=\frac{LB\times NC}{NB}$ و $\frac{MC}{MA}=\frac{LE}{LA}$ معناه $LE=\frac{MC\times LA}{MA}$

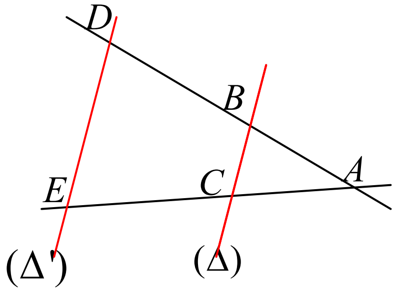
ومنه : $\frac{MC\times LA}{MA}=\frac{LB\times NC}{NB}$ معناه $LB\times NC\times MA=MC\times LA\times NB$ معناه $\boxed{\frac{LA}{LB}\times\frac{NB}{NC}\times\frac{MC}{MA}=1}$

نتائج :

إذا كان $(\Delta)//(\Delta')$ فإن $\frac{AC}{CE}=\frac{AB}{BD}$

إذا كان $\frac{AC}{CE}=\frac{AB}{BD}$ فإن $(\Delta)//(\Delta')$

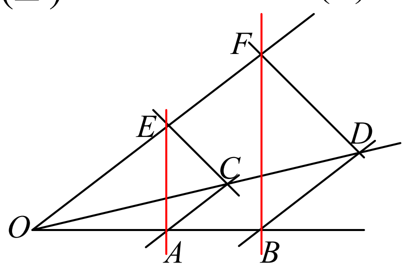




تطبيق 2 : 92 صفحة 92

إذا علمت أن في الشكل المرفق $(AC)\,//\,(BD)$

و $(CE)\,//\,(DF)$ فبين أن $(AE)\,//\,(BF)$.



حل التطبيق 2 :

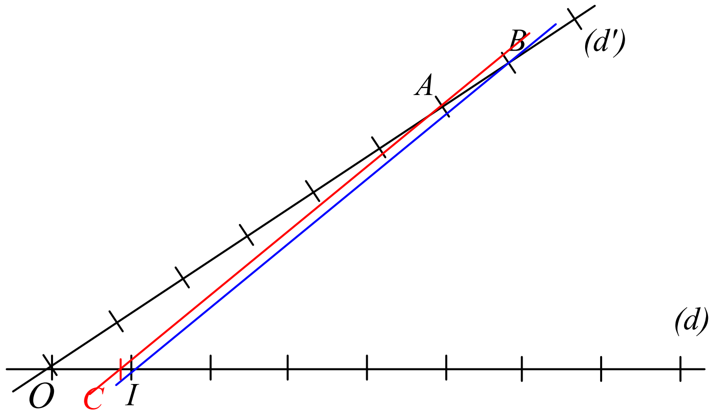
في المثلث ODB لدينا : $(AC)\,//\,(BD)$ ومنه حسب مبرهنة طاليس لدينا : $\frac{OC}{OD}=\frac{OA}{OB}$

في المثلث ODF لدينا : $(CE)\,//\,(DF)$ ومنه حسب مبرهنة طاليس لدينا : $\frac{OE}{OF}=\frac{OC}{OD}$

إذن : $\frac{OE}{OF}=\frac{OA}{OB}$ وحسب عكس مبرهنة طاليس المطبقة في المثلث OBF لدينا : $(AE)\,//\,(BF)$.

تطبيق 3 : 15 صفحة 342

أنشئ العدد $\frac{6}{7}$



حل التطبيق 3 :

ليكن (O,I) معلما للمستقيم (d) ،

المستقيم (d') يقطع (d) في النقطة O .

نعين النقطتين A و B على المستقيم (d') حيث

$OA = 6$ و $OB = 7$ ، نرسم من A المستقيم الموازي للمستقيم (BI) حسب مبرهنة طاليس لدينا :

$\frac{6}{7} = \frac{OC}{OI} = \frac{OA}{OB}$ إذن : $OC = \frac{6}{7}$

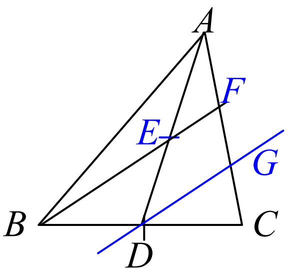
تطبيق 4 : 99 صفحة 342 :

ABC مثلث ، النقطة D منتصف $[BC]$ والنقطة E منتصف $[AD]$ و F نقطة من $[AC]$ حيث $AF = \frac{1}{3}AC$

أ) بين أن النقط B ، E ، F في استقامية.

ب) بين أن $BF = 4\ EF$.

حل التطبيق 4 :



أ) تبيان أن النقط B ، E ، F في استقامية.

نرسم من D الموازي للمستقيم (EF) يقطع (AC) في G

في المثلث ADG لدينا $(EF) // (DG)$ و E منتصف $[AD]$

إذن F هي منتصف $[AG]$ و $DG = 2EF$ ومنه : $AF = FG = GC$

وبالتالي G منتصف $[FC]$ ، وفي المثلث BCF لدينا كذلك D منتصف $[BC]$

إذن : $(DG) // (BF)$ و $BF = 2DG$

ومنه : $(EF) // (BF)$ بما أن للمستقيمين نقطة مشتركة فإن النقط B ، E ، F في استقامية.

ب) تبيان أن $BF = 4\ EF$.

لدينا : $BF = 2DG$ و $DG = 2EF$ إذن : $BF = 4\ EF$.

5. الزوايا والدائرة :

الكفاءات المستهدفة : الزوايا والدائرة .

نشاط 11 :

أرسم دائرة (C) مركزها O ونصف قطرها $5\ cm$ ، و $[AB]$ قطر فيها ،
و M نقطة من الدائرة حيث $AM = 4\ cm$.

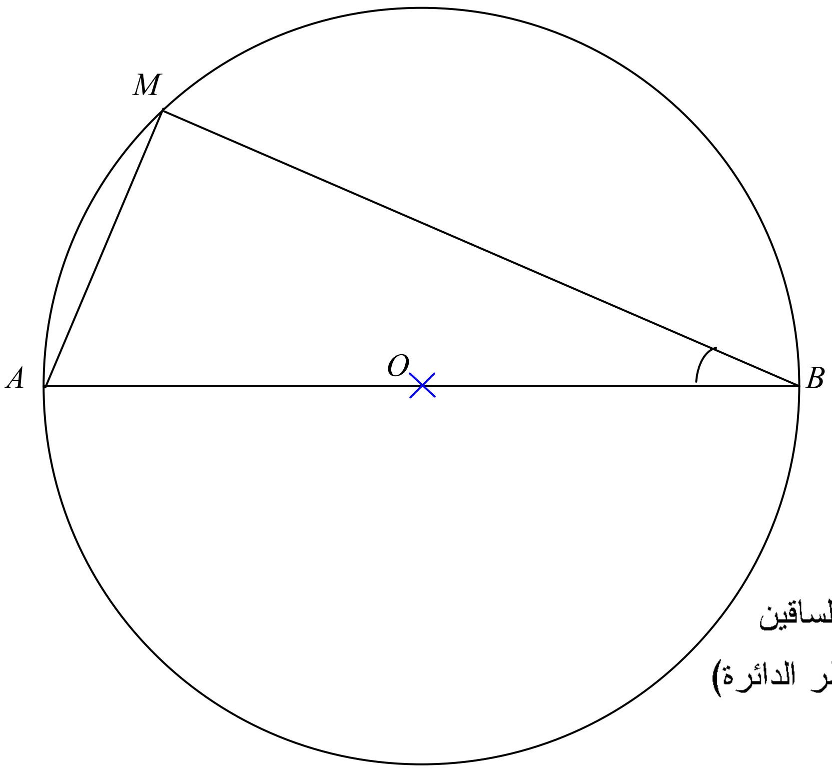
أ) باستعمال ال

ب) آلة الحاسبة والتدوير إلى $0,1$ أحسب قيس الزاوية ABM ، استنتج قيس الزاوية MAB .

ج) ما نوع المثلث AOM ؟ واحسب أقياس زواياه.

د) استنتج العلاقة بين الزاويتين ABM و AOM .

حل النشاط :



أ) حساب قيس الزاوية ABM :

المثلث ABM قائم في M

لأن ضلعه $[AB]$ هو قطر للدائرة (C) .

ومنه : $\sin ABM = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{4}{10} = 0,4$

إذن بالحاسبة وبالتدوير إلى $0,1$ نجد :

$ABM = 23,6°$

استنتاج قيس الزاوية MAB

$MAB = 90 - 23,6 = 66,4°$

ب) نوع المثلث AOM : هو متساوي الساقين

رأسه O لأن : $OM = OA$ (نصفي قطر الدائرة)

حساب أقياس زوايا المثلث AOM :

$MAO = AMO = 66,4°$ و $AOM = 180 - 2 \times 66,4 = 47,2°$

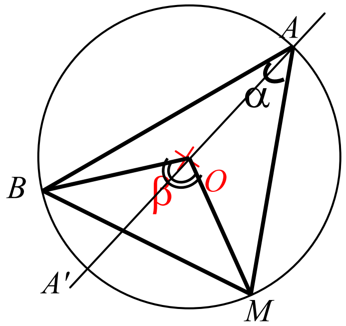
ج) استنتاج العلاقة بين الزاويتين ABM و AOM .

لدينا : $2 \times 23,6 = 47,2$ ومنه $AOM = 2ABM$

نشاط إضافي :

A ، B ، M ثلاث نقط متمايزة من دائرة (c) مركزها O ، المستقيم (AO) يقطع الدائرة (c) في النقطة A'.

نضع $MAB = \alpha$ و $MOB = \beta$.



أ) بين أن كل من المثلثين AOM و BOM متساوي الساقين ،

ثم عبر عن قيس الزاوية MAA' بدلالة قيس الزاوية MOA' ،

وعن قيس الزاوية BAA' بدلالة قيس الزاوية BOA' .

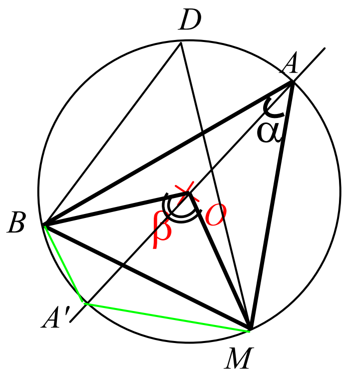
ب) استنتج العلاقة بين α و β.

ج) عبر عن الزاوية $BA'M$ بدلالة β ، ثم بدلالة α،

واستنتج العلاقة بين الزاويتين $BA'M$ و BAM .

د) D نقطة من القوس الكبرى BM استنتج مما سبق العلاقة بين الزاويتين BAM و BDM .

حل النشاط :



أ) تبيان أن كل من المثلثين AOM و BOM متساوي الساقين ،

لدينا $OA = OM = OB$ (أنصاف أقطار الدائرة)

إذن المثلثان AOM و BOM كل منهما متساوي الساقين .

- قيس الزاوية MAA' بدلالة قيس الزاوية MOA' :

لدينا MOA' زاوية خارجية في المثلث AOM

ومنه: $MOA' = MAO + OMA$ وبما أن $MAO = OMA = MAA'$

فإن : $MOA' = 2MAA'$

- قيس الزاوية BAA' بدلالة قيس الزاوية BOA' :

لدينا BOA' زاوية خارجية في المثلث BOA ومنه

$BOA' = BAO + OBA$ وبما أن $BAO = OBA = BAA'$ فإن : $BOA' = 2BAA'$.

ب) استنتاج العلاقة بين α و β.

$BOM = BOA' + A'OM$ ومنه : $BOM = 2BAA' + 2A'AM$ إذن : $BOM = 2BAM$

وبالتالي : $\beta = 2\alpha$

ج) عبر عن الزاوية $BA'M$ بدلالة β ، ثم بدلالة α،

باستعمال نفس الطريقة السابقة نجد : $BA'M = 180° - \frac{1}{2}\beta$ و $BA'M = 180° - \alpha$

واستنتج العلاقة بين الزاويتين $BA'M$ و BAM .

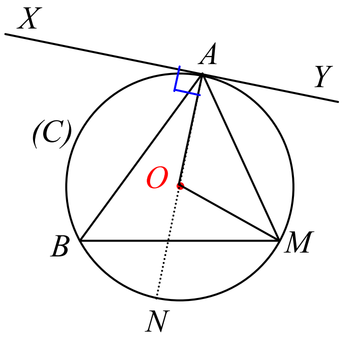
$BA'M + \alpha = 180°$ أي : $BA'M + BAM = 180°$ ومنه : $BA'M$ و BAM زاويتان متكاملتان .

د) D نقطة من القوس الكبرى BM استنتج مما سبق العلاقة بين الزاويتين BAM و BDM .

مما سبق نستنتج أن : $BDM = \frac{\beta}{2} = \alpha$ ومنه : $BDM = BAM$

مفردات ومصطلحات :

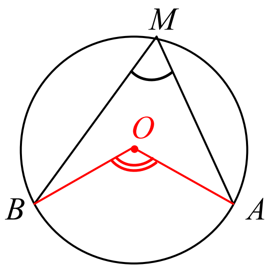
(C) دائرة مركزها O ، و A ، B ، M ، N نقط من الدائرة (C) حيث O تنتمي إلى $[AN]$.



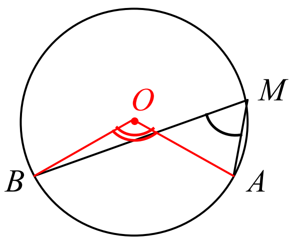
- القطعة $[AN]$ تسمى **قطرا** ، وكل من القطع $[AB]$، $[AM]$، $[BM]$ تسمى **وترا** في الدائرة (C).
- النقطتان المتمايزتان A و B تعينان على الدائرة (C) قوسين كل منها نرمز لها بالرمز AB .
- (XY) مستقيم يشترك مع الدائرة (C) في نقطة وحيدة A ، يسمى **مماسا** للدائرة (C) عند النقطة A ويكون عموديا على (AO).
- الزاوية AOM رأسها مركز الدائرة تسمى زاوية **مركزية** ، نقول إنها **تحصر** القوس AM .
- الزاوية ABM رأسها نقطة من الدائرة تسمى زاوية **محيطية** ، نقول إنها **تحصر** القوس AM .
- الزاوية XAB تسمى زاوية **محيطية** ، نقول إنها **تحصر** القوس AB .

مبرهنة : في كل دائرة ، الزاوية المركزية تساوي ضعف الزاوية المحيطية التي تحصر معها نفس القوس.

مثال : A ، B ، M ثلاث نقط متمايزة من دائرة مركزها O.



$AOB = 2AMB$



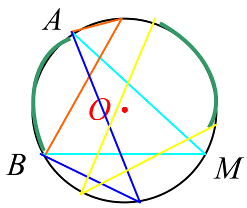
نتائج :

8) الزوايا المحيطية التي تحصر نفس القوس أو أقواسا متقايسة تكون متقايسة. (شكل 8)

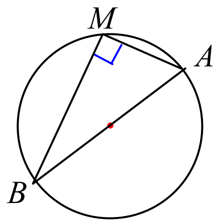
0) إذا كانت القطعة $[AB]$ قطرا لدائرة فإنه من أجل كل نقطة M من هذه الدائرة وتختلف عن A و B ، يكون المثلث ABM قائما في M. (شكل 0)

3) تكون رؤوس الرباعي المحدب $ABCD$ من نفس الدائرة إذا كانت : $DAC = DBC$. (شكل 3)

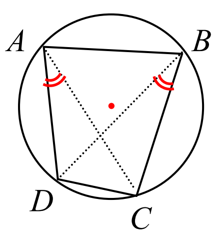
4) يكون الرباعي المحدب $ABCD$ دائريا إذا كانت زاويتان متقابلتان متكاملتين. (شكل 4)



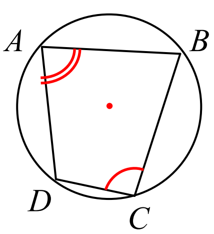
الشكل (8)



الشكل (0)



الشكل (3)



الشكل (4)

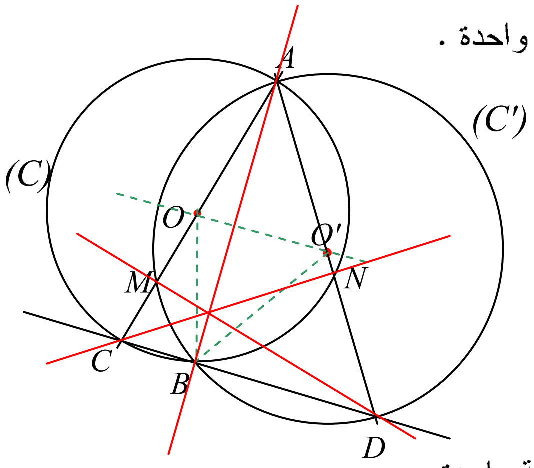
تطبيقات :

تمرين : 57 صفحة 044

(C) و (C') دائرتان مركزهما O و O' متقاطعتان في نقطتين A و B ،

$[AC]$ قطر في (C) و يقطع (C') في النقطة M ، و $[AD]$ قطر في (C') و يقطع (C) في النقطة N .

8. أرسم شكلا مناسبا .
0. بين أن النقط C ، B ، D في استقامية .
3. بين أن المستقيمات (AB) ، (CN) ، (MD) متقاطعة في نقطة واحدة .



الحل :

0) تبيان أن النقط C ، B ، D في استقامية .

$ABC = 90°$ تحصر نصف الدائرة (C)

$ABD = 90°$ تحصر نصف الدائرة (C')

ومنه : $CBD = 180°$

وبالتالي : $(CB) // (CD)$ ومنه : النقط C ، B ، D في استقامية.

3) تبيان أن المستقيمات (AB) ، (CN) ، (MD) متقاطعة في نقطة واحدة .

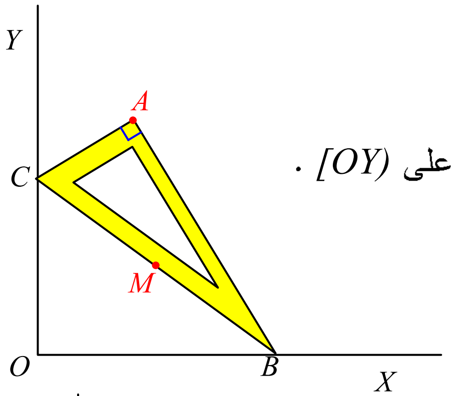
لدينا المثلث ANC قائم في N لأن الزاوية ANC تحصر نصف الدائرة (C) ومنه : $(CN) \perp (AD)$

ولدينا المثلث ABD قائم في B لأن الزاوية ABD تحصر نصف الدائرة (C') ومنه : $(AB) \perp (CD)$

ولدينا المثلث AMD قائم في M لأن الزاوية AMD تحصر نصف الدائرة (C') ومنه : $(DM) \perp (AC)$

إذن المستقيمات (AB) ، (CN) ، (MD) هي ارتفاعات في المثلث ACD وبالتالي تتقاطع في نقطة واحدة .

تمرين : 18 صفحة 047



$[OX)$ و $[OY)$ نصفا مستقيمين متعامدان في النقطة O ،

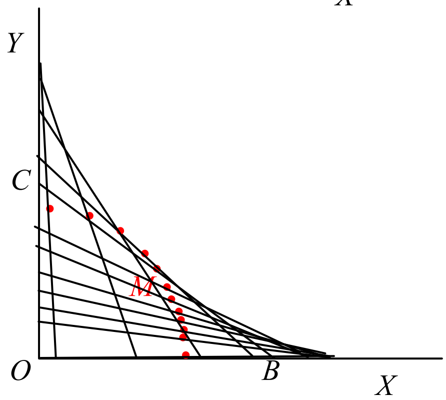
نفترض ABC كوسا ونحركه بحيث تتحرك B على $[OX)$ وتتحرك C على $[OY)$.

أ) ما هو المسار الذي تتحرك عليه النقطة M منتصف $[BC]$ ؟

ب) ما هو المسار الذي تتحرك عليه النقطة A ؟

(إرشاد : بين أن الزاوية AOB ثابتة)

الحل :



أ) تعيين المسار الذي تتحرك عليه النقطة M منتصف $[BC]$:

نرمز بـــ (e) مجموعة النقط (المسار) المطلوبة ،

نرسم عدة نقط ونستغلها لتخمين النتيجة :

نلاحظ في هذه الحالة أن المسار هو عبارة عن ربع دائرة مركزها O

ونصف قطرها $\frac{BC}{2}$.نرمز له بالرمز $\overset{\frown}{EF}$

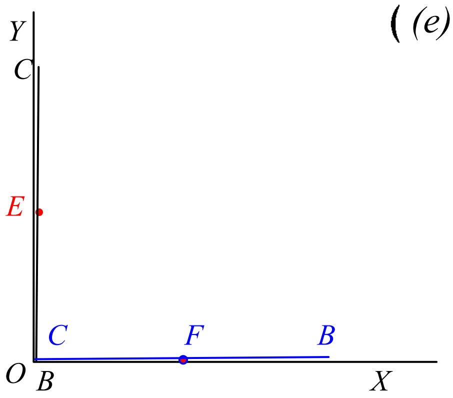
لنبرهن أن $(e) = \overset{\frown}{EF}$:

ولهذا نتبع المراحل التالية :

8)نبين أن (e) مجموعة غير خالية

0)نبين أن كل نقطة M من (e) تنتمي إلى $\overset{\frown}{EF}$ (أي (e) محتواة في $\overset{\frown}{EF}$)

3)نبين أن كل نقطة M من $\overset{\frown}{EF}$ تنتمي إلى (e) (أي $\overset{\frown}{EF}$ محتواة في (e))



- لنبين أن (E) مجموعة غير خالية

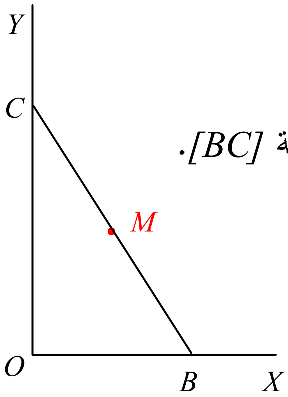
إذا أخذنا B منطبقة على O فإن النقطة C تكون في $[OY)$

و النقطة E منتصف $[BC]$ توجد في $[OY)$ و هي تنتمي إلى (e)

إذن : $(e) \neq \Phi$

إذا أخذنا C منطبقة على O فإن النقطة B تكون في $[OX)$

و النقطة F منتصف $[BC]$ توجد في $[OX)$ و هي تنتمي إلى (e)



- لنبين أن كل نقطة M من (e) تنتمي إلى $\overset{\frown}{EF}$

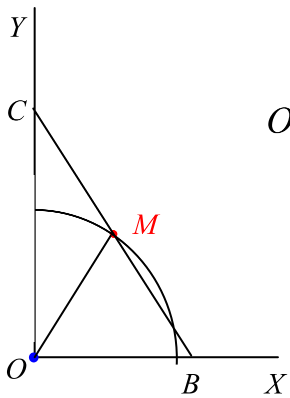
لتكن M نقطة تنتمي إلى المجموعة (e) .

توجد نقطة B من $[OX)$ وتوجد نقطة C من $[OY)$ بحيث : M تكون منتصف القطعة $[BC]$.

المثلث COB قائم في B و النقطة M منتصف القطعة $[BC]$ ، إذن : $OM = \dfrac{1}{2}BC$

ومنه النقطة M تنتمي إلى $\overset{\frown}{EF}$ ربع الدائرة ذات المركز O و نصف القطر $\dfrac{BC}{2}$

وبالتالي : $(e) \subset \overset{\frown}{EF} \quad . . . (8)$



- لنبين أن كل نقطة M من $\overset{\frown}{EF}$ تنتمي إلى (e)

لتكن M نقطة تنتمي إلى المجموعة $\overset{\frown}{EF}$

نعين نقطة B من $[OX)$ و نعين نقطة C من $[OY)$ حيث : $OB = OC = OM$

لنبرهن أن النقط B ، M ، C في استقامية.

لدينا النقط B ، O ، C تنتمي إلى الدائرة ذات المركز M

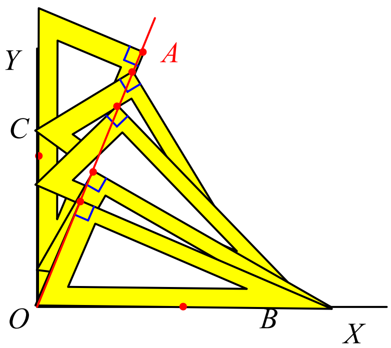
ومنه : $BMC = 2B0C = 180°$ لأن : $B0C$ زاوية محيطية

و BMC زاوية مركزية وتحصران نفس القوس.

ومنه : النقط B ، M ، C في استقامية.

إذن : النقطة M منتصف القطعة $[BC]$ وبالتالي : النقطة M تنتمي إلى المجموعة (e) .

أي : $\overset{\frown}{EF} \subset (e) \quad . . . (0)$



خلاصة : من (8) و (0) نستنتج أن : $(e) = \overset{\frown}{EF}$

ب) تعيين المسار الذي تتحرك عليه النقطة A :

نسمي (F) المسار المطلوب ، و هي مجموعة النقط A بحيث

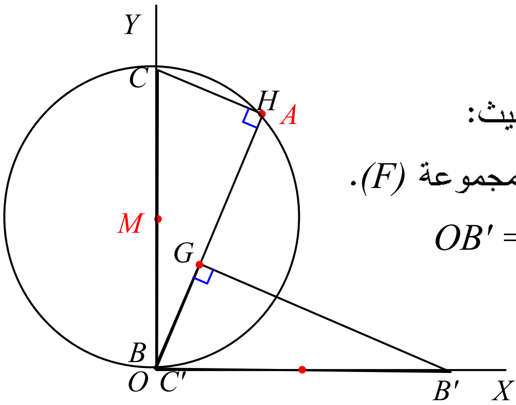
تكون النقطة B من $[OX)$ و النقطة C من $[OY)$ و ABC يمثل كوسا

أي مثلثا قائما في A . نضع الزاوية ACB للكوس هي α

نلاحظ أن النقطة A هي نقطة من قطعة مستقيمة $[GH]$.

حيث H ، G ، O في استقامية و $GOB = ACB = \alpha$

• لنبرهن أن (F) غير خالية :



إذا أخذنا B منطبقة على O فإن النقطة C تكون في $[OY]$.

نرسم الدائرة ذات المركز M منتصف $[BC]$ ونعين النقطة H منها حيث:

$BCH = \alpha$ ومنه المثلث القائم يعين كوسا إذن النقطة H تنتمي إلى المجموعة (F).

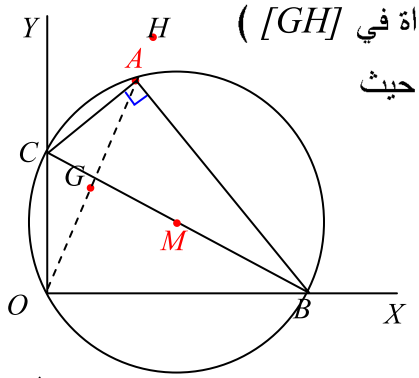
نأخذ C' منطبقة على B و O ونعين النقطة B' من $[OX]$ حيث $OB' = BC$

نعتبر النقطة G المسقط العمودي للنقطة B' على (OH) .

لدينا : $GC'B' = BCH = \alpha$ إذن المثلث القائم $GB'C'$ يمثل كوسا

إذن النقطة G تنتمي إلى المجموعة (F). وبالتالي المجموعة (F) غير خالية :

• لنبين أن كل نقطة A من (F) تنتمي إلى $[GH]$ (أي (E) محتواة في $[GH]$)



لتكن A نقطة من (F) أي : توجد النقطة B من $[OX]$ والنقطة C من $[OY]$ حيث

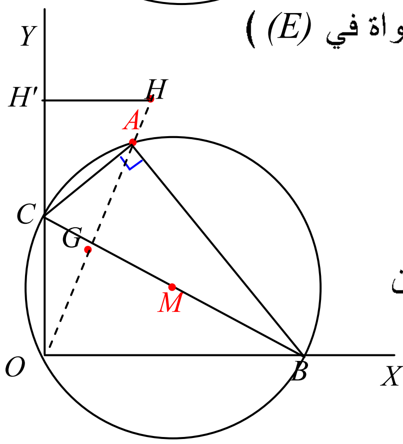
ABC مثلثا قائما في A و $ACB = \alpha$

لدينا $ACOB$ رباعي دائري في الدائرة ذات القطر $[AB]$

ومنه $AOB = ACB = \alpha$ تحصران نفس القوس إذن A تنتمي إلى $[GH]$.

ومنه : $(F) \subset [GH]$

• لنبين أن كل نقطة A من $[GH]$ تنتمي إلى (F) (أي $[GH]$ محتواة في (E))



لتكن A نقطة من $[GH]$ ، H' المسقط العمودي للنقطة H على $[OY]$

ولدينا : $OG = HH'$ نعين نقطة C من $[OH']$ حيث $AC = OG$.

نعين نقطة B من $[OX]$ حيث $AOB = ACB = \alpha$

إذن الرباعي $ACOB$ دائري ومنه الزاويتان المتقابلتان COB و CAB متكاملتان

إذن المثلث ACB قائم في A .

لدينا المثلث القائم OHH' يمثل كوسا

وبمقارنته مع المثلث BAC لدينا : $HH' = AC$ و $H'HO = ACB = \alpha$ و $HH'O = BAC = 90°$

إذن المثلثان OHH' و BAC متقايسان ومنه BAC يمثل كذلك كوسا إذن النقطة A تنتمي إلى (F)

وبالتالي : $[GH] \subset (F)$

خلاصة : لدينا $(F) \subset [GH]$ و $[GH] \subset (F)$ إذن : $(F) = [GH]$.

6. المثلثات المتقايسة والمثلثات المتشابهة :

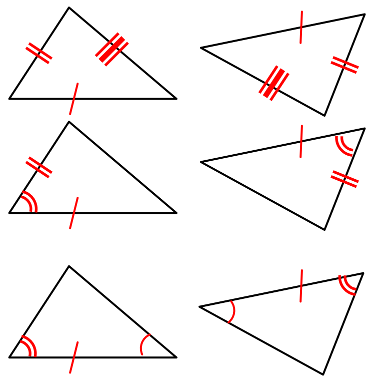
الكفاءات المستهدفة : المثلثات المتقايسة والمثلثات المتشابهة .

1) تقايس مثلثين :

تعريف : نقول عن مثلثين أنهما متقايسان إذا كانا قابلين للتطابق.

ملاحظة : إذا كان تطابق مثلثين بالسحب أو التدوير فإن تقايسهما مباشر وإذا كان بقلب أحدها فإنه غير مباشر.

نتيجة : المثلثان المتقايسان أطوال أضلاعهما متساوية مثنى ، مثنى و زواياهما متساوية مثنى ، مثنى.



خواص : (حالات تقايس مثلثين)

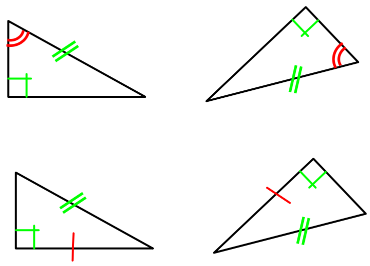
خاصية 1 : يتقايس مثلثان إذا كانت أطوال أضلاعهما متساوية مثنى ، مثنى.

خاصية 2 : يتقايس مثلثان إذا تقايست زاوية والضلعان اللذان يحصرانها من أحد المثلثين مع زاوية الضلعين اللذين يحصرانها من المثلث الآخر.

خاصية 3 : يتقايس مثلثان إذا تقايس ضلع والزاويتان المجاورتان له من أحد المثلثين مع ضلع والزاويتين المجاورتين له من المثلث الآخر.

حالات خاصة : (تقايس مثلثين قائمين)

قائمان وتراهما BC و $B'C'$ متقايسان



خاصية 1 : يتقايس المثلثان ABC و $A'B'C'$ إذا تقايست زاوية غير القائمة من الأول مع زاوية غير القائمة من الثاني.

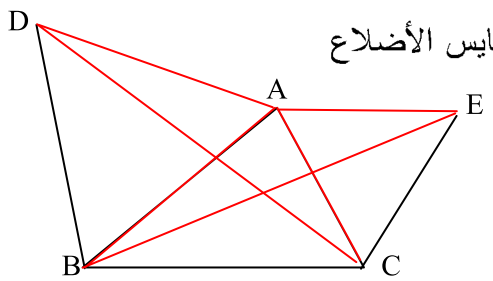
خاصية 2 : يتقايس المثلثان ABC و $A'B'C'$ إذا تقايس ضلع للزاوية القائمة من الأول مع ضلع للزاوية القائمة من الثاني.

تطبيق 1 : 58 صفحة 428

ABC مثلث ، أنشئ على ضلعيه $[AB]$ و $[AC]$ مثلثين ABD و ACE على الترتيب ، حيث كل منهما متقايس الأضلاع.

بين أن المثلثين ACD و ABE متقايسان واستنتج أن : $BE = CD$.

الحل :



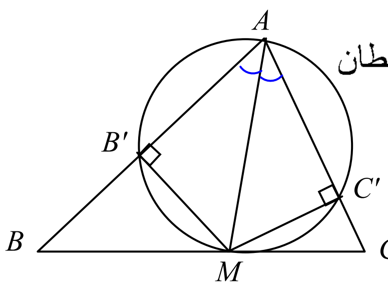
لدينا : $CAE = BAD = 60°$ لأن كل من المثلثين ABD و ACE متقايس الأضلاع

ومنه : $CAE + CAB = BAD + CAB$ إذن : $BAE = CAD$

ولدينا كذلك : $AB = AD$ و $AE = AC$

إذن المثلثان ACD و ABE متقايسان . ومنه نستنتج : $BE = CD$.

تطبيق 2 : 69 صفحة 422



ABC مثلث ، M نقطة تقاطع منصف زاوية الرأس A و $[BC]$ ، C' ، B' المسقطان العموديان للنقطة M على $[AB]$ و $[AC]$ على الترتيب.

أ) بين أن المثلثين $AB'M$ ، $AC'M$ متقايسان.

ب) بين أن النقط A ، B' ، M ، C' تنتمي إلى دائرة واحدة يطلب تعيين عناصرها.

ج) ما نوع الرباعي $AB'MC'$ عندما يكون المثلث ABC قائما في A .

الحل :

أ) بين أن المثلثين $AB'M$ ، $AC'M$ متقايسان.

لدينا : المثلثان $AB'M$ ، $AC'M$ قائمان ولهما وتر مشترك $[AM]$ و $B'AM = C'AM$ إذن هما متقايسان.

ب) بين أن النقط A ، B' ، M ، C' تنتمي إلى دائرة واحدة يطلب تعيين عناصرها.

لدينا $AB'M$ و $AC'M$ متقابلتان ومتكاملتان في الرباعي $AB'MC'$ إذن هو دائري في الدائرة ذات القطر $[AM]$ ومركزها منتصف $[AM]$.

ج) ما نوع الرباعي $AB'MC'$ عندما يكون المثلث ABC قائما في A .

إذا كان المثلث ABC قائما في A فإن للرباعي $AB'MC'$ ثلاث زوايا قائمة وبالتالي هو مستطيل وبما أن القطر $[AM]$ هو منصف الزاوية ذات الرأس A فإن الرباعي $AB'MC'$ هو مربع.

نشاط :

ADE و$A'B'C'$ مثلثان حيث : $AD = A'B'$ و $AE = A'C'$ و $A = A'$

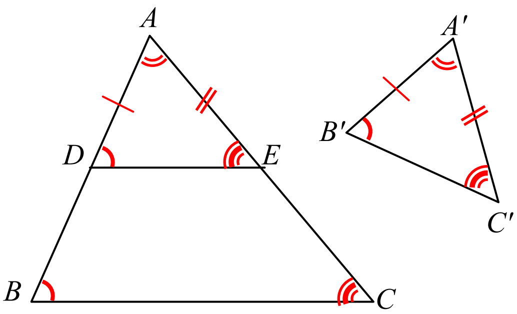
نعين نقطة B من (AD) و نقطة C من (AE) حيث $(DE) // (BC)$.

1) تحقق من تقايس المثلثين ADE و$A'B'C'$. واستنتج الزوايا المتقايسة والضلعين المتقايسين.

4) بين أن زوايا المثلثين $A'B'C'$ وABC متقايسة مثنى ، مثنى.

3) هل المثلثين ADE وABC متقايسان ؟ ماذا تلاحظ عنهما ؟

2) برهن أن : $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$.



حل النشاط :

1) لدينا : $AD = A'B'$ و $AE = A'C'$ و $A = A'$

إذن المثلثان ADE و$A'B'C'$ هما متقايسان

وبالتالي : $D = B'$ ، $E = C'$ و $DE = B'C'$

4) لدينا : $(DE) // (BC)$ إذن : $D = B$ ، $E = C$ بالتماثل.

ومنه : $B = B'$ ، $C = C'$ ولدينا $A = A'$ من المعطيات

3) إذا كانت النقطتين B و D مختلفتين فإن المثلثين ADE وABC غير متقايسين.

نلاحظ أن المثلث $A'B'C'$ هو تصغير (أو تكبير) للمثلث ABC . نقول عنهما أنهما متشابهان.

2) تبيان أن $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$

لدينا :$(ED) // (BC)$ وبتطبيق مبرهنة طاليس نجد $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$

وبما أن : $AD = A'B'$ و $AE = A'C'$ و $DE = B'C'$ فإن $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$.

2)تشابه مثلثين :

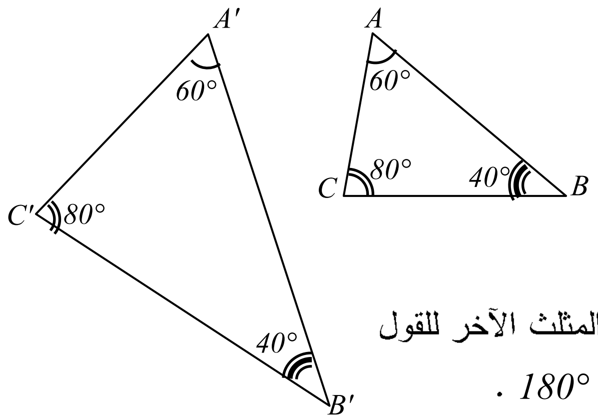
تعريف : نقول عن مثلثين أنهما متشابهان إذا كانت زوايا أحدهما تساوي زوايا الآخر.

مثال : المثلثان ABC و $A'B'C'$ متشابهان.

الرؤوس المتماثلة : $A \quad B \quad C$

الأضلاع المتماثلة : $A' \quad B' \quad C'$

$[AB]$ و $[A'B']$ ؛ $[AC]$ و $[A'C']$ ؛ $[BC]$ و $[B'C']$.



ملاحظات :

1 – يكفي تساوي زاويتين من أحد المثلثين مع زاويتين من المثلث الآخر للقول إن المثلثين متشابهان ، ذلك لأن مجموع زوايا المثلث يساوي $180°$.

4 – إذا كان أحد مثلثين تصغير (أو تكبير) للآخر فإن هذين المثلثين متشابهين.

3 – المثلثان المتقايسان هما مثلثان متشابهان والعكس ليس صحيحا.

مبرهنة : المثلثان المتشابهان أضلاعهما المتماثلة متناسبة.

نسبة تشابه مثلثين :

تعريف : ليكن ABC و $A'B'C'$ مثلثين متشابهين ، نسمي نسبة التشابه هذين المثلثين العدد الحقيقي الموجب غير المعدوم k حيث : $\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{A'C'}{AC}=\dfrac{B'C'}{BC}=k$

ملاحظات : لتكن k نسبة تشابه المثلثين ABC و $A'B'C'$ حيث $\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{A'C'}{AC}=\dfrac{B'C'}{BC}=k$

1 – $\dfrac{1}{k}$ هي أيضا نسبة تشابه المثلثين ABC و $A'B'C'$.

4 – إذا كان $0 < k < 1$ فإن المثلث $A'B'C'$ هو تصغير للمثلث ABC ونسمي k نسبة (أو معامل) التصغير .

3 – إذا كان $k > 1$ فإن المثلث $A'B'C'$ هو تكبير للمثلث ABC ونسمي k نسبة (أو معامل) التكبير .

2 – إذا كان $k = 1$ فإن المثلث $A'B'C'$ يقايس المثلث ABC .

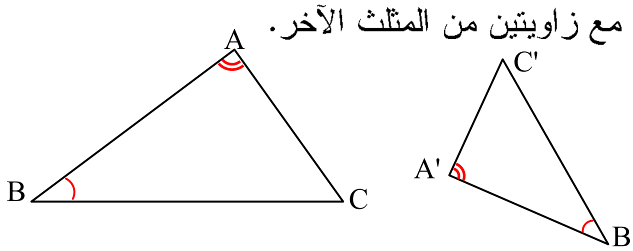
خواص : (حالات تشابه مثلثين)

خاصية 1: يتشابه مثلثان إذا تقايست زاويتان من أحد المثلثين مع زاويتين من المثلث الآخر.

مثال : بما أن : $A = A'$ و $B = B'$

فإن المثلثان ABC و $A'B'C'$ متشابهين .

ملاحظة : المثلث $A'B'C'$ هو تصغير للمثلث ABC



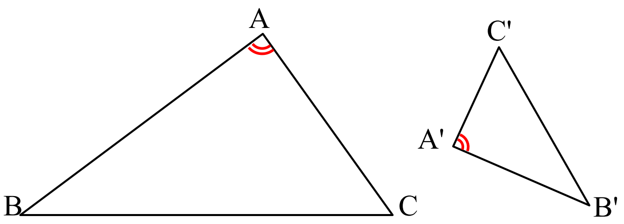
خاصية 2 : يتشابه مثلثان إذا تقايست زاوية من أحد المثلثين مع زاوية من المثلث الآخر وكان طولا الضلعين الذين يحصران إحدى الزاويتين متناسبين مع طولي الضلعين الذين يحصران الزاوية الأخرى.

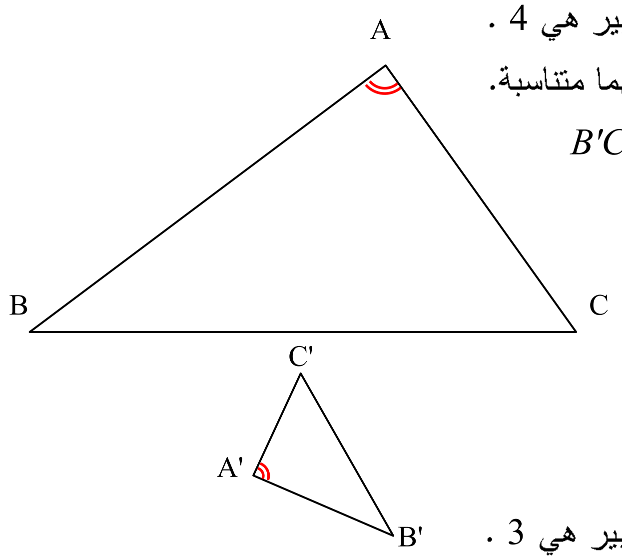
مثال : $A = A'$ و $A'C' = 1,5\ cm$ و $A'B' = 2\ cm$

و $AB = 4\ cm$ و $AC = 3\ cm$

لدينا : $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{4}{2}=2$ و $\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{3}{1,5}=2$

إذن : $\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{AB}{A'B'}=2$ ومنه المثلثان ABC و $A'B'C'$ متشابهان .





ملاحظة : المثلث ABC هو تكبير للمثلث $A'B'C'$ ونسبة التكبير هي 4 .

خاصية 3: يتشابه مثلثان إذا كان أطوال الأضلاع المتماثلة فيهما متناسبة.

مثال : $A'C' = 1,5\ cm$ و $A'B' = 2\ cm$ و $B'C' = 2,4\ cm$

و $AC = 4,5\ cm$ و $AB = 6\ cm$ و $BC = 7,2\ cm$

لدينا : $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{6}{2} = 3$ و $\dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{4,5}{1,5} = 3$

و $\dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{7,2}{2,4} = 3$ ومنه : $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'} = 3$

إذن : المثلثان ABC و $A'B'C'$ متشابهان .

ملاحظة : المثلث ABC هو تكبير للمثلث $A'B'C'$ ونسبة التكبير هي 3 .

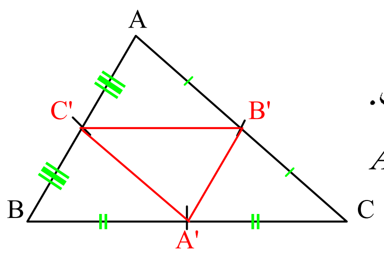
تطبيق : 69 صفحة 429

ABC مثلث ، A' ، B' ، C' منتصفات أضلاعه $[BC]$ ، $[AC]$ ، $[AB]$ على الترتيب.

أ) بين أن المثلثين ABC و $A'B'C'$ متشابهان ، وعين نسبة التشابه.

ب) أحسب النسبة $\dfrac{\text{مساحة}(ABC)}{\text{مساحة}(A'B'C')}$.

الحل :



أ) تبيان أن المثلثين ABC و $A'B'C'$ متشابهان ، وتعيين نسبة التشابه.

لدينا : A' ، B' ، C' منتصفات أضلاعه $[BC]$ ، $[AC]$ ، $[AB]$ على الترتيب.

إذن حسب نتيجة مبرهنة طاليس فإن : $(A'B') // (AB)$ و $A'B' = AC' = BC'$

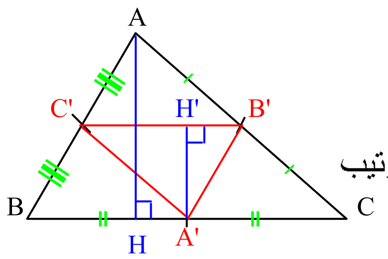
ومنه : الربعان $AB'A'C'$ و $BA'B'C'$ متوازيا أضلاع

إذن كل زاويتان متقابلتان هما متقايستان أي : $C'AB' = C'A'B'$ و $C'BA' = C'B'A'$

ومنه : $CAB = C'A'B'$ و $CBA = C'B'A'$ إذن المثلثان ABC و $A'B'C'$ متشابهان.

النقط المتماثلة : A ، B ، C

A' ، B' ، C' $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'} = 2$ ومنه نسبة التشابه (التكبير) هي 4 .



ب) حساب النسبة $\dfrac{\text{مساحة}(ABC)}{\text{مساحة}(A'B'C')}$.

H و H' هما المسقطان العموديان لـ A و A' على (BC) و $(B'C')$ على الترتيب

المثلثان القائمان AHB و $A'H'B'$ متشابهان لأن لهما زاويتان قائمتان

و $CBA = C'B'A'$ أي : $HBA = H'B'A'$ ومنه $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AH}{A'H'} = \dfrac{BH}{B'H'} = 2$ ومنه: $AH = 2\ A'H'$.

مساحة(ABC) = $2\ AH \times BC = 2\ (2A'H')(2B'C') = 4(2A'H' \times B'C') = 4 \times$مساحة$(A'B'C')$

إذن : $\dfrac{\text{مساحة}(ABC)}{\text{مساحة}(A'B'C')} = 4$.

7. التحويلات النقطية:

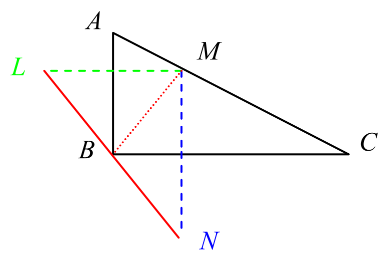
نشاط 1 : 208 صفحة 842

ABC مثلث قائم في B ، M نقطة من وتره $[AC]$. النقطتان L و N نظيرتا النقطة M بالنسبة إلى (AB) و (BC) على الترتيب.

ماذا تمثل النقطة B بالنسبة إلى $[LN]$. ما القول عن النقطتين L و N بالنسبة إلى B.

نرسم النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABDC$ متوازي الأضلاع. قارن بين الشعاعين $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BD}$ ، ماذا تمثل النقطة D بالنسبة إلى النقطة B.

حل النشاط :



L نظيرة M بالنسبة إلى (AB) إذن المستقيم (AB) هو محور القطعة $[LM]$

ومنه : المثلث BLM متساوي الساقين رأسه B إذن $BL = BM$

و (AB) يكون منصف الزاوية $\hat{LBM}$ أي : $\hat{LBM} = 2\times \hat{ABM}$

N نظيرة M بالنسبة إلى (BC) إذن المستقيم (BC) هو محور القطعة $[MN]$

ومنه : المثلث BNM متساوي الساقين رأسه B إذن $BN = BM$

و (BC) يكون منصف الزاوية $\hat{MBN}$ أي : $\hat{MBN} = 2\times \hat{MBC}$

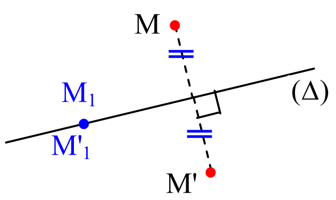
وبالتالي : $BN = BL$

ولدينا : $\hat{LBN} = \hat{LBM} + \hat{MBN} = 2\times \hat{ABM} + 2\times \hat{MBC} = 2(\hat{ABM} + \hat{MBC}) = 2\,\hat{ABC} = 180°$

ومنه L ، B ، N على استقامة واحدة.   وبالتالي : النقطة B هي منتصف القطعة $[LN]$.

2) تعاريف :

- **تعريف التناظر المحوري :**

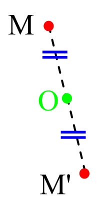


(Δ) مستقيم ثابت ، **التناظر المحوري** بالنسبة إلى المستقيم (Δ) هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي ، النقطة M' من المستوي حيث :

إذا كان M تنتمي إلى (Δ) فإن M' تكون منطبقة على M ،

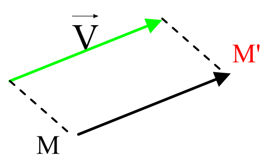
وإذا كانت M لا تنتمي إلى (Δ) فإن : (Δ) يكون محور القطعة $[MM']$.

- **تعريف التناظر المركزي :**



O نقطة ثابتة من المستوي ، **التناظر المركزي** بالنسبة إلى النقطة O هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي ، النقطة M' من المستوي حيث : تكون النقطة O منتصف القطعة $[MM']$.

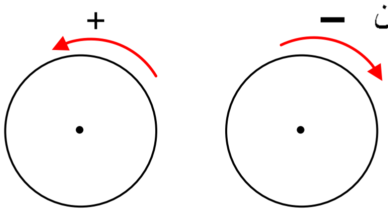
- **تعريف الانسحاب :**



$\vec{V}$ شعاع ثابت من المستوي ، **الانسحاب** الذي شعاعه $\vec{V}$ هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي ، النقطة M' من المستوي حيث : $\overrightarrow{MM'} = \vec{V}$

ملاحظة : إذا كان $\vec{V} = \overrightarrow{AB}$ فإن الرباعي $ABMM'$ هو متوازي أضلاع.

• توجيه المستوي :



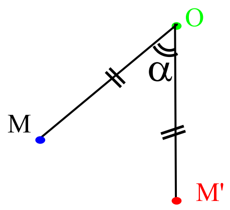
لتكن (C) دائرة من المستوي ، يمكن أن نحدد على هذه الدائرة اتجاهين و اتجاهين فقط ، أحدهما عكس اتجاه حركة عقارب الساعة ويسمى الاتجاه **المباشر** (أو **الاتجاه الموجب**) ، والآخر مثل اتجاه حركة عقارب الساعة ويسمى الاتجاه **غير المباشر** (أو **الاتجاه السالب**).

تعريف : توجيه المستوي هو اختيار اتجاه واحد على كل دوائر هذا المستوي.

ملاحظة : لتوجيه مستو عادة ما نختار الاتجاه المباشر (عكس اتجاه حركة عقارب الساعة).

• **تعريف الدوران :**

O نقطة ثابتة من مستو موجه ، و α زاوية معلومة ، **الدوران** الذي مركزه النقطة O وزاويته α في الاتجاه المباشر هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي ، النقطة M' من المستوي حيث :



إذا كانت M منطبقة على O فإن النقطة M' تكون منطبقة على O.

وإذا كانت M تختلف عن النقطة O فإن : $OM' = OM$ و $MOM' = \alpha$

والثلاثية (O , M , M') مباشرة.

ملاحظة : في كل حالة النقطة M' تسمى صورة النقطة M بالتحويل النقطي .

8) خواص :

• **النقط الصامدة :**

تعريف : نقول عن نقطة أنها صامدة بتحويل نقطي إذا كانت منطبقة على صورتها بواسطة هذا التحويل.

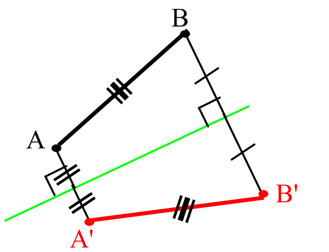
أمثلة :

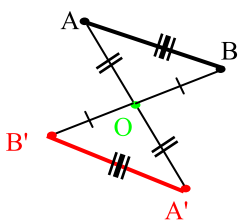
- ✓ **التناظر المحوري** الذي محوره المستقيم (Δ): كل نقط المستقيم (Δ) هي نقط صامدة بهذا التحويل.
- ✓ **التناظر المركزي** الذي مركزه النقطة A : يقبل نقطة صامدة وحيدة وهي المركز A.
- ✓ **الانسحاب** الذي شعاعه غير معدوم لا يقبل نقط صامدة.
- ✓ **الدوران** الذي مركزه O وزاويته α حيث : $\alpha \neq k \times 180°$ و k عدد طبيعي ، يقبل نقطة صامدة وحيدة وهي المركز O.
- ✓ **ملاحظة :** إذا كانت $\alpha = 2k \times 180°$ و k عدد طبيعي ، في هذه الحالة التحويل النقطي يسمى التحويل المطابق في المستوي وكل نقط المستوي هي صامدة بهذا التحويل.

• **حفظ المسافات (التقايس)**

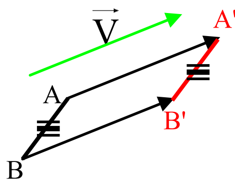
تعريف : التقايس هو كل تحويل نقطي الذي يرفق بكل ثنائية نقطية (A , B) الثنائية النقطية (A' , B') حيث : $A'B' = AB$. نقول عنه أنه يحافظ على المسافات.

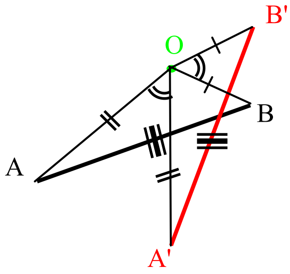
أمثلة :





- ✓ A' و B' صورتا A و B على الترتيب **بالتناظر المحوري** الذي محوره المستقيم (Δ) : لدينا : $A'B' = AB$
- ✓ A' و B' صورتا A و B على الترتيب **بالتناظر المركزي**





الذي مركزه النقطة O : لدينا $A'B' = AB$

✓ A' و B' صورتا A و B على الترتيب **بالانسحاب** الذي شعاعه غير معدوم $\vec{V}$: لدينا $A'B' = AB$

✓ A' و B' صورتا A و B على الترتيب **الدوران** الذي مركزه O وزاويته α : لدينا $A'B' = AB$

مبرهنة : كل من التناظر المحوري، التناظر المركزي، الانسحاب، الدوران، هو تقايس (يحافظ على المسافات).

نتيجة : يتقايس مثلثان إذا كان أحدهما صورة للمثلث الآخر بانسحاب ، أو تناظر محوري ، أو تناظر مركزي ، أو دوران.

ملاحظة : إذا كان مثلثان يتطابق بالسحب أو التدوير فنقول عن تقايسهما أنه مباشر ، وإن كان لا يتطابق إلا بعد قلب أحدهما فنقول عن تقايسهما أنه غير مباشر.

- **حفظ أقياس الزوايا :**

مبرهنة : صورة زاوية بتقايس هي زاوية تقايسها.

- **حفظ الاستقامية :**

مبرهنة : إذا كانت A ، B ، C في استقامية فإن صورها A' ، B' ، C' ، بتقايس ، تكون في استقامية.

نتائج :

- صورة مستقيم بتقايس (تناظر محوري ، تناظر مركزي ، انسحاب ، دوران) هو مستقيم.
- صورة مستقيم بتناظر مركزي أو انسحاب هي مستقيم موازيا له
- صورة مستقيم (D) بتناظر محوري بالنسبة إلى (Δ) هي المستقيم (D') حيث :

إذا كان (D) و (Δ) متوازيين فإن (D) يوازي (D') وإذا كان (D) و (Δ) متقاطعان فإن (D) يقطع (D') في نفس النقطة.

- صورة مستقيم (D) بدوران هي مستقيم (D') حيث إحدى الزوايا المحصورة بين (D) و (D') تقايس زاوية الدوران.

تطبيق 1 : 200 صفحة 842

$ABCD$ متوازي أضلاع. E ، F ، G ، H نقط من $[AB]$ ، $[BC]$ ، $[CD]$ ، $[AD]$ على الترتيب حيث : $AE = CG$ و $AH = CF$.

أ) ما هو التحويل النقطي الذي يحول A إلى C ويحول B إلى D ؟

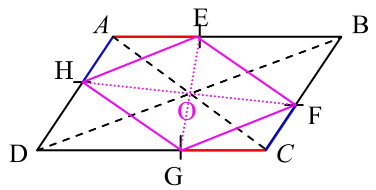
ب) ما هي طبيعة الرباعي $EFGH$ ؟

الحل :

أ) تعيين التحويل النقطي الذي يحول A إلى C ويحول B إلى D :

$ABCD$ متوازي أضلاع إذن قطراه $[AC]$ ، $[BD]$ متناصفان في النقطة O.

إذن C هي صورة A و D هي صورة B بالتناظر المركزي الذي مركزه O.



ب) طبيعة الرباعي $EFGH$:

الطريقة 1 : $(AE) // (GC)$ و $AE = GC$ إذن الرباعي $AECG$ متوازي أضلاع ومنه قطراه $[AC]$ ، $[EG]$ متناصفان في النقطة O. وبالتالي : G هي صورة E بالتناظر المركزي الذي مركزه O.

$(AH) // (FC)$ و $AH = FC$ إذن الرباعي $AFCH$ متوازي أضلاع ومنه قطراه $[AC]$ ، $[HF]$ متناصفان في النقطة O. وبالتالي : H هي صورة F بالتناظر المركزي الذي مركزه O.

لدينا G هي صورة E بالتناظر المركزي الذي مركزه O و H هي صورة F بالتناظر المركزي الذي مركزه O

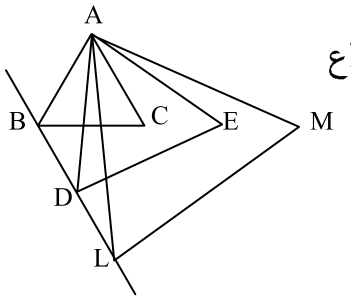
إذن $[HG]$ هي صورة $[EF]$ بالتناظر المركزي الذي مركزه O ومنه : $(HG) // (EF)$

والتناظر المركزي يحافظ على المسافات أي : $HG = EF$ وبالتالي الرباعي $EFGH$ هو متوازي أضلاع.

الطريقة 2 : نقارن بين المثلثين AEH و CFG ثم بين BEF و DGH.

ونحصل على النتيجتين : $EH = FG$ و $HG = EF$.

تطبيق 2 : 201 صفحة 842



يمثل الشكل المقابل ثلاثة مثلثات ABC ، ADE ، ALM كل منها متقايسة الأضلاع حيث النقط B ، D ، L في استقامية. بين أن النقط C ، E ، M في استقامية.

الحل :

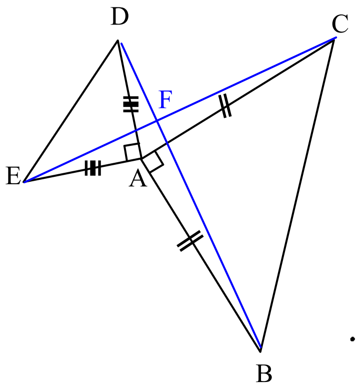
بما أن المثلثات متقايسة الأضلاع فإن : $AC = AB$ ، $AE = AD$ ، $AM = AL$

و $B\hat{A}C = D\hat{A}E = L\hat{A}M = 60°$

ومنه : C ، E ، M هي صور B ، D ، L بالدوران الذي مركزه A وزاويته $60°$.

وبما أن الدوران يحافظ على الاستقامية و النقط B ، D ، L في استقامية فإن النقط C ، E ، M في استقامية كذلك.

تطبيق 3 : 202 صفحة 842 (نفس معطيات التمرين 21)



ABC و ADE مثلثان كل منهما قائم ومتساوي الساقين كما هو مبين في الشكل ، $[CE]$ و $[BD]$ متقاطعان في النقطة F.

بين باستعمال الدوران أن المستقيمين (BD) و (CE) متعامدان.

الحل :

نوجه المستوي في الاتجاه المباشر ، ونعتبر الدوران الذي مركزه A وزاويته $90°$.

إذن صورة B هي C و صورة D هي E بهذا الدوران

ومنه صورة المستقيم (BD) هي المستقيم (CE) بنفس الدوران إذن إحدى زوايا المحصورة بين المستقيمين (BD) و (CE) تقايس زاوية الدوران التي هي $90°$ ومنه : المستقيمان (BD) و (CE) متعامدان.

تطبيق 4 : 202 صفحة 842 (تركيب تناظرين بالنسبة إلى نقطتين متمايزتين)

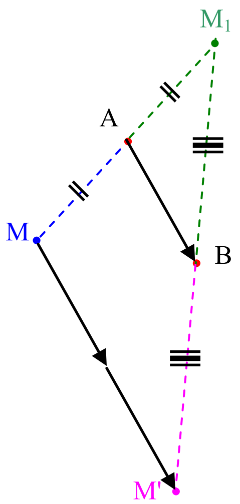
A ، B نقطتان ثابتتان ومتمايزتين ، علم نقطة M ، ثم أنشئ M_1 نظيرتها بالنسبة إلى A ، و M' نظيرة M_1 بالنسبة إلى B.

نقول أن النقطة M' هي صورة M بمركب التناظر بالنسبة إلى A و التناظر بالنسبة إلى B.

أ) عبر عن $\overrightarrow{MM'}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$.

ب) استنتج نوع التحويل الناتج عن مركب تناظرين مركزيين.

الحل :



أ) عبر عن $\overrightarrow{MM'}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$.

لدينا A منتصف $[MM_1]$ و B منتصف $[M_1M']$ إذن حسب نتائج مبرهنة طاليس

نجد : $(AB) // (MM')$ و $MM' = 2\ AB$

بما أن $\overrightarrow{MM'}$ و $\overrightarrow{AB}$ لهما نفس الاتجاه فإن : $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{AB}$

ب) استنتج نوع التحويل الناتج عن مركب تناظرين مركزيين.

لدينا : $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{AB}$ ومنه M' هي صورة M بالانسحاب الذي شعاعه $2\overrightarrow{AB}$

وبالتالي : مركب التناظر المركزي بالنسبة إلى A و التناظر المركزي بالنسبة إلى B بهذا الترتيب هو انسحاب شعاعه $2\overrightarrow{AB}$.

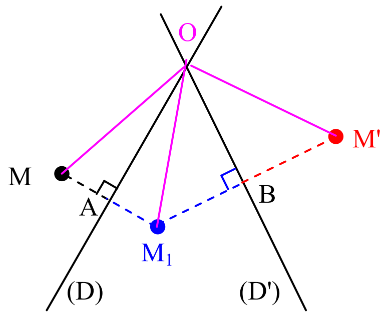
تطبيق 5 : 842 صفحة 220 (تركيب تناظرين بالنسبة إلى مستقيمين متقاطعين)

(D) و (D') مستقيمان متقاطعان في نقطة O ، علم النقطة M ، ثم أنشئ M_1 نظيرتها بالنسبة إلى (D) ، و M' نظيرة M_1 بالنسبة إلى (D').

أ) بين أن : $OM = OM'$ و ، أن الزاوية $M\hat{O}M'$ ثابتة.

ب) استنتج نوع التحويل الناتج عن مركب تناظرين بالنسبة إلى مستقيمين متقاطعين.

الحل :



أ) بين أن : $OM = OM'$ و ، أن الزاوية $M\hat{O}M'$ ثابتة.

لدينا : (D) محور القطعة $[MM_1]$ ويتقاطعان في A .

إذن : $OM = OM_1$ و $M\hat{O}A = A\hat{O}M_1$

ولدينا : (D') محور القطعة $[M_1M']$ ويتقاطعان في B .

إذن : $OM_1 = OM'$ و $M_1\hat{O}B = B\hat{O}M'$ ومنه : $OM = OM'$

نوجه المستوي في الاتجاه المباشر ونضع α قياس الزاوية المحصورة بين المستقيمين (D) و (D')

أي $A\hat{O}B = \alpha$. $\quad M\hat{O}M' = M\hat{O}M_1 + M_1\hat{O}M' = 2\,A\hat{O}M_1 + 2\,M_1\hat{O}B = 2\,A\hat{O}B = 2\alpha$

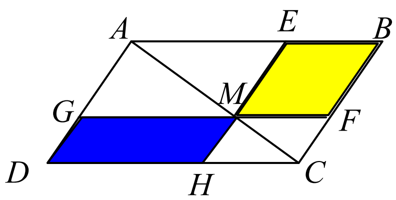
ب) استنتج نوع التحويل الناتج عن مركب تناظرين بالنسبة إلى مستقيمين متقاطعين.

لدينا : $OM = OM'$ و $M\hat{O}M' = 2\alpha$ إذن M' هي صورة M بالدوران الذي مركزه O وزاويته 2α

وبالتالي مركب تناظرين بالنسبة إلى مستقيمين متقاطعين هو الدوران الذي مركزه نقطة تقاطع هذين المستقيمين وزاويته ضعف الزاوية المحصورة بينهما.

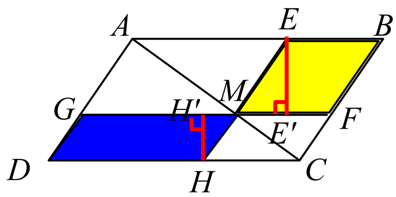
حلول تمارين الكتاب المدرسي

التمرين 92 صفحة 932



$ABCD$ متوازي أضلاع ، M نقطة من $[AC]$ ،
(EH) يوازي (AD) ويشمل النقطة M ،
(FG) يوازي (AB) ويشمل النقطة M .
قارن بين مساحة $EBFM$ و مساحة $HDGM$.

الحل :



نرمز إلى المساحة بـــ : s

ولدينا $s(EBFM) = EE' \times MF$ و $s(HDGM) = HH' \times MG$

حيث : H' و E' المسقطان العموديان للنقطتين H و E على المستقيم (GF) على الترتيب.

لدينا $(EE') // (HH')$ ومنه حسب مبرهنة طاليس فإن : $\frac{HH'}{EE'} = \frac{MH}{ME} = \frac{MH'}{ME'}$

ولدينا $(AE) // (HC)$ ومنه حسب مبرهنة طاليس فإن : $\frac{HC}{AE} = \frac{MH}{ME} = \frac{MC}{MA}$

ومنه $\frac{HC}{AE} = \frac{HH'}{EE'}$ و هذا معناه $HH' \times AE = EE' \times HC$ . . . (1)

لدينا $(GM) // (AE)$ و $(EM) // (AG)$ إذن $AGME$ متوازي أضلاع ومنه : $AE = MG$

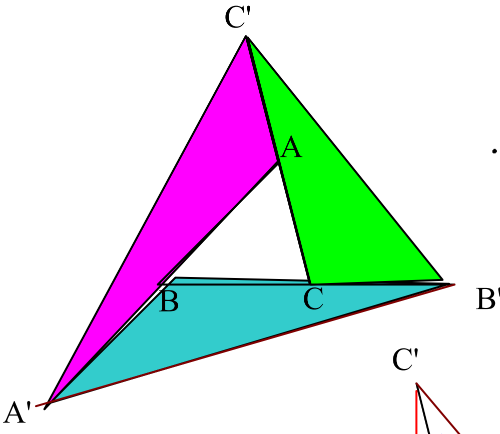
وبنفس الطريقة نحصل على $EBFM$ متوازي أضلاع ومنه : $BE = MF$

وبالتالي العلاقة (1) تصبح : $HH' \times MG = EE' \times MF$ ومنه : $s(EBFM) = s(HDGM)$

التمرين 43 صفحة 032

نرمز بـــ S : للمساحة

لدينا : $S(A'B'C') = S(ABC) + S(C'CB') + S(B'BA') + S(A'AC')$.

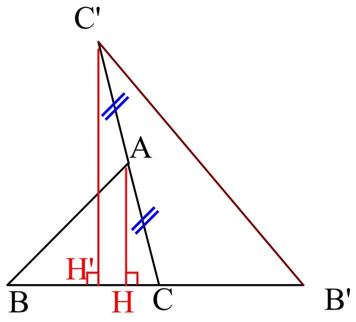


- لنحسب $S(C'CB')$ بدلالة $S(ABC)$:

المستقيم $(C'H')$ العمود المتعلق بالقاعدة $[CB']$ للمثلث $C'CB'$

إذن : $S(C'CB') = \frac{1}{2} C'H' \times CB'$

ولدينا : $S(ABC) = \frac{1}{2} AH \times BC$



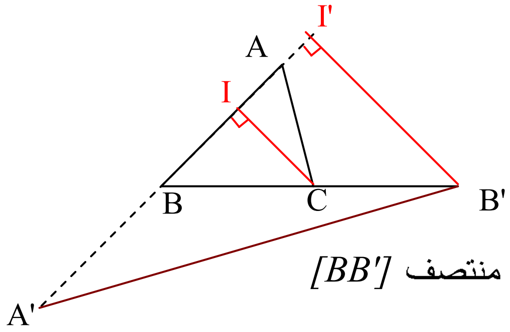
في المثلث $CC'H'$ لدينا : A منتصف $[CC']$

و $(AH) // (C'H')$ إذن حسب نتائج مبرهنة طاليس لدينا :

H منتصف $[H'C]$ و $C'H' = 2AH$

وبما أن : $CB' = BC$ فإن : $S(C'CB') = \frac{1}{2} 2AH \times CB$ إذن : $\boxed{S(C'CB') = 2S(ABC)}$

- لنحسب $S(BB'A')$ بدلالة $S(ABC)$:



المستقيم $(B'I')$ العمود المتعلق بالقاعدة $[A'B]$ للمثلث $BB'A'$

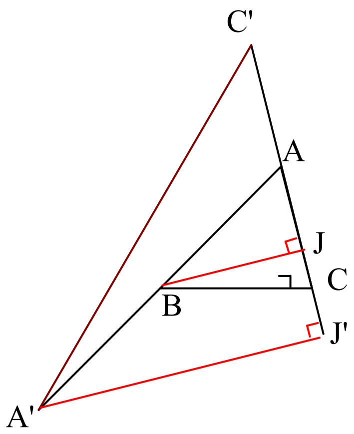
إذن : $S(BB'A') = \frac{1}{2} B'I' \times A'B$

ولدينا : $S(ABC) = \frac{1}{2} CI \times BA$ ؛ في المثلث $BB'I'$ لدينا : C منتصف $[BB']$

و $(CI) // (B'I')$ إذن حسب نتائج مبرهنة طاليس لدينا : I منتصف $[BI']$ و $B'I' = 2IC$

وبما أن : $BA' = BA$ فإن : $S(BB'A') = \frac{1}{2} 2IC \times BA$ إذن : $\boxed{S(BB'A') = 2S(ABC)}$

- لنحسب $S(A'AC')$ بدلالة $S(ABC)$:



المستقيم $(A'J')$ العمود المتعلق بالقاعدة $[C'A]$ للمثلث $A'AC'$

إذن : $S(A'AC') = \frac{1}{2} A'J' \times C'A$ ولدينا : $S(ABC) = \frac{1}{2} BJ \times AC$

في المثلث $AA'J'$ لدينا : B منتصف $[AA']$ و $(BJ) // (A'J')$

إذن حسب نتائج مبرهنة طاليس لدينا : J منتصف $[AJ']$ و $A'J' = 2BJ$

وبما أن : $C'A = AC$ فإن : $S(A'AC') = \frac{1}{2} 2BJ \times AC$

إذن : $\boxed{S(A'AC') = 2S(ABC)}$

خلاصة : $S(A'B'C') = S(ABC) + 2\ S(ABC) + 2\ S(ABC) + 2\ S(ABC)$

أي : $\boxed{S(A'B'C') = 7\ S(ABC)}$

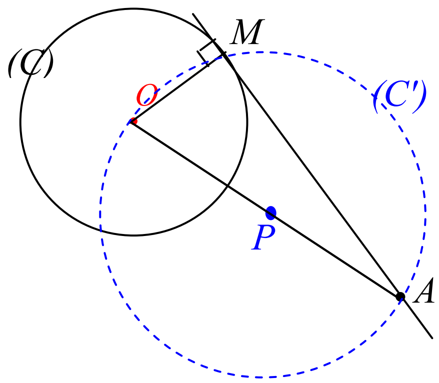
التمرين 43 صفحة 433

أرسم دائرة (C) مركزها O ، علم نقطة A خارجها.

أنشئ المماس للدائرة (C) الذي يشمل النقطة A .

الحل :

مرحلة التحليل :



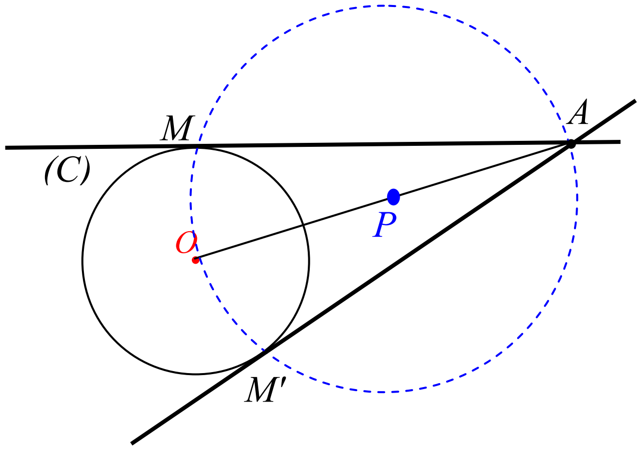
نفرض أن للمسألة حل ونرسم الشكل المناسب .

نعين النقطة M نقطة التماس ، المثلث OAM قائم في M .

مركز الدائرة (C') المحيطة بهذا المثلث هو P منتصف $[OA]$.

إذن **النقطة M هي نقطة تقاطع الدائرتين (C) و (C')** .

مرحلة التركيب والإنشاء :



نسمي P منتصف $[OA]$

ونرسم الدائرة (C') قطرها $[OA]$

الدائرة (C') تقطع الدائرة (C) في نقطتين M و M' .

المثلثان AMO و $AM'O$ قائمان في M و M' على الترتيب

إذن المستقيم (AM) عمودي على (OM)

وبالتالي المستقيم (AM) مماس للدائرة (C) .

كذلك المستقيم (AM') مماس للدائرة (C) .

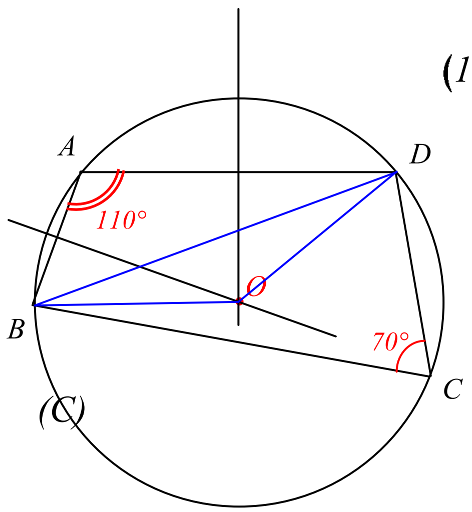
أي المسألة تقبل حلين.

التمرين 47 صفحة 433

أرسم رباعيا $ABCD$ حيث $BAD = 110°$ و $BCD = 70°$.

1. بين أن رؤوسه تنتمي إلى دائرة واحدة يطلب تعيين مركزها O.
4. أحسب أقياس زوايا المثلث BOD .

الحل :



1. بين أن رؤوسه تنتمي إلى دائرة واحدة يطلب تعيين مركزها O.

الزاويتان BAD و BCD متقابلتان ومتكاملتان $(110° + 70° = 180°)$

إذن الرباعي $ABCD$ دائري .

المستقيم (d) و (d') محوري القطعتين $[AB]$ و $[AD]$ على الترتيب

يتقاطعان في النقطة O ومنه النقط A ، B ، D تنتمي إلى الدائرة (C)

التي مركزها O . والدائرة (C) وحيدة وبما أن الرباعي $ABCD$ دائري

فإن النقطة C كذلك تنتمي إلى الدائرة (C) .

4. أحسب أقياس زوايا المثلث BOD .

لدينا : $BOD = 2BCD = 140°$

ولدينا المثلث BOD متساوي الساقين لأن $OB = OD$ (نصفي قطر الدائرة).

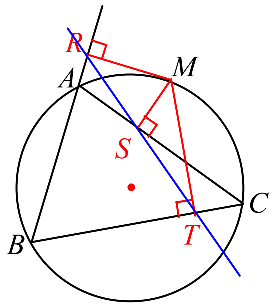
إذن : $ODB = OBD$ وبما أن $ODB + OBD + BOD = 180°$ فإن : $ODB = OBD = \frac{1}{2}(180 - 140)$

أي : $ODB = OBD = 20°$.

التمرين 44 صفحة 433 (مستقيم سيمسون)

ABC مثلث ، M نقطة من الدائرة المحيطة به ، النقط R ، S ، T هي المساقط العمودية للنقطة M على (AB) ، (AC) ، (BC) على الترتيب .

نريد أن نبين أن النقط R ، S ، T تنتمي إلى نفس المستقيم (يسمى مستقيم سيمسون)



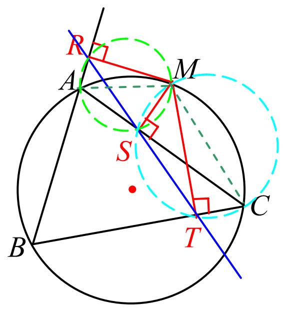
أ) بين أن للزاويتين RAM ، BCM نفس القيس .

ب) بين أن النقط R ، A ، S ، M تنتمي إلى دائرة واحدة ، واستنتج تساوي الزاويتين RAM ، RSM .

ج) بين أن النقط M ، S ، T ، C تنتمي إلى دائرة واحدة ، واستنتج علاقة بين الزاويتين MST ، TCM .

د) أحسب قيس الزاوية RST . ماذا تستنتج ؟

الحل :



أ) بين أن للزاويتين RAM ، BCM نفس القيس .

بما أن الرباعي $ABCM$ دائري فإن كل زاويتين متقابلتين متكاملتان.

ومنه $BCM + BAM = 180°$

ولدينا : $RAM + BAM = 180°$ إذن : $\boxed{RAM = BCM}$

ب) بين أن النقط R ، A ، S ، M تنتمي إلى دائرة واحدة ، واستنتج تساوي الزاويتين RAM ، RSM .

الرباعي $RSAM$ دائري لأن له زاويتين متقابلتين قائمتين وبالتالي متكاملتين

ومنه $\boxed{RAM = RSM}$ (تحصران نفس القوس RM).

ج) بين أن النقط M ، S ، T ، C تنتمي إلى دائرة واحدة ، واستنتج علاقة بين الزاويتين MST ، TCM .

لدينا $MSC = MTC = 90°$ ومنه الرباعي $MSTC$ دائري

(أو المثلثان القائمان MSC و MTC محيطان بنفس الدائرة ذات القطر $[MC]$).

إذن الزاويتان MST و TCM متكاملتان أي : $MST + TCM = 180°$

د) أحسب قيس الزاوية RST . ماذا تستنتج ؟

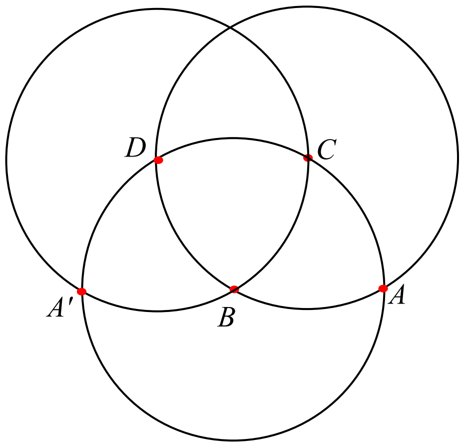
مما سبق نستنتج أن $BCM = RSM$ أي : $TCM = RSM$

إذن : $RSM + MST = 180°$ ومنه : $RST = 180°$ وبالتالي النقط R ، S ، T تنتمي إلى نفس المستقيم .

التمرين 47 صفحة 433

A و B نقطتان متمايزتان ، علم باستعمال المدور فقط ودون استعمال المسطرة النقطة A' نظيرة A بالنسبة إلى B.
برر طريقة إجابتك.

الحل :



نرسم الدائرة (c) ذات المركز B ونصف القطر $[AB]$.

نعين على الدائرة (c) النقط C ، D ، A' حيث :

$AB = AC = CD = DA'$ و النقطة C تكون منتصف القوس AD .

لدينا المثلثات ACB و CBD و DBA' متقايسة الأضلاع

ومنه كل زاوية من هذه المثلثات تساوي $60°$.

إذن : $ABC + CBD + DBA' = 3 \times 60° = 180°$

ومنه : $ABA' = 180°$ أي : $[AA']$ قطر للدائرة (c) ذات المركز B .

ومنه A' نظيرة A بالنسبة للنقطة B .

التمرين 47 صفحة 433

ABC مثلث زواياه حادة ، H نقطة تلاقي إرتفاعاته $[AM]$ ، $[BN]$ ، $[CL]$.

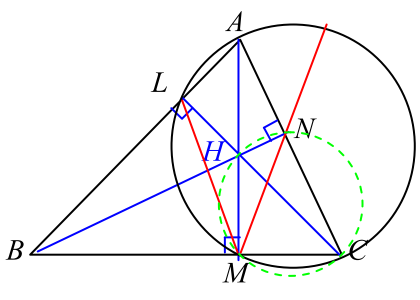
أ) بين أن (MA) منصف للزاوية LMN . (إرشاد : حدد الرباعي الدائري في الشكل)

ب) ماذا تمثل النقطة H بالنسبة إلى المثلث LMN ؟

الحل :

أ) تبيان أن (MA) منصف للزاوية LMN . (إرشاد : حدد الرباعي الدائري في الشكل)

لدينا : $ALC = AMC = 90°$ إذن : الرباعي $ACML$ دائري في الدائرة ذات القطر $[AC]$.



إذن : $LMA = LCA$ تحصران نفس القوس AL .

في الرباعي $HNCM$ الزاويتان المتقابلتان HNC و HMC قائمتان

إذن هما متكاملتان وبالتالي الرباعي $HNCM$ دائري في الدائرة ذات القطر $[HC]$. ومنه : $HMN = HCN$ تحصران نفس القوس HN

أي : $AMN = LCA$

لدينا : $LMA = LCA$ و $AMN = LCA$ إذن : $LMA = AMN$ وبالتالي (MA) منصف للزاوية LMN .

ب) ماذا تمثل النقطة H بالنسبة إلى المثلث LMN ؟

بنفس الطريقة للسؤال أ) نبين أن (NB) منصف للزاوية LNM و (LC) منصف للزاوية MLN .

وتكون H نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث LMN .

التمرين 78 صفحة 433

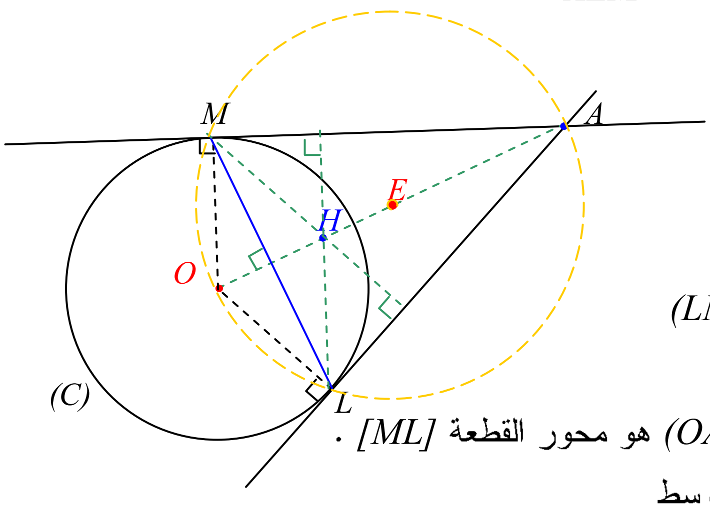
أرسم دائرة (C) مركزها O ، علم نقطة A خارجها. المماسان للدائرة (C) اللذان يشملان النقطة A يمساها في النقطتين L ، M .

أ) ما نوع المثلث ALM ؟

ب) بين أن النقطة H نظيرة النقطة O بالنسبة إلى (LM) هي نقطة تلاقي أعمدة المثلث ALM .

ج) ماذا تمثل النقطة E منتصف $[AO]$ بالنسبة إلى المثلث ALM ؟

الحل :



أ) نوع المثلث ALM :

$A\hat{L}M = A\hat{M}L$ تحصران نفس القوس $\overset{\frown}{ML}$.

ومنه المثلث ALM متساوي الساقين رأسه A .

ب) بين أن النقطة H نظيرة النقطة O بالنسبة إلى (LM)

هي نقطة تلاقي أعمدة المثلث ALM .

لدينا المثلث ALM متساوي الساقين رأسه A ، إذن (OA) هو محور القطعة $[ML]$.

أي : (OA) هو ارتفاع في المثلث ALM ، وكذلك متوسط

لدينا $[OH]$ و $[ML]$ متعامدان ومتناصفان إذن الرباعي $MOLH$ هو معين

ومنه $(OM) // (HL)$ و $(MH) // (OL)$ وبالتالي $(HM)\perp(AL)$ و $(LH)\perp(AM)$

إذن النقطة H هي نقطة تلاقي أعمدة المثلث ALM .

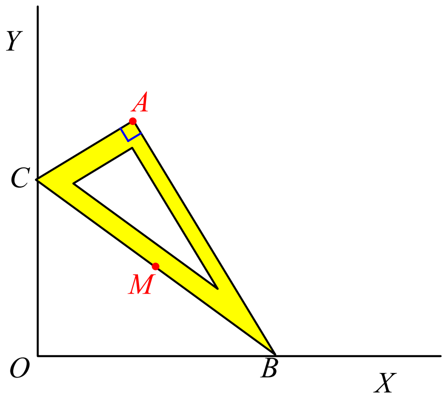
ج) ماذا تمثل النقطة E منتصف $[AO]$ بالنسبة إلى المثلث ALM ؟

لدينا : OMA و OLA متكاملتان إذن الرباعي $AMOL$ دائري في الدائرة ذات القطر $[AO]$ و المركز E

ومنه الرؤوس A ، M ، L تنتمي إلى الدائرة ذات المركز E وقطرها $[AO]$.

وبالتالي : E هي نقطة تلاقي محاور المثلث ALM .

التمرين 71 صفحة 433



$[OX)$ و $[OY)$ نصفا مستقيمين متعامدان في النقطة O ،

نفترض ABC كوسا ونحركه بحيث تتحرك B على $[OX)$

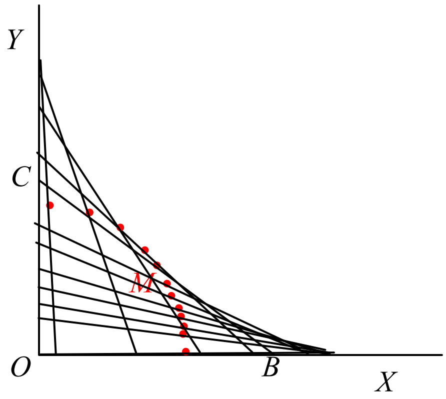
وتتحرك C على $[OY)$.

أ) ما هو المسار الذي تتحرك عليه النقطة M منتصف $[BC]$ ؟

ب) ما هو المسار الذي تتحرك عليه النقطة A ؟

(إرشاد : بين أن الزاوية AOB ثابتة)

الحل :



أ) تعيين المسار الذي تتحرك عليه النقطة M منتصف $[BC]$:

نرمز بـــ (e) مجموعة النقط (المسار) المطلوبة ،

نرسم عدة نقط ونستغلها لتخمين النتيجة :

نلاحظ في هذه الحالة أن المسار هو عبارة عن ربع دائرة مركزها O

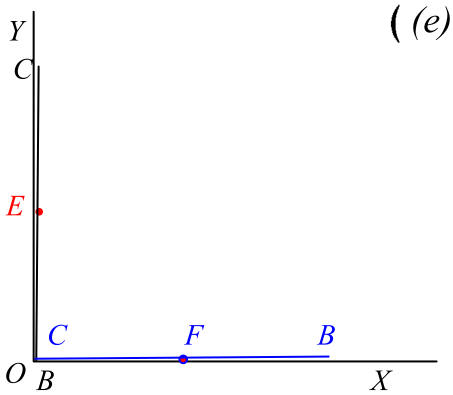
ونصف قطرها $\frac{BC}{2}$.نرمز له بالرمز $\overset{\frown}{EF}$

لنبرهن أن $(e) = \overset{\frown}{EF}$: **ولهذا نتبع المراحل التالية :**

1)نبين أن (e) مجموعة غير خالية

4)نبين أن كل نقطة M من (e) تنتمي إلى $\overset{\frown}{EF}$ (أي (e) محتواة في $\overset{\frown}{EF}$)

4)نبين أن كل نقطة M من $\overset{\frown}{EF}$ تنتمي إلى (e) (أي $\overset{\frown}{EF}$ محتواة في (e))



- لنبين أن (E) مجموعة غير خالية

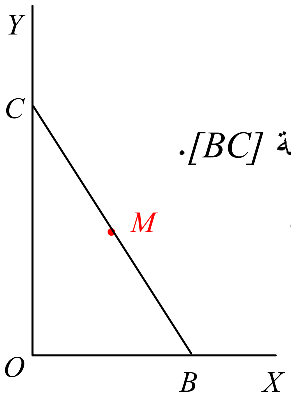
إذا أخذنا B منطبقة على O فإن النقطة C تكون في $[OY)$

و النقطة E منتصف $[BC]$ توجد في $[OY)$ وهي تنتمي إلى (e)

إذن : $(e) \neq \Phi$

إذا أخذنا C منطبقة على O فإن النقطة B تكون في $[OX)$

و النقطة F منتصف $[BC]$ توجد في $[OX)$ وهي تنتمي إلى (e)



- لنبين أن كل نقطة M من (e) تنتمي إلى $\overset{\frown}{EF}$

لتكن M نقطة تنتمي إلى المجموعة (e) .

توجد نقطة B من $[OX)$ وتوجد نقطة C من $[OY)$ بحيث : M تكون منتصف القطعة $[BC]$.

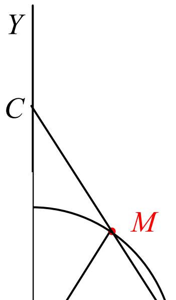
المثلث COB قائم في B و النقطة M منتصف القطعة $[BC]$ ، إذن : $OM = \frac{1}{2}BC$

ومنه النقطة M تنتمي إلى $\overset{\frown}{EF}$ ربع الدائرة ذات المركز O و نصف القطر $\frac{BC}{2}$

وبالتالي : $(e) \subset \overset{\frown}{EF} \quad . . . (1)$

- لنبين أن كل نقطة M من $\overset{\frown}{EF}$ تنتمي إلى (e)

لتكن M نقطة تنتمي إلى المجموعة $\overset{\frown}{EF}$



نعين نقطة B من $[OX)$ و نعين نقطة C من $[OY)$ حيث : $OB = OC = OM$

لنبرهن أن النقط B ، M ، C في استقامية.

لدينا النقط B ، O ، C تنتمي إلى الدائرة ذات المركز M

ومنه : $BMC = 2B0C = 180°$ لأن : $B0C$ زاوية محيطية

و BMC زاوية مركزية وتحصران نفس القوس.

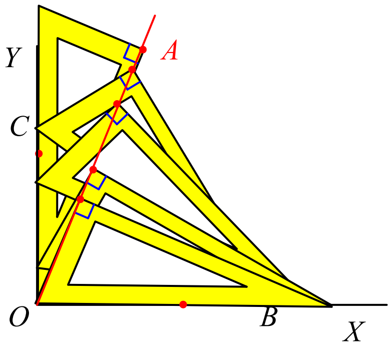
ومنه : النقط B ، M ، C في استقامية.

إذن : النقطة M منتصف القطعة $[BC]$ وبالتالي : النقطة M تنتمي إلى المجموعة (e) .

أي : $\widehat{EF} \subset (e)$ . . . (4)

خلاصة : من (1) و (4) نستنتج أن : $(e) = \widehat{EF}$

ب) تعيين المسار الذي تتحرك عليه النقطة A :



نسمي (F) المسار المطلوب ، وهي مجموعة النقط A بحيث

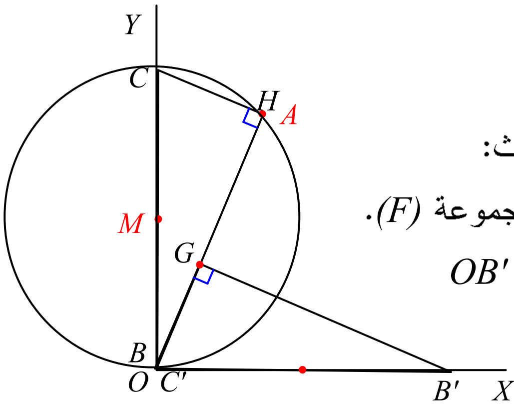
تكون النقطة B من $[OX)$ والنقطة C من $[OY)$ و ABC يمثل كوسا

أي مثلثا قائما في A . نضع الزاوية ACB للكوس هي α

نلاحظ أن النقطة A هي نقطة من قطعة مستقيمة $[GH]$.

حيث H ، G ، O في استقامية و $GOB = ACB = \alpha$

• لنبرهن أن (F) غير خالية :



إذا أخذنا B منطبقة على O فإن النقطة C تكون في $[OY)$.

نرسم الدائرة ذات المركز M منتصف $[BC]$ ونعين النقطة H منها حيث:

$BCH = \alpha$ ومنه المثلث القائم يعين كوسا إذن النقطة H تنتمي إلى المجموعة (F).

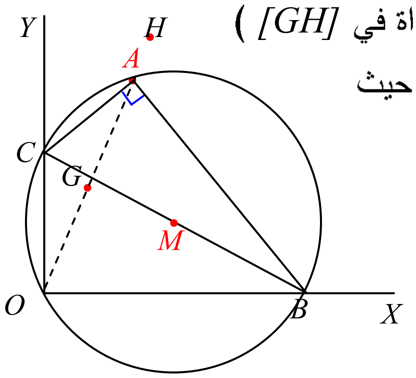
نأخذ C' منطبقة على B و O ونعين النقطة B' من $[OX)$ حيث $OB' = BC$

نعتبر النقطة G المسقط العمودي للنقطة B' على (OH) .

لدينا : $GC'B' = BCH = \alpha$ إذن المثلث القائم $GB'C'$ يمثل كوسا

إذن النقطة G تنتمي إلى المجموعة (F). وبالتالي المجموعة (F) غير خالية :

• لنبين أن كل نقطة A من (F) تنتمي إلى $[GH]$ (أي (E) محتواة في $[GH]$)



لتكن A نقطة من (F) أي : توجد النقطة B من $[OX)$ والنقطة C من $[OY)$ حيث

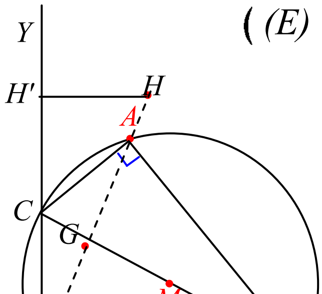
ABC مثلثا قائما في A و $ACB = \alpha$

لدينا $ACOB$ رباعي دائري في الدائرة ذات القطر $[AB]$

ومنه $AOB = ACB = \alpha$ تحصران نفس القوس إذن A تنتمي إلى $[GH]$.

ومنه : $(F) \subset [GH]$

• لنبين أن كل نقطة A من $[GH]$ تنتمي إلى (F) (أي $[GH]$ محتواة في (E))



لتكن A نقطة من $[GH]$ ، H' المسقط العمودي للنقطة H على $[OY]$

ولدينا : $OG = HH'$ نعين نقطة C من $[OH']$ حيث $AC = OG$.

نعين نقطة B من $[OX]$ حيث $AOB = ACB = \alpha$

إذن الرباعي $ACOB$ دائري ومنه الزاويتان المتقابلتان COB و CAB متكاملتان

إذن المثلث ACB قائم في A .

لدينا المثلث القائم OHH' يمثل كوسا

وبمقارنته مع المثلث BAC لدينا : $HH' = AC$ و $H'HO = ACB = \alpha$ و $HH'O = BAC = 90°$

إذن المثلثان OHH' و BAC متقايسان ومنه BAC يمثل كذلك كوسا إذن النقطة A تنتمي إلى (F)

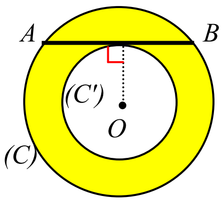
وبالتالي : $[GH] \subset (F)$

خلاصة : لدينا $(F) \subset [GH]$ و $[GH] \subset (F)$ إذن : $(F) = [GH]$.

التمرين 74 صفحة 433

زعم ياسين أن المعطيات المبينة في الشكل أدناه كافية لحساب مساحة الجزء الملون .

هل هو محقّ ؟



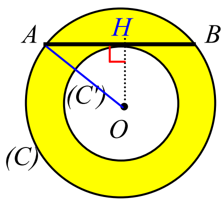
(C) و (C') دائرتان لهما نفس المركز O ،

النقطتان A ، B من (C) حيث (AB) مماس

للدائرة (C') و $AB = 10\ cm$.

الحل :

تذكير : مساحة الدائرة هي $S = \pi R^2 = \frac{\pi D^2}{4}$ حيث R هو نصف قطر الدائرة ، D قطرها.



نرمز إلى مساحة الدائرة (C) بالرمز S ومساحة الدائرة (C') بالرمز s.

نسمي H المسقط العمودي للنقطة O على (AB) .

ومنه : $S = \pi OA^2$ و $s = \pi OH^2$

ومنه مساحة الجزء الملون هي $S - s = \pi OA^2 - \pi OH^2 = \pi[OA^2 - OH^2]$

حسب مبرهنة فيثاغورس لدينا في المثلث القائم OAH : $OA^2 = OH^2 + AH^2$ ومنه : $OA^2 - OH^2 = AH^2$.

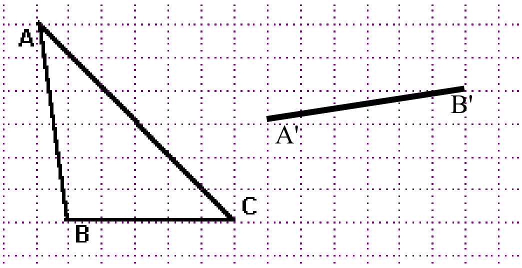
المثلث OAB متساوي الساقين رأسه O ومنه العمود (OH) هو متوسط إذن : $OH = \frac{AB}{2} = 5cm$

وبالتالي : $OA^2 - OH^2 = 25\ cm^2$. أي : $\boxed{S - s = \pi \times 25cm^2}$ $\boxed{S - s \approx 78.54cm^2}$

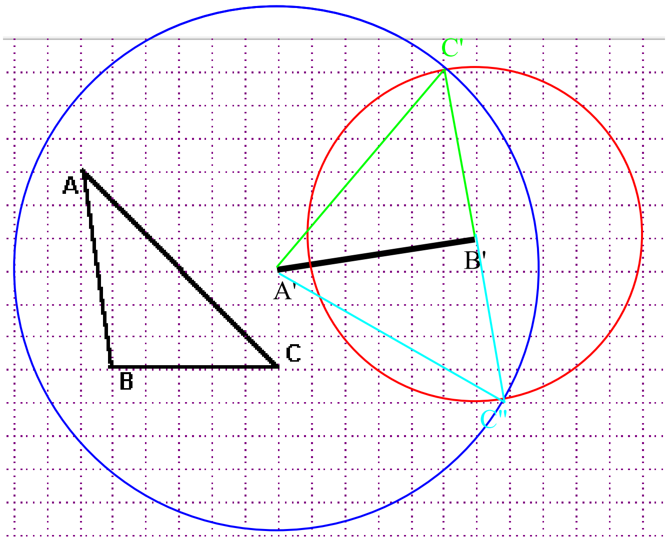
وبالتالي ياسين محق أن المعطيات كافية .

التمرين 74 صفحة 433

انقل الشكل أدناه على ورقة مسطرة باحترام الأبعاد ، ثم أنشئ النقطة C' بحيث يكون المثلثان ABC و $A'B'C'$ متقايسين . يوجد موضعين للنقطة C' يطلب تعيينهما).



الحل :



نرسم الدائرة ذات المركز A' ونصف القطر AC

ونرسم الدائرة ذات المركز B' ونصف القطر BC

تتقاطعان في نقطتين C' و C'' .

نحصل على $A'C' = AC$ و $B'C' = BC$

ولدينا من الشكل $A'B' = AB$

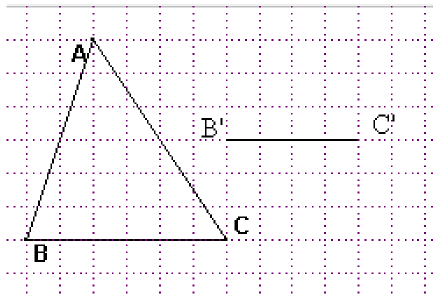
إذن المثلثان ABC و $A'B'C'$ متقايسان .

ولدينا كذلك المثلث $A'B'C''$ يقايس المثلث ABC .

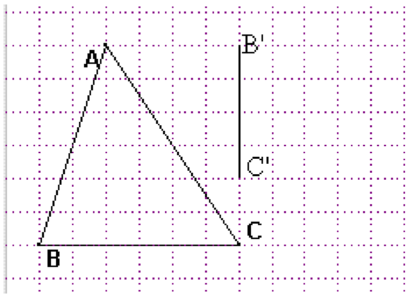
التمرين73 صفحة 433

في كل من الشكلين *(1)* و *(2)* أدناه المثلثان ABC و $A'B'C'$ متشابهان.

أنقل كلا من الشكلين على ورقة مسطرة ، وأكمل المثلث $A'B'C'$ (أعط كل الحلول الممكنة).



الشكل *(1)*



الشكل *(2)*

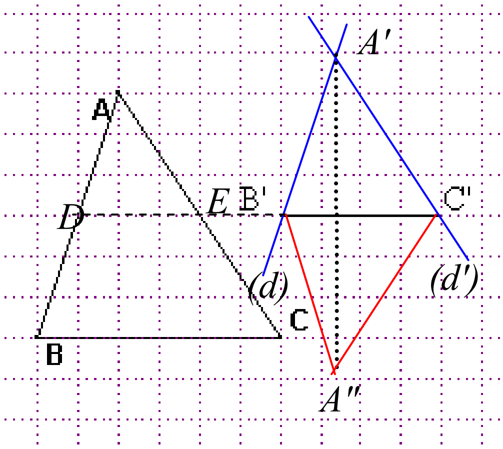
الحل :

الشكل *(1)* : لدينا : $(B'C') // (BC)$

الطريقة الأولى : نعين D نقطة تقاطع $(B'C')$ و (AB)

و E نقطة تقاطع $(B'C')$ و (AC) .

من B' نرسم (d) موازيا لـــ (AB) ومن C' نرسم (d') موازيا لـــ(AC)



المستقيمان (d) و (d') يتقاطعان في النقطة A' .

لدينا : $ABC = ADE$ و $ADE = A'B'C'$ بالتماثل

إذن : $ABC = A'B'C'$ ولدينا : $ACB = AED$ و $AED = A'C'B'$

بالتماثل إذن : $ACB = A'C'B'$ وبالتالي المثلثان ABC و $A'B'C'$ متشابهان.

نعتبر النقطة A'' نظيرة A' بالنسبة إلى المستقيم $(B'C')$ ومنه المثلثان $A''B'C'$ و $A'B'C'$ متقايسان

إذن المثلثان ABC و $A''B'C'$ متشابهان.

الطريقة الثانية :

نعين D نقطة تقاطع $(B'C')$ و (AB) و E نقطة تقاطع $(B'C')$ و (AC)

و (d) محور القطعة $[DC']$. المستقيم (d) يقطع $[DA)$ في النقطة G

إذن المثلث GDC' متساوي الساقين وبالتالي : $ADC' = GC'B'$

وبما أن $ADC' = ABC$ فإن : $GC'B' = ABC$

نعين (d') محور القطعة $[EB']$. المستقيم (d') يقطع $[AC]$ في النقطة

F إذن المثلث $EB'F$ متساوي الساقين وبالتالي : $EB'F = FEB'$

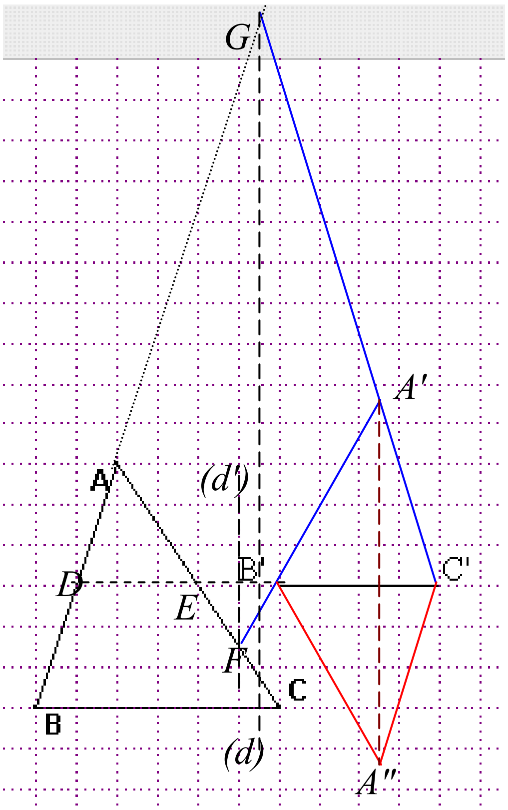
وبما أن $ACB = B'EF$ فإن : $ACB = EB'F$

المستقيم (FB') يقطع (GC') في A' ولدينا : $A'B'C' = EB'F$

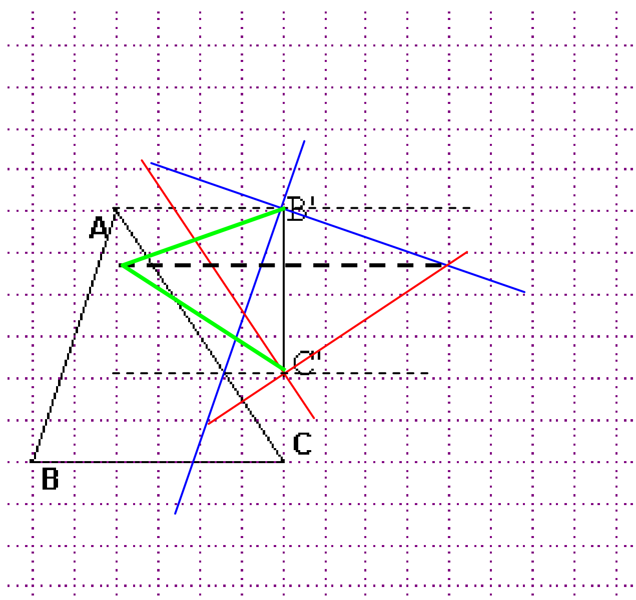
ومنه : $A'B'C' = ACB$ وبالتالي المثلثان ABC و $A'B'C'$ متشابهان.

نعتبر النقطة A'' نظيرة A' بالنسبة إلى المستقيم $(B'C')$ ومنه المثلثان

$A''B'C'$ و $A'B'C'$ متقايسان إذن المثلثان ABC و $A''B'C'$ متشابهان.



الشكل (2) : لدينا $(B'C')$ عمودي على (BC)

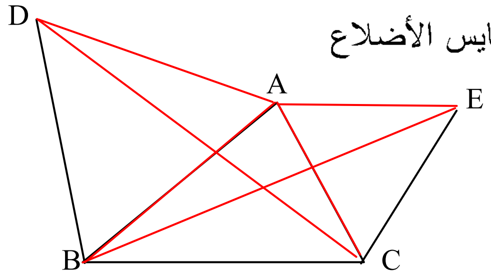


التمرين 73 صفحة 433

ABC مثلث ، أنشئ على ضلعيه $[AB]$ و $[AC]$ مثلثين ABD و ACE على الترتيب ، حيث كل منهما متقايس الأضلاع.

بين أن المثلثين ACD و ABE متقايسان واستنتج أن : $BE = CD$.

الحل :



لدينا : $CAE = BAD = 60°$ لأن كل من المثلثين ABD و ACE متقايس الأضلاع

ومنه : $CAE + CAB = BAD + CAB$ إذن : $BAE = CAD$

ولدينا كذلك : $AB = AD$ و $AE = AC$

إذن المثلثان ACD و ABE متقايسان

ومنه نستنتج : $BE = CD$.

التمرين 77 صفحة 433

المطلوب التحقق فيما إذا كان المثلثان ABC و ADE متشابهين أم لا ،

وفي حالة الإجابة بنعم عين نسبة التشابه إن أمكن.

المثلث ABC فيه $ABC = 35°$ ، $ACB = 70°$.

المثلث ADE فيه $ADE = 35°$ ، $AED = 75°$.

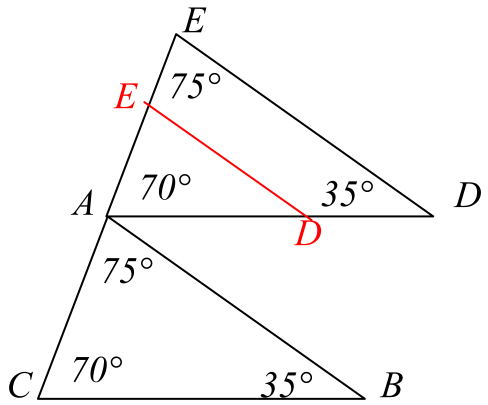
الحل :

مجموع زوايا المثلث هو $180°$ وبالتالي :

$BAC = 75°$ و $EAD = 70°$

ومنه يمكن اعتبار $(AD) // (BC)$ و $(ED) // (AB)$

والنقط C ، A ، E في استقامية كما هو في الشكل المقابل.



لدينا : $ACB = EAD = 70°$ و $ABC = ADE = 35°$

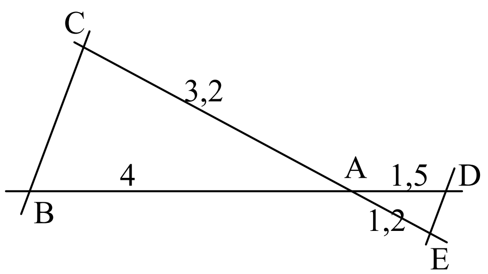
و $BAC = DEA = 75°$ وبالتالي المثلثان ABC و ADE متشابهان.

المثلثان ABC و ADE يمكن أن يكونا متقايسين وفي هذه الحالة

نسبة التشابه هي 1 ويمكن أن يكونا غير متقايسان وفي هذه الحالة

لا يمكن أن نحدد نسبة تشابههما .

التمرين 74 صفحة 433



المطلوب التحقق فيما إذا كان المثلثان ABC و ADE متشابهين أم لا ،

وفي حالة الإجابة بنعم عين نسبة التشابه إن أمكن.

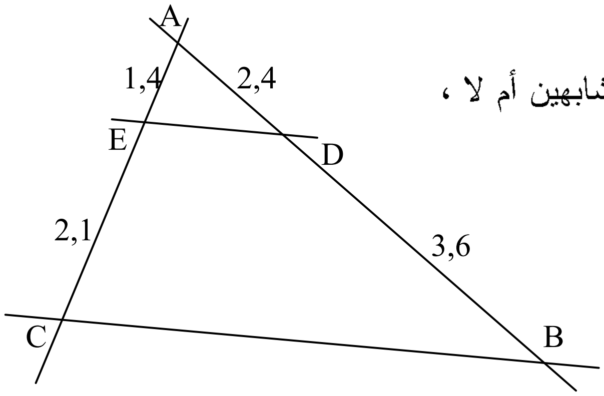
وحدة الطول هي السنتيمتر.

الحل :

لدينا : $CAB = EAD$ متقابلتان بالرأس

$\frac{8}{3} = \frac{4}{1,5} = \frac{AB}{AD}$ و $\frac{8}{3} = \frac{3,2}{1,2} = \frac{AC}{AE}$ ومنه : $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{8}{3}$ إذن المثلثان ABC و ADE متشابهان ونسبة التشابه (التكبير) هي $\frac{8}{3}$.

التمرين 77 صفحة 437



المطلوب التحقق فيما إذا كان المثلثان ABC و ADE متشابهين أم لا ،

وفي حالة الإجابة بنعم عين نسبة التشابه إن أمكن.

وحدة الطول هي السنتيمتر.

الحل :

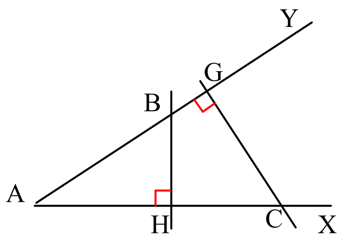
لدينا : $CAB = EAD$ نفس الزاوية

$$\frac{AB}{AD} = \frac{2,4+3,6}{2,4} = \frac{6}{2,4} = \frac{5}{2}$$

و $$\frac{AC}{AE} = \frac{1,4+2,1}{1,4} = \frac{3,5}{1,4} = \frac{5}{2}$$

ومنه : $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{5}{2}$ إذن المثلثان ABC و ADE متشابهان ونسبة التشابه (التكبير) هي $\frac{5}{2}$.

التمرين 77 صفحة 437



XAY زاوية، (BH) عمودي على $[AX)$ ، و (CG) عمودي على $[AY)$.

أ) بين أن $AB \times AG = AH \times AC$.

ب) كيف تصبح العلاقة السابقة عندما تنطبق النقطة G على النقطة B.

الحل :

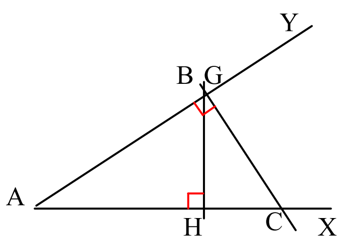
أ) لدينا $BAH = GAC$ نفس الزاوية و $AHB = AGC = 90°$

ومنه المثلثان ABH و ACG متشابهان

الرؤوس المتماثلة : A ، H ، B

A ، G ، C

ومنه : $\frac{AH}{AG} = \frac{AB}{AC} = \frac{BH}{CG}$ إذن : $\frac{AH}{AG} = \frac{AB}{AC}$



معناه $AB \times AG = AH \times AC$ (جداء الطرفين يساوي جداء الوسطين).

ب) عندما تنطبق النقطة G على النقطة B فإن $AB = AG$

ومنه $AB^2 = AH \times AC$ أو $AG^2 = AH \times AC$.

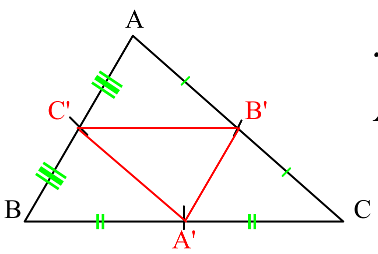
التمرين 78 صفحة 437

ABC مثلث ، A' ، B' ، C' منتصفات أضلاعه $[BC]$ ، $[AC]$ ، $[AB]$ على الترتيب.

أ) بين أن المثلثين ABC و $A'B'C'$ متشابهان ، وعين نسبة التشابه.

ب) أحسب النسبة $\dfrac{\text{مساحة}(ABC)}{\text{مساحة}(A'B'C')}$.

الحل :



أ) تبيان أن المثلثين ABC و $A'B'C'$ متشابهان ، وتعيين نسبة التشابه.

لدينا : A' ، B' ، C' منتصفات أضلاعه $[BC]$ ، $[AC]$ ، $[AB]$ على الترتيب.

إذن حسب نتيجة مبرهنة طاليس فإن : $(A'B') // (AB)$ و $A'B' = AC' = BC'$

ومنه : الربعان $AB'A'C'$ و $BA'B'C'$ متوازيا أضلاع

إذن كل زاويتان متقابلتان هما متقايستان أي : $C'AB' = C'A'B'$

و $C'BA' = C'B'A'$ ومنه : $CAB = C'A'B'$ و $CBA = C'B'A'$

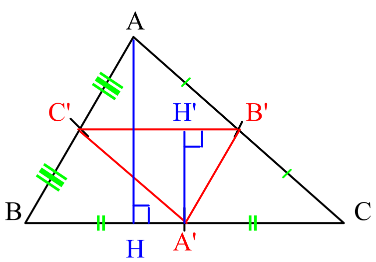
إذن المثلثان ABC و $A'B'C'$ متشابهان.

النقط المتماثلة : A ، B ، C

A' ، B' ، C'

$2 = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{AB}{A'B'}$ ومنه نسبة التشابه (التكبير) هي 4 .

ب) حساب النسبة $\dfrac{\text{مساحة}(ABC)}{\text{مساحة}(A'B'C')}$.



H هي المسقط العمودي للنقطة A على (BC)

وH' هي المسقط العمودي للنقطة A' على $(B'C')$.

المثلثان القائمان AHB و $A'H'B'$ متشابهان لأن لهما زاويتان قائمتان

و $CBA = C'B'A'$ أي : $HBA = H'B'A'$

$2 = \dfrac{BH}{B'H'} = \dfrac{AH}{A'H'} = \dfrac{AB}{A'B'}$ ومنه : $AH = 2\,A'H'$.

مساحة$(ABC) = 2\,AH \times BC = 2\,(2A'H')(2B'C') = 4(2A'H' \times B'C') = 4 \times$ مساحة$(A'B'C')$

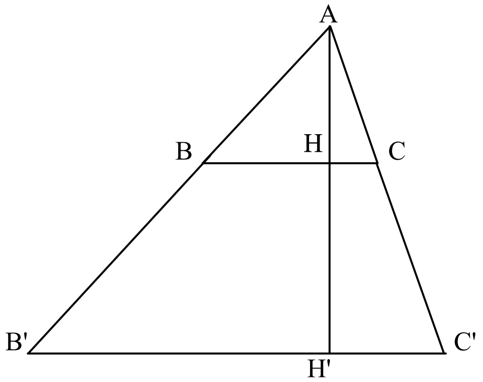
إذن : $\dfrac{\text{مساحة}(ABC)}{\text{مساحة}(A'B'C')} = 4$.

التمرين 71 صفحة 437

ABC مثلث معطى ، أنشئ مثلثا $A'B'C'$ مشابها للمثلث ABC مساحته تساوي 7 مرات مساحة المثلث ABC.

الحل :

مرحلة التحليل :



نفرض أنه يوجد مثلث $A'B'C'$ مشابها للمثلث ABC حيث :

مساحة $(A'B'C')$ = $9(ABC)$ مساحة

ونفرض أن : A' منطبقة على A .

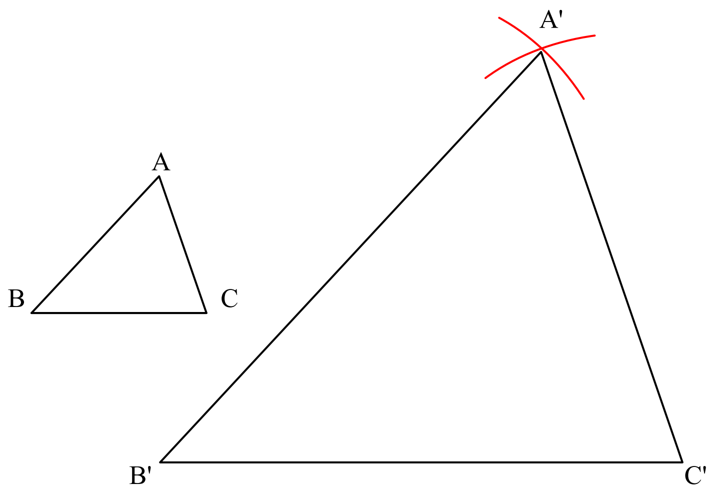
ومنه : $\frac{AB}{AB'}=\frac{AC}{AC'}=\frac{BC}{B'C'}$ و $AH' \times B'C' = 9\ AH \times BC$.

بما أن $A'B'C'$ و ABC متشابهان

فإن المثلثين AHB و $AH'B'$ متشابهان ومنه: $\frac{AB}{AB'}=\frac{AH}{AH'}=\frac{BH}{B'H'}$

إذن : $\frac{AB}{AB'}=\frac{AC}{AC'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AH}{AH'}=\frac{BC \times AH'}{B'C' \times AH'}=\frac{BC \times AH'}{9BC \times AH}=\frac{AH'}{9AH}$

ومنه: $AH'^2 = 9\ AH^2$ أي : $AH' = 3\ AH$



إذن $\frac{AB}{AB'}=\frac{AC}{AC'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AH}{AH'}=\frac{1}{3}$

مرحلة التركيب والإنشاء :

نعين B' و C' حيث $B'C' = 3\ BC$.

ننشئ النقطة A' حيث : $B'A' = 3\ BA$

و $C'A' = 3\ CA$

التمرين74 صفحة 437

ABC مثلث متقايس الأضلاع طول كل ضلع من أضلاعه a ، D نقطة من $[AB]$ حيث : $AB = 3\ AD$ ،

E ، F نقطتان من $[BC]$ و $[AC]$ على الترتيب حيث : $BE = CF = AD$.

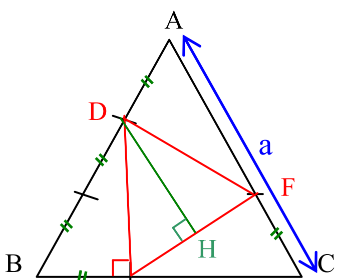
أ) ما نوع المثلث DEF.

ب) بين أن (DE) عمودي على (BC).

ج) أحسب مساحة كل من المثلثين ABC و DEF بدلالة a ، ثم جد علاقة بين مساحتيهما.

الحل :

أ) نوع المثلث DEF.



لدينا : $BE = CF = AD = \frac{1}{3}a$ و $BD = EC = AF = \frac{2}{3}a$

وبما أن المثلث *ABC* متقايس الأضلاع فإن : $B = C = A = 60°$

ومنه المثلثات *BDE* ، *CEF* ، *ADF* متقايسة و بالتالي :

ED = EF = DF إذن المثلث *DEF* متقايس الأضلاع.

ب) تبيان أن *(DE)* عمودي على *(BC)*.

لدينا : $B = 60°$ ومنه : $\cos B = \frac{1}{2}$ ولدينا : $\frac{BE}{BD} = \frac{1}{2}$ إذن : $\cos B = \frac{BE}{BD}$ ومنه المثلث *BED* قائم في *E*

وبالتالي : *(DE)* عمودي على *(BC)*.

ج)حساب مساحة كل من المثلثين *ABC* و *DEF* بدلالة *a* ، ثم جد علاقة بين مساحتيهما.

النقطة *H* هي المسقط العمودي للنقطة *D* على *(EF)*.

ولدينا : $DE^2 = BD^2 - BE^2 = \frac{4}{9}a^2 - \frac{1}{9}a^2 = \frac{1}{3}a^2$ ومنه : $DE = \frac{\sqrt{3}}{3}a$

وكذلك $DH^2 = DE^2 - EH^2 = \frac{1}{3}a^2 - \frac{1}{12}a^2 = \frac{1}{4}a^2$ ومنه $DH = \frac{1}{2}a$

نضع *s* المساحة ومنه : $s(DEF) = \frac{1}{2}DE \times DH = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3}a \times \frac{1}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2$

$$s(ABC) = 3s(BED) + s(DEF) = 3\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}a \times \frac{\sqrt{3}}{3}a + \frac{\sqrt{3}}{12}a^2$$

ومنه : $s(ABC) = \frac{\sqrt{3}}{6}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

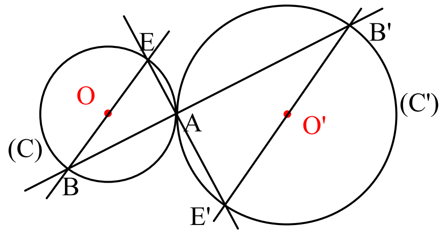
ومنه : *s(ABC) = 3 s(DEF)*.

التمرين74 صفحة 437

(C) و *(C′)* دائرتان مركزاهما *O* و *O′* ونصف قطريهما *r* و *r′* على الترتيب ، ومتماستان خارجيا في النقطة *A*.

(BB′) مستقيم يشمل النقطة *A* ويقطع *(C)* و *(C′)* في النقطتين *B* و *B′* على الترتيب.

المستقيم *(OB)* يقطع *(C)* في النقطة *E* و المستقيم *(O′B′)* يقطع *(C′)* في النقطة *E′*.



أ) بين أن المستقيمين *(BB′)* و *(EE′)* متعامدان في النقطة *A*.

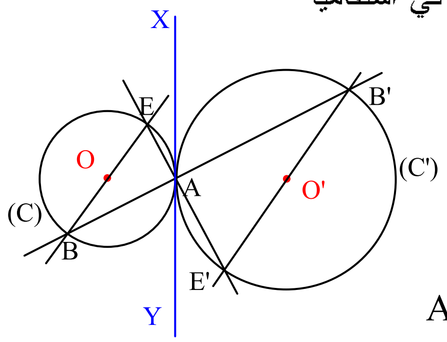
ب) بين أن المثلثين *ABE* و *AB′E′* متشابهان.

ج) استنتج التناسب $\frac{r}{r'} = \frac{AB}{A'B'}$

الحل :

أ) تبيان أن المستقيمين *(BB′)* و *(EE′)* متعامدان في النقطة *A*.

لدينا : $BAE = 90°$ تحصر نصف دائرة *(C)* و $B'AE' = 90°$ تحصر نصف دائرة *(C′)*



وبما أن النقط B ، A ، B' في استقامية فإن : كذلك النقط E ، A ، E' في استقامية

ومنه : المستقيمين (BB') و (EE') متعامدان في النقطة A.

ب) تبيان أن المثلثين ABE و $AB'E'$ متشابهان.

(XY) مماس للدائرتين في النقطة A.

في الدائرة (C) لدينا : $BEA = BAY$ تحصران نفس القوس AB

في الدائرة (C') لدينا : $B'E'A = B'AX$ تحصران نفس القوس AB'

$B'AX = BAY$ متقابلتان بالرأس

إذن : $BEA = B'E'A$ و لدينا : $BAE = B'AE' = 90°$ ومنه : المثلثان ABE و $AB'E'$ متشابهان.

ج) استنتاج التناسب $\frac{AB}{A'B'} = \frac{r}{r'}$

لدينا النقط المتماثلة : A ، B ، E

A ، B' ، E'

إذن : $\frac{r}{r'} = \frac{2r}{2r'} = \frac{BE}{B'E'} = \frac{AE}{AE'} = \frac{AB}{A'B'}$ ومنه : $\frac{AB}{A'B'} = \frac{r}{r'}$.

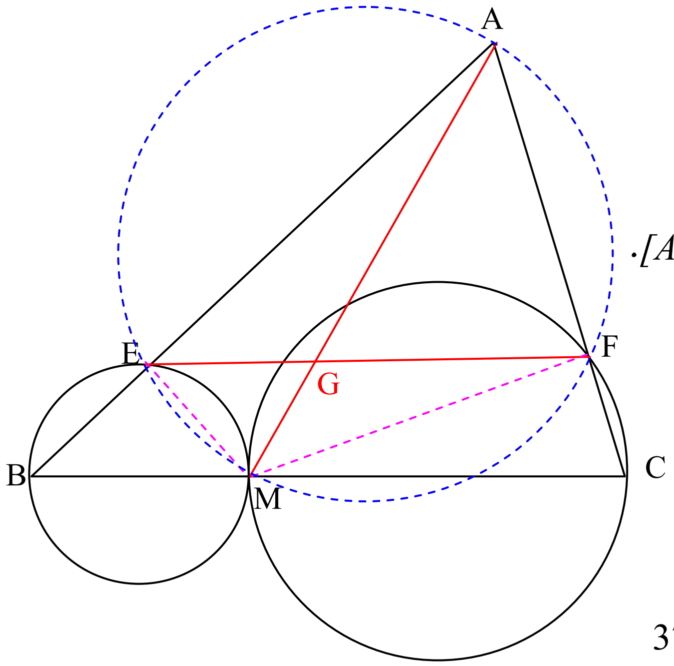
التمرين 73 صفحة 437

ABC مثلث زواياه حادة ، M نقطة من $[BC]$ ، الدائرة التي قطرها $[BM]$ تقطع $[AB]$ في النقطة E ،

والدائرة التي قطرها $[CM]$ تقطع $[AC]$ في النقطة F ، $[AM]$ و $[EF]$ متقاطعان في النقطة G.

بين أن المثلثين AFG و EGM متشابهان ، واستنتج أن : $GA \times GM = GF \times GE$.

الحل :



- تبيان أن المثلثين AFG و EGM متشابهان:

لدينا : $BEM = 90°$ و $CFM = 90°$

تحصران نصف دائرة

ومنه $AEM = AFM = 90°$

إذن الرباعي $AEMF$ دائري في دائرة ذات القطر $[AM]$.

ومنه $AME = AFE$ تحصران نفس القوس AE

وبالتالي : $GME = AFG$

ولدينا : $MGE = AGF$ متقابلتان بالرأس.

إذن المثلثان : AFG و EGM متشابهان.

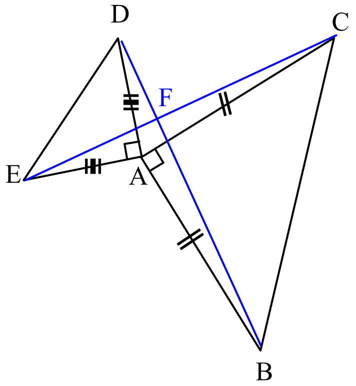
- استنتاج أن : $GA \times GM = GF \times GE$.

النقط المتماثلة : G ، F ، A

G ، M ، E

$\frac{FG}{MG}=\frac{AG}{EG}=\frac{AF}{EM}$ أي : $\frac{AG}{EG}=\frac{FG}{MG}$ معناه $AG \times MG = FG \times EG$.

التمرين 73 صفحة 437



ABC و ADE مثلثان كل منهما قائم ومتساوي الساقين كما هو مبين في الشكل ، $[CE]$ و $[BD]$ متقاطعان في النقطة F.

أ) بين أن المثلثين ACE و ABD متقايسان.

ب) بين أن النقط A ، B ، C ، F تنتمي إلى دائرة وحيدة ، وعين مركزها.

ج) نفس السؤال السابق بالنسبة إلى النقط A ، E ، D ، F.

الحل :

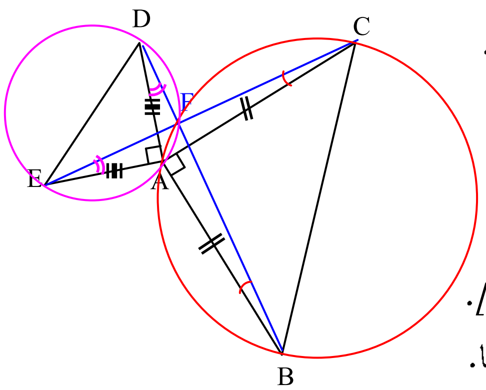
أ) تبيان أن المثلثين ACE و ABD متقايسان.

لدينا : $EAD = BAC = 90°$ ومنه : $EAD + DAC = BAC + DAC$ وبالتالي : $EAC = BAD$

في المثلث ACE الضلعين المجاورين للزاوية EAC هما $[AE]$ و $[AC]$

في المثلث ABD الضلعين المجاورين للزاوية BAD هما $[AD]$ و $[AB]$

ولدينا $AE = AD$ و $AC = AB$ إذن المثلثان ACE و ABD متقايسان.



ب) تبيان أن النقط A ، B ، C ، F تنتمي إلى دائرة وحيدة ، وتعيين مركزها.

من نتائج تقايس المثلثين ACE و ABD لدينا : $ACE = ABD$

ومنه : $ACF = ABF$ إذن الرباعي $ABCF$ دائري ،

المثلث ABC قائم في A إذن قطر الدائرة المحيطة به هو $[BC]$

وبالتالي النقط A ، B ، C ، F تنتمي إلى دائرة وحيدة مركزها منتصف $[BC]$.

ج) تبيان أن النقط A ، E ، D ، F تنتمي إلى دائرة وحيدة ، وتعيين مركزها.

كذلك من نتائج تقايس المثلثين ACE و ABD لدينا : $AEC = ADB$

ومنه : $AEF = ADF$ إذن الرباعي $AEDF$ دائري ،

المثلث AED قائم في A إذن قطر الدائرة المحيطة به هو $[DE]$

وبالتالي النقط A ، E ، D ، F تنتمي إلى دائرة وحيدة مركزها منتصف $[DE]$.

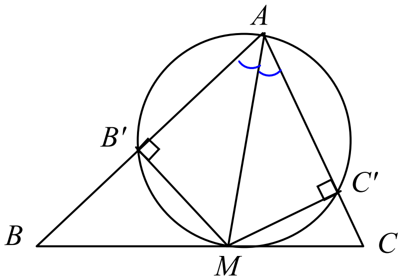
التمرين 77 صفحة 434

ABC مثلث ، M نقطة تقاطع منصف زاوية الرأس A و $[BC]$ ، C' ، B' المسقطان العموديان للنقطة M على $[AB]$ و $[AC]$ على الترتيب.

أ) بين أن المثلثين $AB'M$ ، $AC'M$ متقايسان.

ب) بين أن النقط A ، B' ، M ، C' تنتمي إلى دائرة واحدة يطلب تعيين عناصرها.

ج) ما نوع الرباعي $AB'MC'$ عندما يكون المثلث ABC قائما في A .



الحل :

أ) بين أن المثلثين $AB'M$ ، $AC'M$ متقايسان.

لدينا : المثلثان $AB'M$ ، $AC'M$ قائمان ولهما وتر مشترك $[AM]$

و $B'AM = C'AM$ إذن هما متقايسان.

ب) بين أن النقط A ، B' ، M ، C' تنتمي إلى دائرة واحدة يطلب تعيين عناصرها.

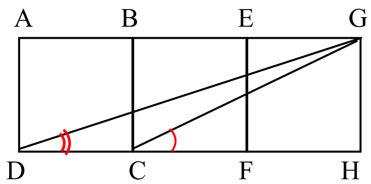
لدينا $AB'M$ و $AC'M$ متقابلتان ومتكاملتان في الرباعي $AB'MC'$ إذن هو دائري في الدائرة ذات القطر $[AM]$ ومركزها منتصف $[AM]$.

ج) ما نوع الرباعي $AB'MC'$ عندما يكون المثلث ABC قائما في A .

إذا كان المثلث ABC قائما في A فإن للرباعي $AB'MC'$ ثلاث زوايا قائمة وبالتالي هو مستطيل

وبما أن القطر $[AM]$ هو منصف الزاوية ذات الرأس A فإن الرباعي $AB'MC'$ هو مربع.

التمرين 74 صفحة 434



في الشكل المرفق $ABCD$ ، $BEFC$ ، $EGHF$

ثلاثة مربعات متماثلة طول ضلع كل منها a.

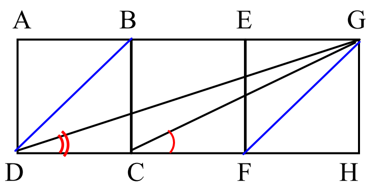
نريد إثبات أن $GCF + GDC = 45°$.

أ) أحسب أطوال أضلاع كل من المثلثين GBD و GFC ، ثم بين أنهما متشابهان.

ب) عين الزوايا المتقايسة في المثلثين GBD و GFC ، واستنتج أن $GCF + GDC = 45°$

الحل :

أ) حساب أطوال أضلاع كل من المثلثين GBD و GFC :



لدينا : $GB = 2a$

و $BD = a\sqrt{2}$ لأنه وتر المثلث القائم والمتساوي الساقين ABD.

$GD^2 = AG^2 + AD^2$ ومنه : $GD^2 = 10a^2$ إذن $GD = a\sqrt{10}$

إذن أطوال أضلاع المثلث GBD هي : $GB = 2a$ ، $BD = a\sqrt{2}$ ، $GD = a\sqrt{10}$

لدينا : $CF = a$ و $GF = BD = a\sqrt{2}$ و $GC^2 = CH^2 + GH^2$ أي $GC^2 = 5a^2$ ومنه : $GC = a\sqrt{5}$

إذن أطوال أضلاع المثلث GFC هي: $CF = a$ ، $GF = a\sqrt{2}$ ، $GC = a\sqrt{5}$

- تبيان GBD و GFC متشابهان:

$$\frac{GB}{GF}=\frac{2a}{a\sqrt{2}}=\sqrt{2} \text{ و } \frac{BD}{CF}=\frac{a\sqrt{2}}{a}=\sqrt{2} \text{ و } \frac{GD}{GC}=\frac{a\sqrt{10}}{a\sqrt{5}}=\sqrt{2}$$

ومنه : $\frac{GB}{GF}=\frac{BD}{CF}=\frac{GD}{GC}=\sqrt{2}$ وبالتالي : المثلثان GBD و GFC متشابهان:

ب)تعيين الزوايا المتقايسة في المثلثين GBD و GFC :

لدينا : $BDG = GCF$ و $BGD = CGF$ و $DBG = GFC$

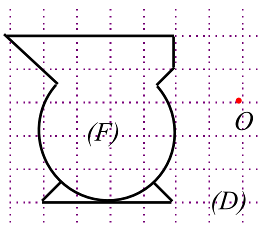
- استنتاج أن $GCF + GDC = 45°$

لدينا : $GCF + GDC = BDG + GDC = BDC$

وبما أن $ABCD$ مربع فإن القطر $[BD]$ هو منصف كل من الزاويتين ADC و ABC

وبالتالي : $BDC = \frac{1}{2}ADC = \frac{1}{2}\times 90° = 45°$ إذن : $GCF + GDC = 45°$.

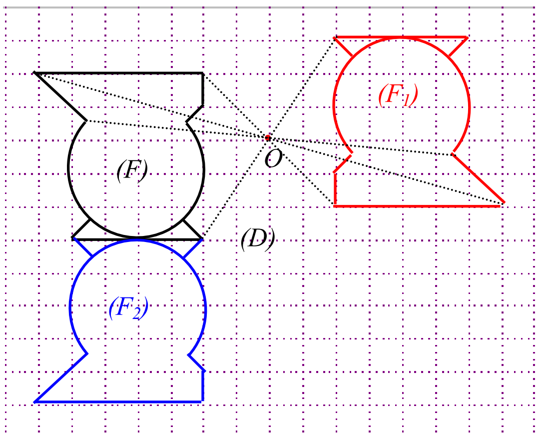
التمرين 77 صفحة 434



أنجز مثيلا للشكل المقابل على ورقة مسطرة ، ثم أنشئ الشكل (F_1) نظير الشكل (F) بالنسبة إلى النقطة O و الشكل (F_2) نظير الشكل (F) بالنسبة إلى المستقيم (D).

أي الثنائيتين $[(F) , (F_1)]$ أم $[(F) , (F_2)]$ الشكلان متقايسان مباشرة ؟

الحل :



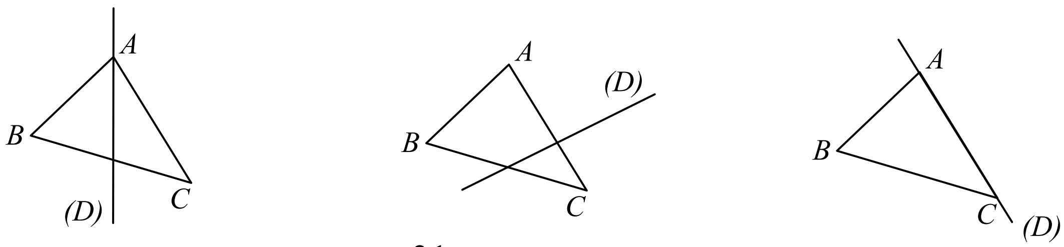
بتدوير (F_1) بزاوية $180°$ على المركز O ينطبق على (F)

وبالتالي الثنائيتين $[(F) , (F_1)]$ متقايسان مباشرة

بينما (F_2) ينطبق على (F) إلا بعد تدويره.

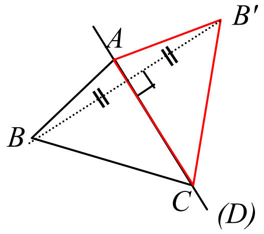
التمرين 77 صفحة 434

أنقل الأشكال أدناه ، وأنشئ في كل حالة صورة المثلث ABC بالتناظر بالنسبة إلى المستقيم (D).



الحل :

الحالة الأولى :



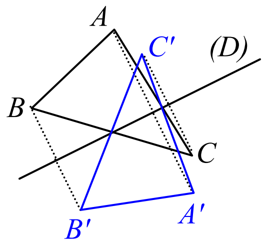
النقطتان A و C صامدتان بالتناظر المحوري

إذن صورة A هي A و صورة C هي C.

نعتبر النقطة B' نظيرة B بالنسبة إلى المستقيم (D).

إذن صورة المثلث ABC هو المثلث $AB'C$ بالتناظر المحوري بالنسبة إلى المستقيم (D).

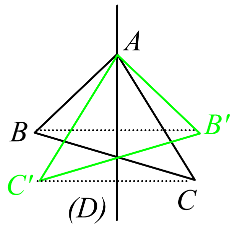
الحالة الثانية :



A' ، B' ، C' صور النقط A ، B ، C بالتناظر بالنسبة إلى المستقيم (D) على الترتيب.

إذن صورة المثلث ABC هو المثلث $A'B'C'$ بالتناظر بالنسبة إلى المستقيم (D).

الحالة الثالثة :



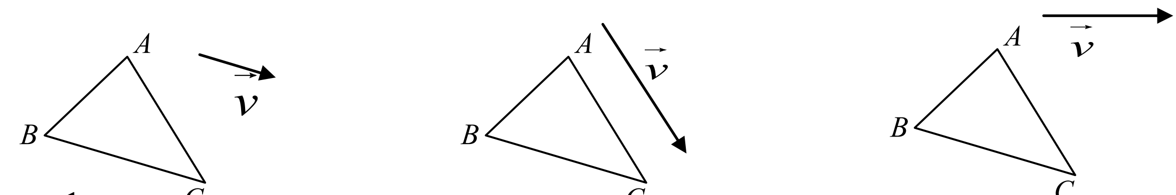
النقطة A صامدة بالتناظر المحوري بالنسبة إلى المستقيم (D).

B' و C' صورتا B و C بالتناظر المحوري بالنسبة إلى المستقيم (D).

إذن صورة المثلث ABC هو المثلث $AB'C'$ بالتناظر المحوري بالنسبة إلى المستقيم (D).

التمرين 188 صفحة 434

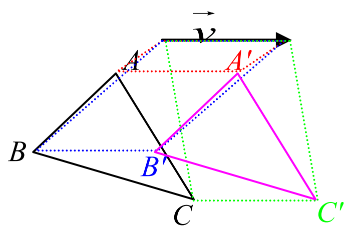
أنقل الأشكال أدناه ، وأنشئ في كل حالة صورة المثلث ABC بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}$.



$\vec{v}$ $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ $\vec{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

الحل :

الحالة الأولى :

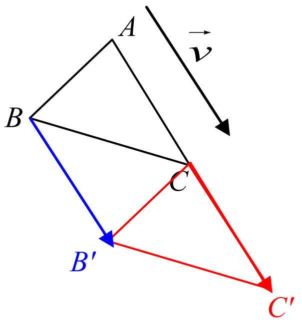


ننشئ النقط A' ، B' ، C' حيث : $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \vec{v}$

و هذا باستعمال متوازيات الأضلاع.

ولدينا : صورة المثلث ABC هي $A'B'C'$ بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}$.

الحالة الثانية :

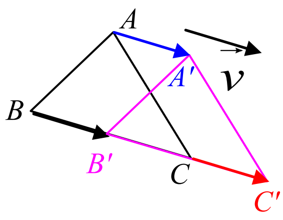


لدينا : $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ إذن صورة A هي C بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}$.

ننشئ النقطتان B' ، C' حيث : $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \vec{v}$

ولدينا : صورة المثلث ABC هي $CB'C'$ بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}$.

الحالة الثالثة :

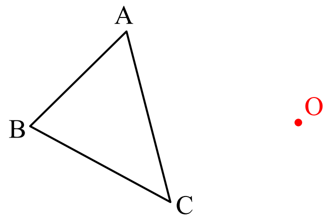


$\vec{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ إذن صورة B هي B' منتصف $[BC]$.

ننشئ النقطتان A' ، C' حيث : $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'} = \vec{v}$

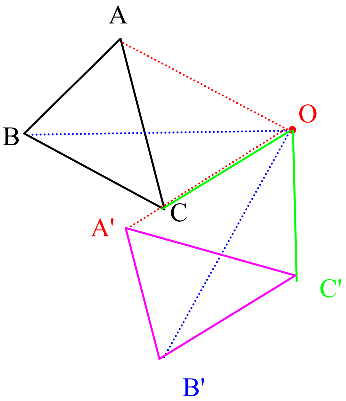
ولدينا : صورة المثلث ABC هي $A'B'C'$ بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}$.

181 صفحة 434



أنشئ صورة المثلث ABC بالدوران الذي مركزه النقطة O وزاويته $60°$.

الحل :



النقط A' ، B' ، C' هي صور النقط A ، B ، C بالدوران الذي مركزه النقطة O وزاويته $60°$.

أي : $OA' = OA$ و $OB' = OB$ و $OC' = OC$

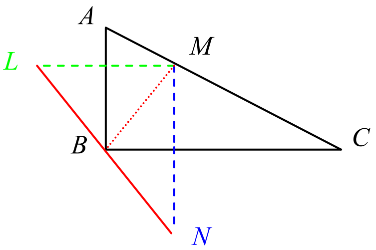
و $A\hat{O}A' = B\hat{O}B' = C\hat{O}C' = 60°$

صورة المثلث ABC هي المثلث ABC بالدوران الذي مركزه النقطة O وزاويته $60°$.

184 صفحة 434

ABC مثلث قائم في B ، M نقطة من وتره $[AC]$. النقطتان L و N نظيرتا النقطة M بالنسبة إلى (AB) و (BC) على الترتيب. ماذا تمثل النقطة B بالنسبة إلى $[LN]$.

الحل :



L نظيرة M بالنسبة إلى (AB) إذن المستقيم (AB) هو محور القطعة $[LM]$

ومنه : المثلث BLM متساوي الساقين رأسه B إذن $BL = BM$

و (AB) يكون منصف الزاوية $L\hat{B}M$ أي : $L\hat{B}M = 2 \times A\hat{B}M$

N نظيرة M بالنسبة إلى (BC) إذن المستقيم (BC) هو محور القطعة $[MN]$

ومنه : المثلث BNM متساوي الساقين رأسه B إذن $BN = BM$

و (BC) يكون منصف الزاوية $M\hat{B}N$ أي : $M\hat{B}N = 2 \times M\hat{B}C$

وبالتالي : $BN = BL$

ولدينا : $L\hat{B}N = L\hat{B}M + M\hat{B}N = 2 \times A\hat{B}M + 2 \times M\hat{B}C = 2(A\hat{B}M + M\hat{B}C) = 2\,A\hat{B}C = 180°$

ومنه L ، B ، N على استقامة واحدة.

وبالتالي : النقطة B هي منتصف القطعة $[LN]$.

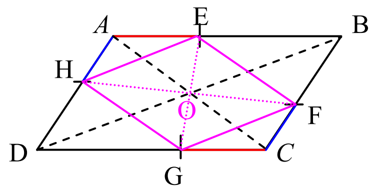
184 صفحة 434

$ABCD$ متوازي أضلاع. E ، F ، G ، H نقط من $[AB]$ ، $[BC]$ ، $[CD]$ ، $[AD]$ على الترتيب حيث : $AE = CG$ و $AH = CF$.

أ) ما هو التحويل النقطي الذي يحول A إلى C ويحول B إلى D ؟

ب) ما هي طبيعة الرباعي $EFGH$ ؟

الحل :



أ) تعيين التحويل النقطي الذي يحول A إلى C ويحول B إلى D :

$ABCD$ متوازي أضلاع إذن قطراه $[AC]$ ، $[BD]$ متناصفان في النقطة O.

إذن C هي صورة A و D هي صورة B بالتناظر المركزي الذي مركزه O.

ب) طبيعة الرباعي $EFGH$:

الطريقة 1 :

$(AE) // (GC)$ و $AE = GC$ إذن الرباعي $AECG$ متوازي أضلاع ومنه قطراه $[AC]$ ، $[EG]$ متناصفان في النقطة O. وبالتالي : G هي صورة E بالتناظر المركزي الذي مركزه O.

$(AH) // (FC)$ و $AH = FC$ إذن الرباعي $AFCH$ متوازي أضلاع ومنه قطراه $[AC]$ ، $[HF]$ متناصفان في النقطة O. وبالتالي : H هي صورة F بالتناظر المركزي الذي مركزه O.

لدينا G هي صورة E بالتناظر المركزي الذي مركزه O و H هي صورة F بالتناظر المركزي الذي مركزه O

إذن $[HG]$ هي صورة $[EF]$ بالتناظر المركزي الذي مركزه O ومنه : $(HG) // (EF)$

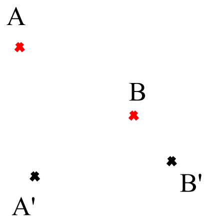
والتناظر المركزي يحافظ على المسافات أي : $HG = EF$ وبالتالي الرباعي $EFGH$ هو متوازي أضلاع.

الطريقة 2 :

نقارن بين المثلثين AEH و CFG ثم بين BEF و DGH.

ونحصل على النتيجتين : $EH = FG$ و $HG = EF$.

183 صفحة 434



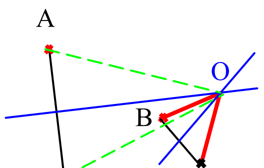
علم أربعة نقط A ، B ، A' ، B' كما هو في الشكل المقابل.

اشرح كيف يمكن إنشاء مركز الدوران الذي يحول A إلى A' ويحول B إلى B'.

الحل :

نرسم (d) و (d') محوري القطعتين $[AA']$ و $[BB']$ على الترتيب ، يتقاطعان في النقطة O.

إذن : $OA = OA'$ و $OB = OB'$.



الدوران الذي يحول A إلى A' ويحول B إلى B' يحافظ على المسافات

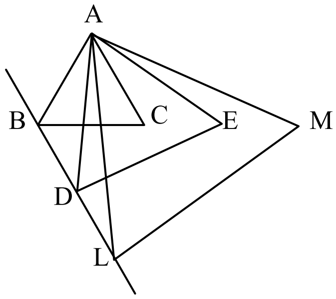
إذن : $AB = A'B'$ وبالتالي المثلثان AOB و $A'OB'$ متقايسان

ومنه نستنتج أن : $A\hat{O}B = A'\hat{O}B'$ إذن $A\hat{O}B + B\hat{O}A' = A'\hat{O}B' + B\hat{O}A'$

وبالتالي : $A\hat{O}A' = B\hat{O}B'$

ومنه : مركز الدوران الذي يحول A إلى A' ويحول B إلى B' هو النقطة O.

183 صفحة 437



يمثل الشكل المقابل ثلاثة مثلثات ABC ، ADE ، ALM

كل منها متقايسة الأضلاع حيث النقط B ، D ، L في استقامية.

بين أن النقط C ، E ، M في استقامية.

الحل :

بما أن المثلثات متقايسة الأضلاع فإن :

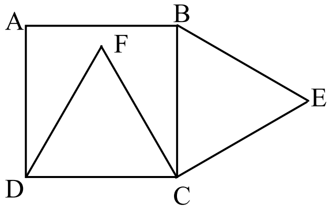
$AC = AB$ ، $AE = AD$ ، $AM = AL$

و $B\hat{A}C = D\hat{A}E = L\hat{A}M = 60°$

ومنه : C ، E ، M هي صور B ، D ، L بالدوران الذي مركزه A وزاويته $60°$.

وبما أن الدوران يحافظ على الاستقامية و النقط B ، D ، L في استقامية فإن النقط C ، E ، M في استقامية كذلك.

187 صفحة 437



يمثل الشكل مربعا $ABCD$ ، ومثلثين BCE ، CDF كل منهما متقايس الأضلاع.

لإثبات أن النقط A ، F ، E في استقامية باستعمال دوران.

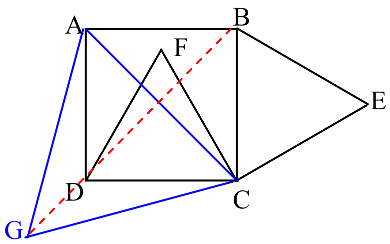
أ) علم النقطة G بحيث يكون المثلث ACG متقايس الأضلاع

و G ، B من جهتين مختلفتين بالنسبة إلى (AC).

ب)بين أن النقط B ، D ، G في استقامية.

ج)بين أنه يوجد دوران يحول النقط B ، D ، G إلى النقط A ، F ، E ، ثم استنتج.

الحل :



أ) علم النقطة G بحيث يكون المثلث ACG متقايس الأضلاع

و G ، B من جهتين مختلفتين بالنسبة إلى (AC).

ب) بين أن النقط B ، D ، G في استقامية.

لدينا $ABCD$ مربع إذن (DB) يعامد (AC)

نقارن بين المثلثين ADG و CDG لدينا : $AD = CD$ و $AG = CG$ و DG مشترك

ومنه $\widehat{AGD} = \widehat{DGC}$ وبالتالي : (DG) هو منصف الزاوية $\widehat{AGC}$ وبما أن المثلث ACG متقايس الأضلاع فإن (DG) هو محور $[AC]$ أي (DG) يعامد (AC) وبالتالي : $(DG) // (DB)$

ومنه : النقط B ، D ، G في استقامية.

ج)بين أنه يوجد دوران يحول النقط B ، D ، G إلى النقط A ، F ، E ، ثم استنتج.

لدينا : $CE = CB$ ، $CF = CD$ ، $CG = CA$.

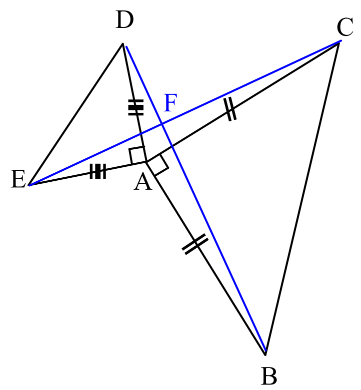
ولدينا : $\widehat{BCE} = \widehat{DCF} = \widehat{GCA} = 60°$

بتوجيه المستوي في الاتجاه غير المباشر (اتجاه دوران عقارب الساعة)

لدينا : صورة B هي E ، صورة D هي F و صورة G هي A بالدوران الذي مركزه C و زاويته $60°$

وبما أن النقط B ، D ، G في استقامية فإن النقط E ، F ، A في استقامية.

184 صفحة 437



(نفس معطيات التمرين 73)

ABC و ADE مثلثان كل منهما قائم ومتساوي الساقين كما هو مبين في الشكل ،

$[CE]$ و $[BD]$ متقاطعان في النقطة F.

بين باستعمال الدوران أن المستقيمين (BD) و (CE) متعامدان.

الحل :

نوجه المستوي في الاتجاه المباشر ، ونعتبر الدوران الذي مركزه A وزاويته $90°$.

إذن صورة B هي C و صورة D هي E بهذا الدوران

ومنه صورة المستقيم (BD) هي المستقيم (CE) بنفس الدوران إذن إحدى زوايا المحصورة بين المستقيمين (BD) و(CE) تقايس زاوية الدوران التي هي $90°$ ومنه : المستقيمان (BD) و (CE) متعامدان.

187 صفحة 437

$ABCD$ مربع ، M ، N نقطتان من ضلعيه $[AB]$ و $[BC]$ على الترتيب حيث $AM = BN$ ،

H نقطة تقاطع $[DM]$ و $[AN]$.

أ) بين أنه يوجد دوران يحول $[DM]$ إلى $[AN]$.

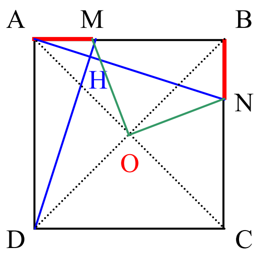
ب) استنتج طبيعة المثلث AHD.

ج) ما هي مجموعة النقط H عندما M تمسح $[AB]$ ؟

د) ما هي مجموعة النقط S منتصف $[MN]$ عندما M تمسح $[AB]$ ؟

الحل :

أ) تبيان أنه يوجد دوران يحول $[DM]$ إلى $[AN]$.



نوجه المستوي فالاتجاه غير المباشر. لدينا $ABCD$ مربع إذن قطراه $[AC]$ و $[BD]$

متقايسان ، متناصفان في O و متعامدان . ومنه $OA = OD$ و $D\hat{O}A = 90°$

وبالتالي : A هي صورة D بالدوران الذي مركزه O وزاويته $90°$.

نقارن بين المثلثين AMO و BNO لدينا : $OA = OB$ و $AM = BN$ ، $O\hat{A}M = O\hat{B}N = 45°$

إذن المثلثان AMO و BNO متقايسان وبالتالي : $OM = ON$ و $A\hat{O}M = B\hat{O}N$

ومنه $A\hat{O}M + M\hat{O}B = B\hat{O}N + M\hat{O}B$ أي : $A\hat{O}B = M\hat{O}N = 90°$

إذن : N هي صورة M بنفس الدوران السابق الذي مركزه O وزاويته $90°$.

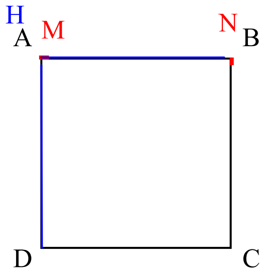
خلاصة : صورة القطعة $[AN]$ هي القطعة $[DM]$ بالدوران الذي مركزه O وزاويته $90°$.

ب) استنتاج طبيعة المثلث AHD.

لدينا صورة (AN) بالدوران الذي مركزه O وزاويته $90°$ هي المستقيم (DM)،

ومنه إحدى الزوايا المحورة بين المستقيمين (AN) و (DM) تقايس زاوية الدوران أي تقايس $90°$

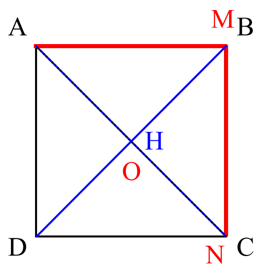
إذن المستقيمان (AN) و (DM) متعامدان وبالتالي المثلث AHD قائم في H.



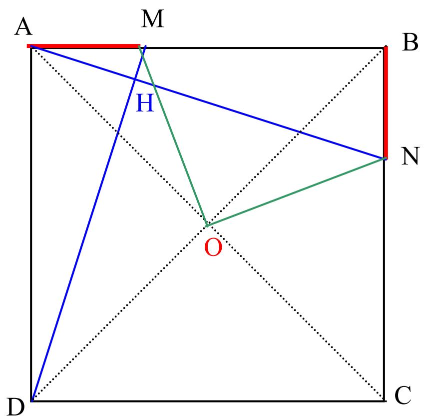
ج) تعيين مجموعة النقط H عندما M تمسح $[AB]$:

نسمي (h) مجموعة النقط H عندما M تمسح $[AB]$

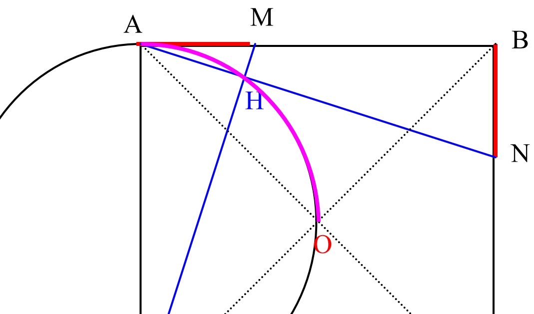
- إذا أخذنا M في الحد الأول من القطعة $[AB]$ أي M منطبقة على A
فإن N تكون منطبقة على B ومنه $[DM]$ هي $[AD]$ و $[AN]$ هي$[AB]$
وبالتالي H تكون منطبقة على A إذن المجموعة (h) تشمل النقطة A.



إذا أخذنا M في الحد الثاني من القطعة $[AB]$ أي M منطبقة على B
فإن N تكون منطبقة على C ومنه $[DM]$ هي $[DB]$ و $[AN]$ هي$[AC]$
وبالتالي H تكون منطبقة على O إذن المجموعة (h) تشمل النقطة O.
ومنه المجموعة (h) غير خالية.



- لتكن H نقطة من المجموعة (h)
إذن H هي نقطة تقاطع $[DM]$ و $[AN]$
حيث M ، N نقطتان من $[AB]$ و $[BC]$ على الترتيب و $AM = BN$ ،
مما سبق لدينا مهما كانت النقطة M من القطعة المستقيمة $[AB]$ فإن :
المثلث AHD قائم في H
وبالتالي H هي نقطة من القوس $\overset{\frown}{AO}$ للدائرة ذات القطر $[AD]$
ومنه المجموعة (h) محتواة في القوس $\overset{\frown}{AO}$
- لتكن H نقطة من القوس $\overset{\frown}{AO}$



(DH) يقطع [AB] في M و (AH) يقطع [BC] في N

لنبرهن أن AM = BN :

نقارن بين المثلثين ADM و ABN لدينا : AD = AB

$\widehat{MAD} = \widehat{ABN} = 90°$ و $\widehat{ADM} = \widehat{BAN}$ يحصران نفس القوس $\overset{\frown}{AH}$

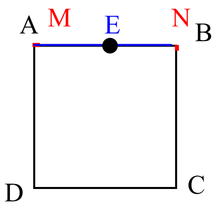
إذن المثلثان ADM و ABN متقايسان ومنه AM = BN

وبالتالي H هي نقطة من المجموعة (h) أي : $\overset{\frown}{AO}$ محتواة في (h)

خلاصة : $(h) = \overset{\frown}{AO}$.

د) تعيين مجموعة النقط S منتصف [MN] عندما M تمسح [AB] :

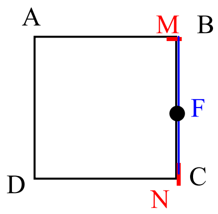
نسمي المجموعة المطلوبة (s) ،



• نأخذ M منطبقة على A فإن N تكون منطبقة على B

وبالتالي [MN] هي القطعة [AB].

إذن المجموعة (s) تشمل النقطة E منتصف [AB].

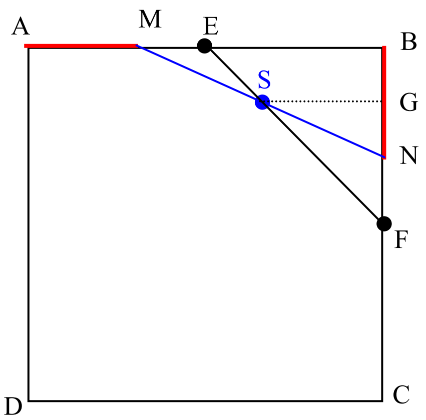


نأخذ M منطبقة على B فإن N تكون منطبقة على C

وبالتالي [MN] هي القطعة [BC].

إذن المجموعة (s) تشمل كذلك النقطة F منتصف [BC].

إذن المجموعة (s) غير خلية.



• لتكن S نقطة من المجموعة (s) إذن النقط S منتصف [MN]

G هي المسقط العمودي للنقطة S على (BC).

في المثلث MBN لدينا : (SG) // (MB) و S منتصف [MN]

إذن حسب نتائج مبرهنة طاليس لدينا G منتصف [NN] و MB = 2 SG

لدينا : AE = EB = BF و AM = BN إذن : ME = NF

ومنه : MB = ME + EB = NF + BF = NF + NF + BN

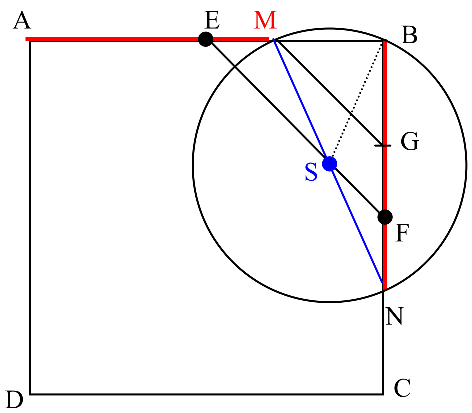
ومنه : MB = 2 NF + 2 NG = 2(NF + NG) = 2GF

بما أن MB = 2 SG فإن SG = GF منه المثلث SGF قائم ومتساوي الساقين وبالتالي : $\widehat{SFG} = 45°$

ولدينا المثلث EBF ومتساوي الساقين إذن $\widehat{EFB} = 45°$ أي : $\widehat{EFG} = 45°$ ومنه : $\widehat{SFG} = \widehat{EFG}$

وبالتالي النقط S تنتمي إلى القطعة [EF]   إذن : $(s) \subset [EF]$

• لتكن S نقطة من القطعة [EF]



نعين M من [AB] و N من [BC] حيث SM = SN = SB

لدينا : $\widehat{MSB} + \widehat{SMB} + \widehat{MBS} = 180°$

و $\widehat{BSN} + \widehat{SBN} + \widehat{NBS} = 180°$

ومنه : $\widehat{MSB}+2\widehat{MBS}=180°$ و $\widehat{BSN}+2\widehat{SBN}=180°$

إذن : $\widehat{MSB}+2\widehat{MBS}+\widehat{BSN}+2\widehat{SBN}=360°$

أي : $\widehat{MSN}+2\widehat{MBN}=360°$ ومنه : $\widehat{MSN}+180°=360°$

إذن $\widehat{MSN}=180°$ وبالتالي M ، S ، N في استقامية ومنه : النقط S منتصف $[MN]$

G نقطة من $[BC]$ حيث $BG = NC$ بما أن F منتصف $[BC]$ فإن F منتصف $[GN]$ كذلك

ولدينا النقط S منتصف $[MN]$ إذن بتطبيق نتائج مبرهنة طاليس في المثلث NGM نجد $(SF) // (GM)$

ومنه : $(EF) // (GM)$ إذن : $\widehat{BMG}=\widehat{BEF}=45°$ و $\widehat{BGM}=\widehat{BFE}=45°$ ومنه :

$\widehat{BMG}=\widehat{BGM}=45°$ إذن المثلث BMG متساوي الساقين وبالتالي : $BG = BM$

بما أن $BG = NC$ فإن : $BM = NC$ ومنه : $AM = BN$ إذن: S تنتمي إلى (s) إذن : $[EF]\subset(s)$

خلاصة : لدينا : $(s)\subset[EF]$ و $[EF]\subset(s)$ إذن : $(s)=[EF]$.

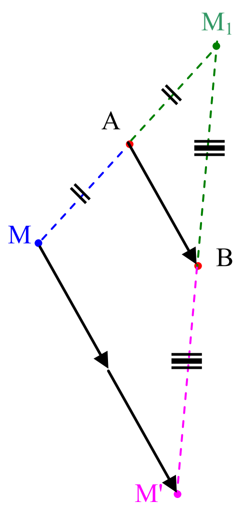
187 صفحة 437 (تركيب تناظرين بالنسبة إلى نقطتين متمايزتين)

A ، B نقطتان ثابتتان ومتمايزتين ، علم نقطة M ، ثم أنشئ M_1 نظيرتها بالنسبة إلى A ، و M' نظيرة M_1 بالنسبة إلى B.

نقول أن النقطة M' هي صورة M بمركب التناظر بالنسبة إلى A و التناظر بالنسبة إلى B.

أ) عبر عن $\overrightarrow{MM'}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$.

ب) استنتج نوع التحويل الناتج عن مركب تناظرين مركزيين.



الحل :

أ) عبر عن $\overrightarrow{MM'}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$.

لدينا A منتصف $[MM_1]$ و B منتصف $[M_1M']$ إذن حسب نتائج مبرهنة طاليس

نجد : $(AB) // (MM')$ و $MM' = 2\ AB$

بما أن

$\overrightarrow{MM'}$ و $\overrightarrow{AB}$ لهما نفس الاتجاه فإن : $\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{AB}$

ب) استنتج نوع التحويل الناتج عن مركب تناظرين مركزيين.

لدينا : $\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{AB}$ ومنه M' هي صورة M بالانسحاب الذي شعاعه $2\overrightarrow{AB}$

وبالتالي : مركب التناظر المركزي بالنسبة إلى A و التناظر المركزي بالنسبة إلى B بهذا الترتيب هو انسحاب شعاعه $2\overrightarrow{AB}$

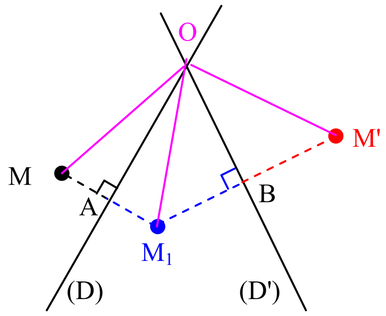
118 صفحة 437 (تركيب تناظرين بالنسبة إلى مستقيمين متقاطعين)

(D) و (D') مستقيمان متقاطعان في نقطة O ، علم النقطة M ، ثم أنشئ M_1 نظيرتها بالنسبة إلى (D) ، و M' نظيرة M_1 بالنسبة إلى (D').

أ) بين أن : $OM = OM'$ و ، أن الزاوية $M\hat{O}M'$ ثابتة.

ب) استنتج نوع التحويل الناتج عن مركب تناظرين بالنسبة إلى مستقيمين متقاطعين.

الحل :



أ) بين أن : $OM = OM'$ و ، أن الزاوية $M\hat{O}M'$ ثابتة.

لدينا : (D) محور القطعة $[MM_1]$ ويتقاطعان في A .

إذن : $OM = OM_1$ و $M\hat{O}A = A\hat{O}M_1$

ولدينا : (D') محور القطعة $[M_1M']$ ويتقاطعان في B .

إذن : $OM_1 = OM'$ و $M_1\hat{O}B = B\hat{O}M'$

ومنه : $OM = OM'$

نوجه المستوي في الاتجاه المباشر ونضع α قياس الزاوية المحصورة بين المستقيمين (D) و (D')

أي $A\hat{O}B = \alpha$. $M\hat{O}M' = M\hat{O}M_1 + M_1\hat{O}M' = 2\,A\hat{O}M_1 + 2\,M_1\hat{O}B = 2\,A\hat{O}B = 2\alpha$

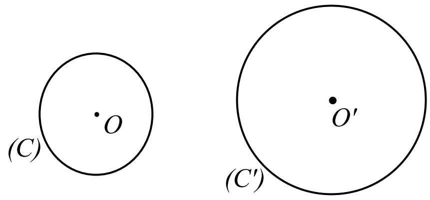
ب) استنتج نوع التحويل الناتج عن مركب تناظرين بالنسبة إلى مستقيمين متقاطعين.

لدينا : $OM = OM'$ و $M\hat{O}M' = 2\alpha$ إذن M' هي صورة M بالدوران الذي مركزه O وزاويته 2α

وبالتالي مركب تناظرين بالنسبة إلى مستقيمين متقاطعين هو الدوران الذي مركزه نقطة تقاطع هذين المستقيمين وزاويته ضعف الزاوية المحصورة بينهما.

111 صفحة 437

الهدف من التمرين هو إنشاء مماس مشترك خارجيا لدائرتين.



لتكن (C) و (C') دائرتين مركزاهما O و O' ونصفا قطريهما r و r' على الترتيب حيث $r' > r$ كما في الشكل.

أ) أرسم دائرة (δ) مركزها O' و نصف قطرها $(r' - r)$.

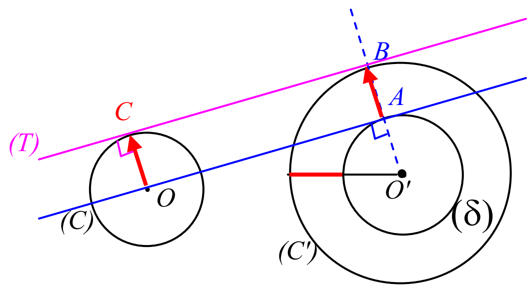
ب) أنشئ مماسا للدائرة (δ) يشمل النقطة O . سمِّ A النقطة المشتركة بين الدائرة (δ) وهذا المماس.

ج) نصف المستقيم $[O'A)$ يقطع الدائرة (C') في نقطة B . أنشئ المستقيم (T) صورة (OA) بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$.

د) تحقق من أن (T) مماس مشترك خارجيا لدائرتين (C) و (C').

الحل :

أ) أرسم دائرة (δ) مركزها O' و نصف قطرها $(r' - r)$.



ب) أنشئ مماسا للدائرة (δ) يشمل النقطة O .

سمِّ A النقطة المشتركة بين الدائرة (δ) وهذا المماس.

ج) نصف المستقيم $[O'A)$ يقطع الدائرة (C') في نقطة B .

أنشئ المستقيم (T) صورة (OA) بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$.

لدينا B صورة A بهذا الانسحاب ، نعتبر C صورة O بنفس الانسحاب إذن : $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$

ومنه المستقيم (T) صورة (OA) بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$.

د) تحقق من أن (T) مماس مشترك خارجيا لدائرتين (C) و (C').

لدينا المستقيم (T) صورة (OA) بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ إذن $(T) \,//\, (OA)$.

ولدينا : $(O'A)$ يعامد (OA) إذن $(O'B)$ يعامد (OA) ومنه : $(O'B)$ يعامد (T)

بما أن B نقطة من (C') فإن (T) هو مماس للدائرة (C')

لدينا : $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$ ومنه : $(OC) \,//\, (AB)$ و $OC = AB = r$ إذن (OC) يعامد (T) و C نقطة من (C)

إذن (T) هو مماس للدائرة (C)

خلاصة : (T) هو مماس مشترك خارجيا لدائرتين (C) و (C').

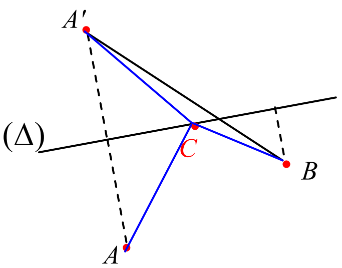
114 صفحة 437

A ، B نقطتان متمايزتان ومن نفس الجهة بالنسبة إلى مستقيم (Δ) ، علم على (Δ) نقطة C بحيث يكون :

$AC + CB$ أصغر ما يمكن.

الحل :

التحليل :



نعتبر النقطة A' صورة A بالتناظر المحوري بالنسبة إلى المستقيم (Δ)

ونفرض نقطة C من المستقيم (Δ) ، لينا : $CA' = CA$

ومنه : $AC + CB = A'C + CB$

إذا كانت C لا تنتمي إلى المستقيم $(A'B)$ فإن $CA'B$ يكون مثلث

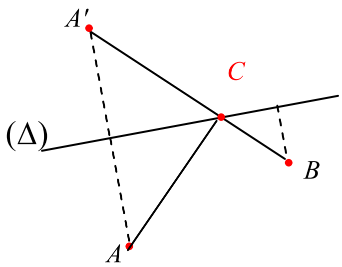
و مجموع ضلعين منه يكون أكبر تماما من الضلع الثالث. أي : $A'C + CB > A'B$

إذا كانت C تنتمي إلى المستقيم $(A'B)$ فإن $A'C + CB \geq A'B$ وأصغر ما يمكن هو $A'C + CB = A'B$

إذن حتى تكون $A'C + CB$ أصغر ما يمكن يجب أن تكون النقطة C من القطعة المستقيمة $[A'B]$

ومنه : $C \in (\Delta) \cap [A'B]$

التركيب والإنشاء :



نعتبر النقطة A' صورة A بالتناظر المحوري بالنسبة إلى المستقيم (Δ)

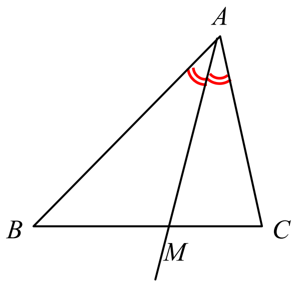
ونعتبر النقطة C حيث $C \in (\Delta) \cap [A'B]$ ولدينا $A'C + CB$ أصغر ما يمكن

أي : $AC + CB$ أصغر ما يمكن.

437 صفحة 114 الهدف من هذه المسألة هو برهان خاصية للمنصف الداخلي لزاوية في مثلث بعدة طرائق.

ABC مثلث كيفي ، $[AM)$ منصف زاوية الرأس A يقطع $[BC]$ في النقطة M. بين أن : $\frac{MB}{MC}=\frac{AB}{AC}$

طريقة 1 : باستعمال مبرهنة طاليس



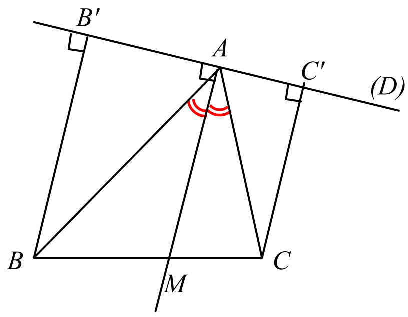
أرسم المستقيم الموازي لــ (AB) الذي يشمل النقطة C و يقطع (AM) في A'.

أ) ما نوع المثلث $AA'C$ ؟

ب) استنتج أن : $\frac{MB}{MC}=\frac{AB}{AC}$

طريقة 2 : باستعمال تشابه المثلثات

أرسم المستقيم (D) العمودي على (AM) الذي يشمل A ، علم B' و C' المسقطان العموديان للنقطتين B و C على (D) على الترتيب.



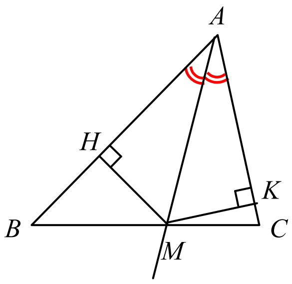
أ) بين لماذا $\frac{MB}{MC}=\frac{AB'}{AC'}$ ؟

ب) بين أن المثلثين ABB' و ACC' متشابهان.

ج) استنتج أن $\frac{MB}{MC}=\frac{AB}{AC}$

طريقة 3 : باستعمال المساحات

علم النقطتين K و H المسقطان العموديان للنقطة M على (AB) و (AC) على الترتيب.



أ) بين لماذا $MH = MK$ ؟

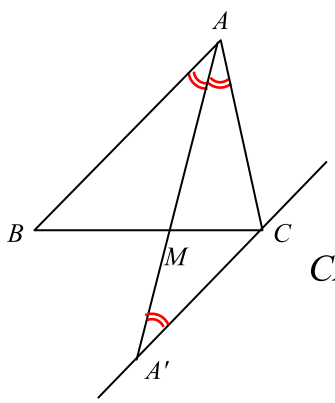
ب) عبر عن مساحة المثلث ABM باعتبار $[AB]$ كقاعدة ،

ثم باعتبار $[BM]$ كقاعدة . كرر العملية مع المثلث ACM.

ج) استنتج أن $\frac{MB}{MC}=\frac{AB}{AC}$.

الحل :

طريقة 1 : باستعمال مبرهنة طاليس



أرسم المستقيم الموازي لــ (AB) الذي يشمل النقطة C و يقطع (AM) في A'.

أ) نوع المثلث $AA'C$:

$B\hat{A}A'=A\hat{A'}C$ متبادلتان داخليا و $B\hat{A}A'=A'\hat{A}C$ من الفرضيات

إذن : $A'\hat{A}C=A\hat{A'}C$ ومنه المثلث $AA'C$ متساوي الساقين إذن : $CA = CA'$

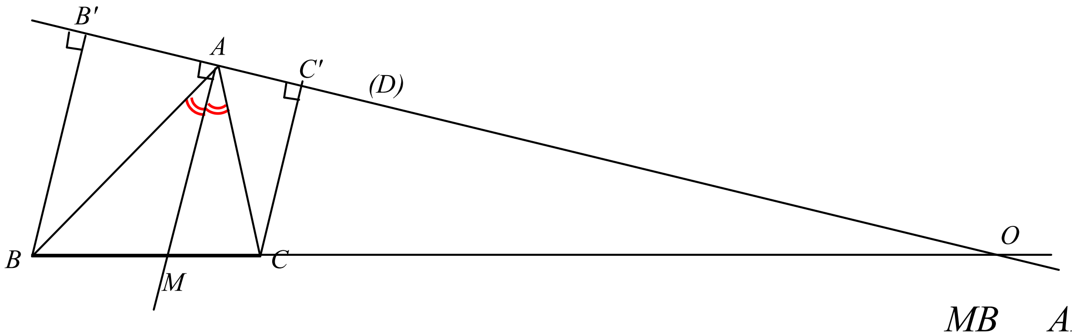
ب) استنتج أن : $\frac{MB}{MC}=\frac{AB}{AC}$:

لدينا $(AB)\,//\,(A'C)$ ومنه حسب مبرهنة طاليس : $\frac{MB}{MC}=\frac{MA}{MA'}=\frac{AB}{CA'}$ ومنه : $\frac{MB}{MC}=\frac{AB}{CA'}$

بما أن : $CA = CA'$ فإن : $\frac{MB}{MC}=\frac{AB}{AC}$

طريقة 2 : باستعمال تشابه المثلثات

أرسم المستقيم (D) العمودي على (AM) الذي يشمل A ، علم B' و C' المسقطان العموديان للنقطتين B و C على (D) على الترتيب.



أ) بين لماذا $\frac{MB}{MC}=\frac{AB'}{AC'}$:

(D) و (BC) يتقاطعان في النقطة O. لدينا (BB') و (AM) و (CC') مستقيمات متوازية.

نطبق مبرهنة طاليس : $\frac{OC}{OM}=\frac{OC'}{OA}$ و $\frac{OM}{OB}=\frac{OA}{OB'}$ يعني : $\frac{OA}{OM}=\frac{OC'}{OC}$ و $\frac{OA}{OM}=\frac{OB'}{OB}$

$\frac{OC'}{OC}=\frac{OA}{OM}=\frac{OA-OC'}{OM-OC}=\frac{AC'}{MC}$ و $\frac{OA}{OM}=\frac{OB'}{OB}=\frac{OB'-OA}{OB-OM}=\frac{AB'}{MB}$

وبالتالي : $\frac{AB'}{MB}=\frac{AC'}{MC}$ يعني : $\frac{MB}{MC}=\frac{AB'}{AC'}$.

ب) بين أن المثلثين ABB' و ACC' متشابهان.

لدينا : $B\hat{B'}A = A\hat{C'}C = 90°$

ولدينا : $B'\hat{B}A = B\hat{A}M$ و $B\hat{A}M = M\hat{A}C$ و $M\hat{A}C = A\hat{C}C'$ بالتبادل الداخلي و المعطيات

إذن : $B'\hat{B}A = A\hat{C}C'$

ولدينا : $B'\hat{A}B = 90° - B'\hat{B}A$ و $C'\hat{A}C = 90° - A\hat{C}C'$ إذن : $B'\hat{A}B = C'\hat{A}C$

ومنه المثلثان ABB' و ACC' متشابهان.

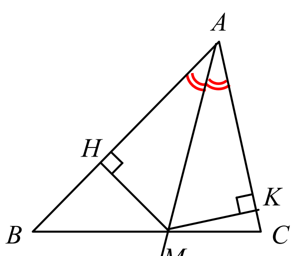
ج) استنتج أن $\frac{MB}{MC}=\frac{AB}{AC}$

من السؤال أ) لدينا : $\frac{MB}{MC}=\frac{AB'}{AC'}$

من السؤال ب) نستنتج : $\frac{AB'}{AC'}=\frac{AB}{AC}=\frac{BB'}{CC'}$

إذن : $\frac{MB}{MC}=\frac{AB}{AC}$.

طريقة 3 : باستعمال المساحات



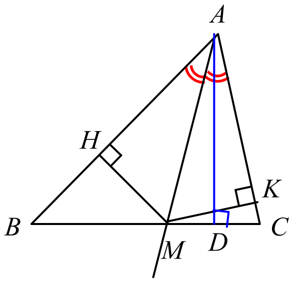
علم النقطتين K و H المسقطان العموديان للنقطة M على (AB) و (AC) على الترتيب.

أ) بين لماذا $MH = MK$ ؟

نقارن بين المثلثين القائمين AMH و AMK لهما $[AM]$ وتر مشترك

و $H\hat{A}M = M\hat{A}K$ وبالتالي المثلثان متقايسان إذن $MH = MK$

ب) عبر عن مساحة المثلث ABM باعتبار $[AB]$ كقاعدة ، ثم باعتبار $[BM]$ كقاعدة .



$s(ABM) = \frac{1}{2} AB \times HM$ و $s(ABM) = \frac{1}{2} BM \times AD$

كرر العملية مع المثلث ACM.

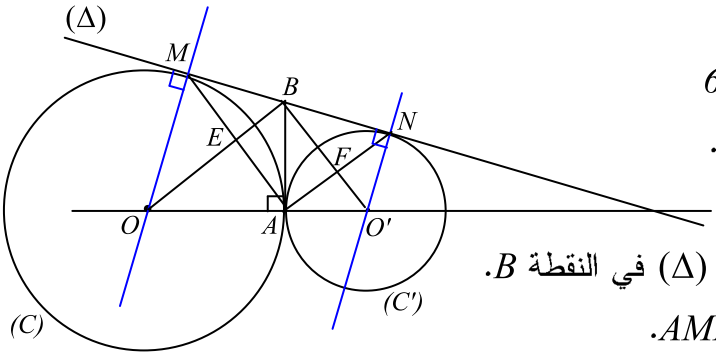
$s(ACM) = \frac{1}{2} AC \times KM$ و $s(ACM) = \frac{1}{2} CM \times AD$

ج) استنتج أن $\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}$.

من السؤال السابق نستنتج أن : $BM \times AD = AB \times HM$ و $CM \times AD = AC \times KM$

ومنه : $\frac{AB \times HM}{AC \times KM} = \frac{BM \times AD}{CM \times AD}$ بما أن : $MH = MK$ فإن : $\frac{AB}{AC} = \frac{BM}{CM}$ أي : $\frac{AB}{AC} = \frac{MB}{MC}$

نص المسألة :



(C) و (C') مركزاهما O و O' ونصفا قطريهما $6\ cm$ و $2\ cm$ على الترتيب، ومتماستان خارجيا في النقطة A.

(Δ) مماس مشترك لهما خارجيا في النقطتين M و N على الترتيب. المماس المشترك لهما في النقطة A يقطع (Δ) في النقطة B.

1. بين أن $BA = BM = BN$ واستنتج نوع المثلث AMN.

2. ما نوع المثلث BOO' ؟ برر جوابك.

3. أحسب MN (تعطى القيمة مدورة إلى $0,01$)

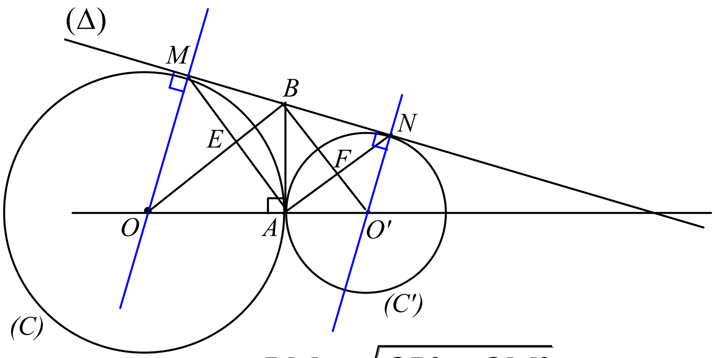
4. أحسب قيس الزاوية $B\hat{O}O'$ واستنتج الأقياس $B\hat{O}'O$ ، $M\hat{N}A$ ، $A\hat{M}N$.

5. نسمي E نقطة تقاطع (OB) ، (AM) و F نقطة تقاطع $(O'B)$ ، (AN). ما نوع الرباعي $AFBE$ ؟

أحسب مساحته (تعطى القيمة مدورة إلى $0,01$)

6. بين أن : $(MO) // (NO')$.

الحل :



1. تبيان أن $BA = BM = BN$

الطريقة 1 :

بما أن (Δ) مماس للدائرة (C) في النقطة M

فإن المثلث OMB قائم في M. فحسب مبرهنة فيثاغورس نجد : $BM = \sqrt{OB^2 - OM^2}$

بما أن (AB) مماس للدائرة (C) في النقطة A فإن المثلث OAB قائم في A .

فحسب مبرهنة فيثاغورس نجد : $BA=\sqrt{OB^2-OA^2}$

ولدينا : $OA = OM$ (من الدائرة (C)) إذن : $BM = BA$ . . . (1)

وبنفس الطريقة السابقة نجد : $BN = BA$ . . . (4) ومن (1) و (4) نجد : $BA = BM = BN$

الطريقة 2 :

لدينا : $A\hat{M}B=M\hat{A}B$ (تحصران نفس القوس AM في الدائرة (C)) ومنه المثلث ABM متساوي الساقين.

إذن : $BM = BA$ . . . (1)

ولدينا : $A\hat{N}B=N\hat{A}B$ (تحصران نفس القوس AN في الدائرة (C')) ومنه المثلث ABN متساوي الساقين.

إذن : $BN = BA$ . . . (4)

ومن (1) و (4) نجد : $BA = BM = BN$

الطريقة 3 : مقارنة بين المثلثين OAB و OMB و كذلك بين المثلثين $O'AB$ و $O'NB$.

- استنتاج نوع المثلث AMN.

نستنتج أن النقط A ، M ، N تنتمي إلى الدائرة ذات المركز B منتصف $[MN]$ ومنه المثلث AMN قائم في A.

2. نوع المثلث BOO' :

لدينا : $BA = BM = BN$ إذن : (OB) محور $[AM]$ و$(O'B)$ محور $[AN]$

وبما أن $(AM)\perp(AN)$ فإن : $(OB)\perp(O'B)$ وبالتالي : المثلث BOO' قائم في B.

3. حساب MN (تعطى القيمة مدورة إلى $0,01$):

المثلث BOO' قائم في B و $[BA)$ العمود المتعلق بالوتر $[OO']$ إذن : $BA^2 = AO \times AO'$

ومنه : $BA^2 = 6 \times 2 = 12$ وبالتالي : $BA=2\sqrt{3}cm$ ومنه : $MN=4\sqrt{3}cm$ أي : $MN\approx 6,93cm$

4. حساب قيس الزاوية $B\hat{O}O'$:

في المثلث القائم BOO' لدينا : $OA = 6\ cm$ و $BA=2\sqrt{3}cm$ إذن : $\tan B\hat{O}A=\frac{2\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

ومنه $B\hat{O}A=30°$ أي : $B\hat{O}O'=30°$

- استنتاج الأقياس $B\hat{O'}O$ ، $M\hat{N}A$ ، $A\hat{M}N$.

نستنتج أن : $B\hat{O'}O=60°$ لأن $B\hat{O}O'$ و $B\hat{O'}O$ متتامتان.

لدينا : (OB) محور $[AM]$ إذن $[OB)$ هو منصف الزاوية $M\hat{O}A$ وهي زاوية مركزية تحصر القوس MA

و الزاوية المحيطية التي تحصر معها نفس القوس هي $A\hat{M}B$ ومنه $A\hat{M}B=\frac{1}{2}A\hat{0}M=A\hat{O}B=30°$

أي : $A\hat{M}N=30°$ و لدينا : $M\hat{N}A$ ، $A\hat{M}N$ متتامتان إذن : $M\hat{N}A=60°$

5. نسمي E نقطة تقاطع *(OB)* ، *(AM)* و F نقطة تقاطع *(O'B)* ، *(AN)*.

- نوع الرباعي $AFBE$:

لدينا : $(AN)\perp(AM)$ و $(O'B)\perp(OB)$ و *(OB)* محور *[AM]* إذن الرباعي $AFBE$ هو مستطيل.

- حساب مساحة الرباعي $AFBE$ **(**تعطى القيمة مدورة إلى *0,01***)** :

لدينا : $A\hat{O}B = A\hat{0}M = \frac{1}{2}A\hat{0}M = A\hat{M}B = 30°$ أي : $A\hat{0}M = 60°$ ومنه المثلث OMA متقايس الأضلاع

وبالتالي : $AM = 6\ cm$ ومنه : $AE = \frac{1}{2}AM = 3cm$

ولدينا : $B\hat{N}A = 60°$ ومنه المثلث BNA متقايس الأضلاع إذن: $NA = 2\sqrt{3}cm$ ومنه: $AF = \frac{1}{2}AN = \sqrt{3}cm$

وبالتالي مساحة الرباعي $AFBE$ هي : $s = 2\sqrt{3}\times 3cm^2$ بالتدوير : $s \approx 5,20cm^2$

6. تبيان أن : *(MO) // (NO')*.