

تمارين مع الحلول

- الأعداد والحساب ✓
- الدوال عموميات ✓
- الحساب الشعاعي ✓
- ومعادلة مستقيم ✓
- الدوال المرجعية ✓
- العبارات الجبرية ✓
- الهندسة المستوية ✓
- الإحصاء ✓

تمرين 1 :

أكمل في الجدول التالي كل عدد معطى في العمود الموافق للمجموعة التي ينتمي إليها

| | N | Z | D | Q | R |
|----------------|---|---|---|---|---|
| - 3,2 | | | | | |
| $-\frac{6}{3}$ | | | | | |
| 5 | | | | | |
| $-\frac{3}{4}$ | | | | | |
| $\sqrt{2}$ | | | | | |
| $\sqrt{16}$ | | | | | |
| 0 | | | | | |
| π | | | | | |

تمرين 2 :

بسط واكتب النتيجة على شكل جداء أو حاصل قسمة قوى أسسها موجبة .

1- a) $\frac{(a^2 \cdot b)^{-3} \times c^2}{ab^{-3}}$; b) $\frac{-a^2 \times cb^{-1}}{ab}$; c) $\frac{(-a)^2 \cdot 2b}{2b^{-1}}$

2- a) $\frac{(a^2 b)^{-3} \times c^5 \cdot a^4}{a (bc^2)^2 \cdot b^{-1}}$; b) $\frac{(-a)^5 \cdot b \cdot c^{-2}}{b^3 (-c)^{-3} \cdot a^2}$

حيث : a, b, c أعداد حقيقية غير معدومة .

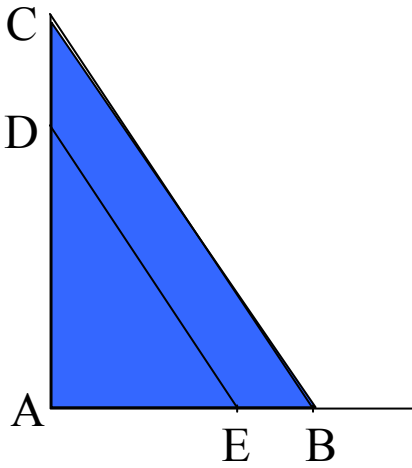
تمرين 3 :

ليكن العدد : $\varphi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$

(1) عين مقلوب φ أي : $\frac{1}{\varphi}$.

(2) تحقق أن : $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$ و $\varphi^2 = \varphi + 1$

تمرين 4 :



في المثلث ABC (الشكل) . ليكن (ED) يوازي (BC)

و لدينا : * $AE = 2\sqrt{3} - 1$

* $AD = 2 + \sqrt{3}$

* $EB = 1$

(1) احسب DC . واعط النتيجة على الشكل : $a + b\sqrt{3}$

(2) إذا كان ABC قائم في A . احسب DE .

تمرين 5 :

- أعط الكتابة العلمية و رتبة المقدار للأعداد التالية :

(1) سرعة الضوء في الخلاء هي : $300\ 000\ 000\ \text{m / s}$

(2) إذا افترضنا أن الأرض مكونة من حبات الرمل فإنها تحتوي على 300 مليار

من المليار حبة رمل .

(3) طول السنة الضوئية .

ملاحظة : المسافة = السرعة \times الزمن

تمرين 6 :

باستعمال الحاسبة أعط القيمة المدورة ذات 4 أرقام ذات معنى للأعداد التالية :

$$1- a) \frac{250}{11} ; b) \frac{3\sqrt{5}}{2} ; c) 43,57 \times 0,009$$

$$d) \frac{547}{1,43} ; e) \frac{700}{3\sqrt{2}}$$

$$2- a) \frac{5\sqrt{3}-4}{30} ; b) \frac{41}{12} - \sqrt{2} ; c) \frac{105}{104} - \frac{\sqrt{26}}{5}$$

تمرين 7 :

بسط الكسور الآتية :

$$* P = \frac{(-15)^2 \times (-345)^5 \times 64 \times (-5)^6 \times (49)^2 \times (161)^4}{(23)^5 \times (1225)^4 \times 480 \times (25)^{-2} \times 15^4 \times (115)^4}$$

$$* Q = \frac{(-60)^5 \times (-3)^{24} \times (-5)^4 \times (-8)^6 \times (-16)^3}{9^5 \times (40)^3 \times (-36)^2 \times (6)^{10} \times (48)^5 \times (625)^2}$$

$$* R = \frac{3 \times 10^{-4} \times (5^{-8})^2 \times 10^6 \times 16 \times 10^{-2} \times 11}{2 \times 10^2 \times 0,00003 \times (44) \times 10^{-7} \times (25)^{-4}}$$

تمرين 8 :

a عدد طبيعي أولى ، b عدد طبيعي . عين القيم الممكنة للعددين a , b بحيث :

$$a \times b = 1200$$

تمرين 9 :

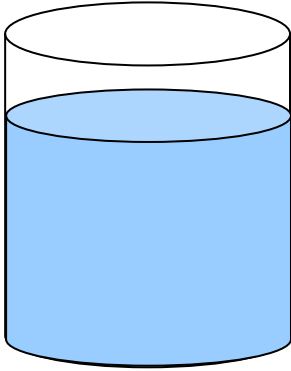
d أعداد حقيقية حيث : $2,5 \leq b \leq 2,6$; $1,3 \leq a \leq 1,4$
 $3,1 \leq c \leq 3,2$; $8,1 \leq d \leq 8,2$

$$k = \sqrt{\frac{a^2 + bc}{d - c}} \quad \text{عين حصرا للعدد } k \text{ حيث :}$$

تمرين 10 :

بئر على شكل أسطوانة دائرية . قاعدته دائرة (C) نصف قطرها R و ارتفاعه H حيث :

$$3,14 \leq \pi \leq 3,15 \quad ; \quad 4,3 \leq R \leq 4,4 \quad ; \quad 50,9 \leq H \leq 50,8$$



1 - عين حصرا لمساحة قاعدة البئر .

2 - عين حصرا لحجم البئر .

3 - ملأ $\frac{3}{4}$ من حجمه ماء . عين حصرا لحجم الماء .

تمرين 11 :

نعتبر العبارة : $f(x) = \frac{x^2 + 5x - 3}{x^2 + 1}$ ، حيث x عدد حقيقي .

(1) إذا علمت أن : $2 \leq x \leq 3$ عين حصرا للعدد $f(x)$.

(2) عين حصرا للعدد $f(x)$ إذا كان : $n \leq x \leq n+1$ حيث n عدد طبيعي .

تمرين 12 :

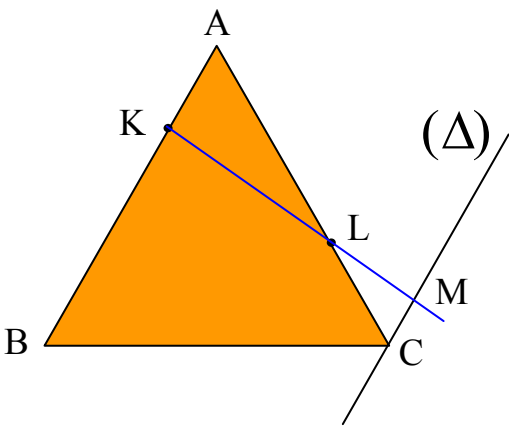
- ABCD رباعي ضلعاه [AD] و [BC] متقايسان و قطراه [AC] و [BD] متقايسان .
- 1) برهن أن المثلثين ABC و ABD متقايسان .
 - 2) برهن أن المثلثين ACD و BDC متقايسان .

تمرين 13 :

- ABCD مستطيل حيث : $AD = 20$, $AB = 16$ (وحدة الطول هي cm)
- K نقطة من [AD] بحيث : $AK = 15$
- L نقطة من [AB] بحيث : $AL = X$ حيث X عدد حقيقي موجب .
- 1) احسب كل من : LK^2 , KC^2 , LC^2
 - 2) احسب العدد x بحيث يكون المثلث KCL متساوي الساقين [KC] و [KL]
 - 3) احسب العدد x بحيث يكون المثلث KCL قائم في K .

تمرين 14 :

- ABC مثلث حيث : $AB = AC = 20$ (وحدة الطول هي cm) .
- K نقطة من [AB] بحيث : $AK = x$ مع $x < 10$.
- L نقطة من [AC] بحيث : $CL = 6$.
- (Δ) المستقيم الذي يشمل C و يوازي (AB) .
- المستقيم (KL) يقطع (Δ) في M .



$$MC = \frac{3x}{7} \quad \text{1) بين أن :}$$

$$MC = 3 \quad \text{2) عين } x \text{ بحيث :}$$

تمرين 15 :

(C) دائرة مركزها O .

A , B , D , E أربعة نقط من (C) حيث يتقاطع المستقيمان (AD) و (BE) في النقطة L .
- أثبت أن المثلثان ALE و BLD متشابهان .

تمرين 16 :

x عدد حقيقي . 1 - بسط العبارة p (x) حيث :

$$p(x) = \cos(x + 91\pi) + \sin(x - 60\pi) + \sin\left(x + \frac{9\pi}{2}\right) - \cos\left(x + \frac{21\pi}{2}\right)$$

$$2- \text{ حل في } R \text{ المعادلة : } p(x) = 0$$

$$3- \text{ حل في } R \text{ المعادلة : } p(x + 2\pi) = p(-x)$$

4- ثم مثل صور هذه الحلول على الدائرة المثلثية .

تمرين 17 :

x عدد حقيقي نعتبر النسبة :

$$Q(x) = \frac{\cos(\pi + x) - \sin(\pi + x) + \cos(\pi + x) - \sin(\pi - x)}{\cos^2(\pi + x) - \sin^2(\pi + x)}$$

1 - عين قيم x حتى تكون Q (x) معرفة .

$$Q(x) = \frac{-2 \cos x}{2 \cos^2 x - 1} \quad \text{2 - بين أن :}$$

3 - حل في $[0, 2\pi]$ المعادلة : $Q(x) = 2$

$$\text{لاحظ أن : } (x + 1)(2x - 1) = 2x^2 + x - 1$$

تمرين 18 :

أذكر صحة أو خطأ ما يلي :

1) $a(x + y)^2 = (ax + ay)^2$

2) $a(x - y)^2 = (a^2x - a^2y)^2$

3) $(2x - 3)^2 = 4x^2 + 9$

4) $x^2 + 4 = (x + 2)(x + 2)$

5) $(2a - b)^2 = 4a^2 - 4ab + b^2$

6) $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$

تمرين 19 :

(1) نعلم أن : $(a - b)^3 = (a - b) (a - b)^2$

- انشر العبارة $(a - b)^3$ ثم بسطها و اختصرها .

(2) انشر العبارتين $(a - b) (a^2 + ab + b^2)$, $(a + b) (a^2 - ab + b^2)$ ماذا تستنتج ؟

(3) انشر و اختصر العبارة $(a + b + c)^2$ ثم استنتج : $(4x^2 - x + 1)^2$

تمرين 20 :

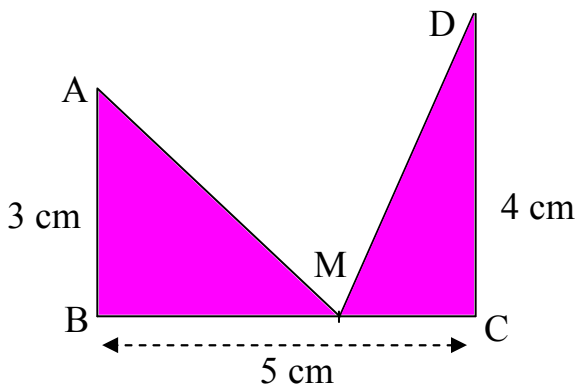
أكتب العبارات التالية على شكلها النموذجي : $f(x) = 6x^2 - x - 1$

$$Q(x) = 3x^2 + x + 12 \quad ; \quad p(x) = x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$$

* حلل إلى جداء كل من هذه العبارات إن أمكن .

* استنتج حلول كل من المعادلات : $f(x) = 0$ و $p(x) = 0$ و $Q(x) = 0$

تمرين 21 :



إليك الشكل المقابل :

عين وضع النقطة M بحيث تكون : $AM = DM$.

تمرين 22 :

هل يوجد مستطيل مساحته 6 Cm^2 ومحيطه 10 Cm^2 .
يطلب تعيين الحل جبريا ثم بيانيا .

تمرين 23 :

باستعمال آلة بيانية أنشئ التمثيلات البيانية (U_1) ; (U_2) ; (U_3) للدوال h , g , f على

$$\text{الترتيب حيث : } h(x) = x + 3 \quad ; \quad g(x) = \frac{4}{x} \quad ; \quad f(x) = x^2 - x$$

$$* \text{ حل بيانيا المعادلة : } f(x) = -2$$

$$* \text{ حل بيانيا المتراجحة : } f(x) > -2$$

$$* \text{ حل حسابيا ثم بيانيا المتراجحة : } \frac{4}{x} \leq x + 3$$

$$* \text{ حل حسابيا ثم بيانيا المتراجحة : } x + 3 \geq x^2 - x$$

تمرين 24 :

باستعمال الحاسبة البيانية أنشئ تمثيلا بيانيا (γ) للدالة f حيث $f(x) = \sin x$ على المجال $[-\pi, \pi]$.

- استنتج بيانيا على $[-\pi, \pi]$ حلول المعادلات التالية :

$$1) f(x) = -1 \quad ; \quad 2) f(x) = 1 \quad ; \quad 3) f(x) = 0$$

- استنتج بيانيا على $[-\pi, \pi]$ حلول المتراجحات التالية :

$$1) f(x) \leq -1 \quad ; \quad 2) f(x) > 1 \quad ; \quad 3) f(x) \geq 0$$

ما هو عدد حلول المعادلة : $f(x) = \frac{1}{2}$ عينها بتقريب 0,001 .

تمرين 25 :

ABCD متوازي الأضلاع الذي مركزه O . I منتصف [AB] . المستقيم الذي يوازي (AC) ويشمل D يقطع المستقيم الذي يوازي (BD) ويشمل C في النقطة J .
- برهن أن O , I , J على استقامة واحدة .

تمرين 26 :

A , B , C ثلاث نقط في المستوي ليست على استقامة واحدة :

1 - بين أن الشعاع $\vec{V} = \vec{NA} - 2\vec{NB} + \vec{NC}$ ثابت .

حيث N نقطة متغيرة في المستوي .

2 - أنشئ النقطة O حيث : $\vec{AO} = \vec{V}$.

تمرين 27 :

المستوي منسوب إلى معلم (O , \vec{i} , \vec{j}) . \vec{U} , \vec{V} شعاعان حيث :

$$\vec{U} = -2\vec{i} + 3\vec{j} ; \vec{V} = 4\vec{i} - \vec{j}$$

1 - أثبت أن (O , \vec{U} , \vec{V}) معلما للمستوي .

2 - نقطة N في المستوي إحداثياتها (x , y) في المعلم (O , \vec{i} , \vec{j}) و إحداثياتها

(x' , y') في المعلم (O , \vec{U} , \vec{V}) . أكتب x' , y' بدلالة x , y .

3 - هل توجد نقطة لها نفس الإحداثيين في المعلمين .

تمرين 28 :

في المستوي المنسوب إلى معلم (O, \vec{i}, \vec{j}) يعطى المستقيمان :

$$(\Delta): m x + (m - 1) y - 2 = 0$$

$$(D): (m + 1) x + (7m - 5) y + 3 = 0$$

1 - عين قيمة m حتى يكون (Δ) و (D) متوازيان .

2 - ناقش حسب قيم الوسيط m نقط تقاطع (Δ) و (D) .

تمرين 29 :

إليك التمثيل البياني لدالة f :

أذكر صحة أم خطأ كل جملة مما يلي :

$$(1) f(0) = 5$$

(2) القيمة 3 لها سابقتين بالدالة f .

(3) للمعادلة : $f(x) = 2$ أربعة حلول .

(4) للمعادلة : $f(x) = 1$ أربعة حلول .

(5) صورة العدد 5 هي 0 .

(6) ليس للدالة f قيمة حدية في المجال $[0, 10]$.

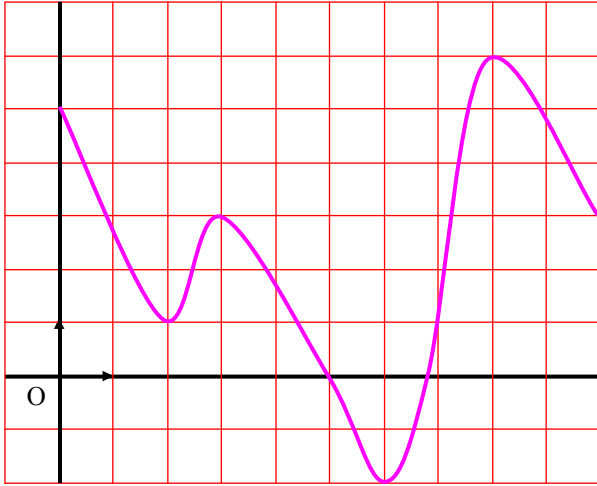
(7) العدد 3 هو قيمة حدية كبرى للدالة f

في المجال $[2, 5]$.

(8) القيمة 2 - هي قيمة حدية صغرى للدالة f على المجال $[0, 10]$.

(9) الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0, 10]$.

(10) الدالة f متناقصة تماما على المجال $[0, 2]$.



تمرين 30 :

f دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة كما يلي : $f(x) = \frac{a}{x}$ حيث : $a \in \mathbb{R}^*$

1- عين مجموعة تعريف f .

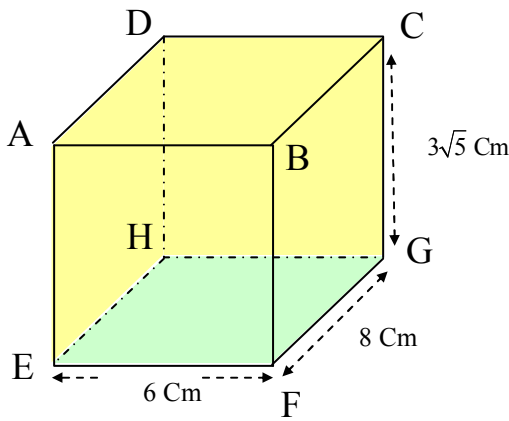
2- عين a حتى يكون : $f(1) = -3$.

3- أدرس اتجاه تغير الدالة f من أجل القيمة a المحصل عليها .

4- أحسب ما يلي :

$f(1)$; $f(3)$; $f(6)$; $f(-1)$; $f(-3)$; $f(-6)$

5- أنشئ المنحني (C) الممثل لتغيرات f في معلم متعامد متجانس (o, \vec{i}, \vec{j}) .



تمرين 31 :

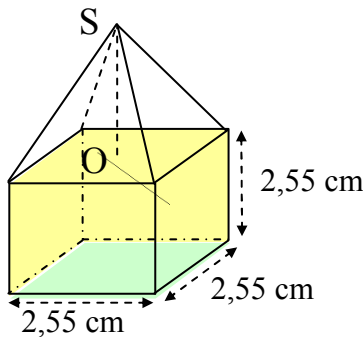
إليك الشكل المقابل :

(1) احسب المساحة الجانبية للشكل .

(2) احسب حجم الشكل .

(3) احسب محيط الرباعي AFGD .

تعطى النتائج على شكل قيم مدورة ذات 3 أرقام ذات معنى لها .



تمرين 32 :

إليك الشكل المقابل :

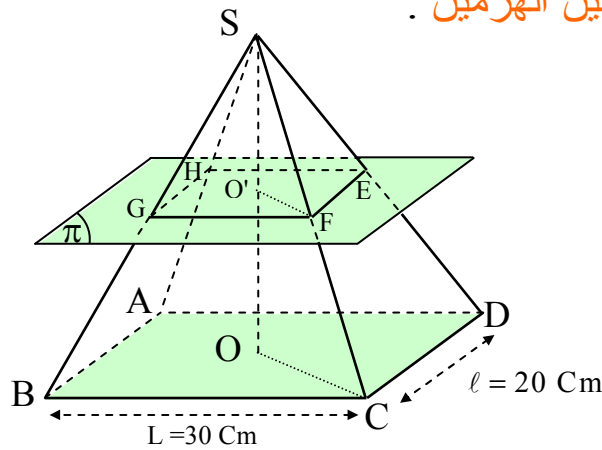
- احسب حجم هذا الشكل إذا علمت أن : $OS = 3,78 \text{ cm}$

تمرين 33 :

- في المستوي (π) نعتبر المثلث ABC القائم في A .
 D نقطة لا تنتمي إلى المستوي (π) بحيث يكون المستقيم (DC) عمودي على المستوي (ABC) .
- برهن أن المستقيم (AB) عمودي على المستوي (ADC) .

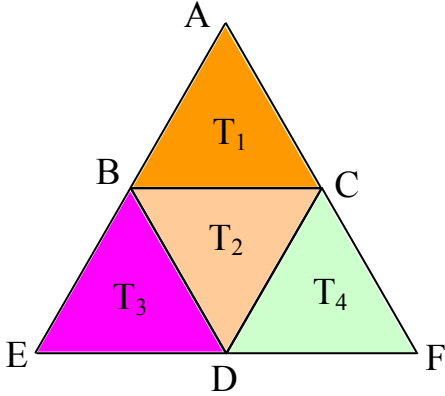
تمرين 34 :

- $SABCD$ هرم . قاعدته على شكل مستطيل طوله $L = 30 \text{ Cm}$ وعرضه $\ell = 20 \text{ Cm}$.
ارتفاع الهرم $H = 50 \text{ Cm}$. E نقطة من (SD) بحيث : $\frac{SE}{SD} = \frac{1}{2}$.
ليكن (π) المستوي الذي يشمل E ويوازي قاعدة الهرم .
 (π) يقطع (SA) , (SB) , (SC) في النقطة F , G , H على الترتيب .
(1) ما هي طبيعة الشكل $SEFGH$ ؟ احسب حجمه .
(2) احسب حجم الهرم $SABCD$.
(3) احسب حجم الجزء المحصور بين الهرمين .



تمرين 35 :

ليكن T_1, T_2, T_3, T_4 أربعة مثلثات متقايسة الأضلاع .



1- ما هو محور التناظر للتحويل الذي يحول T_1 إلى T_2 .

2- ما هو شعاع الانسحاب الذي يحول T_1 إلى T_3 .

3- ما هو مركز التناظر للتحويل الذي يحول T_2 إلى T_4 .

4- ما هي زاوية الدوران الذي مركزه C ويحول T_1 إلى T_2 .

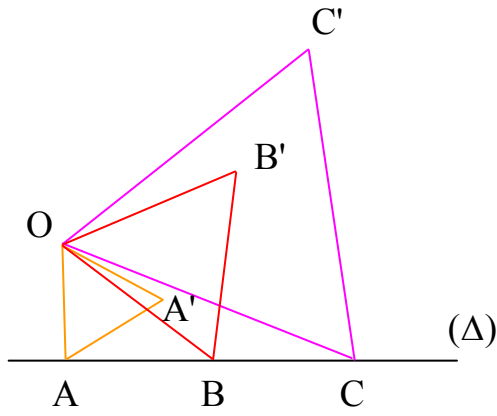
تمرين 36 :

(Δ) مستقيم . A, B, C ثلاثة نقط من (Δ) .

O نقطة لا تنتمي إلى (Δ) .

AOA' ; BOB' ; COC' ثلاثة مثلثات متقايسة

الأضلاع كما هو موضح في الشكل .



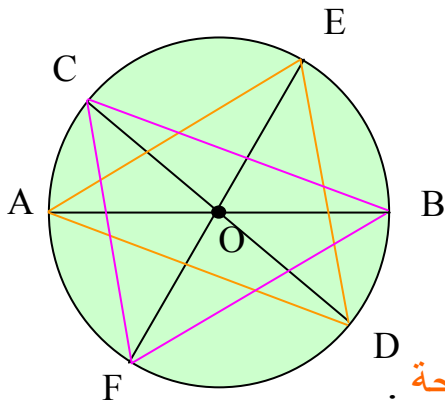
- برهن أن النقط A', B', C' على استقامة واحدة .

تمرين 37 :

(C) دائرة مركزها O .

[AB] ; [CD] ; [EF] ثلاثة أقطار

للدائرة كما هو موضح في الشكل .



- أثبت أن المثلثين AED و CFB لهما نفس المساحة .

تمرين 38 :

- ABCD متوازي أضلاع مركزه O . (Δ) مستقيم يشمل D ويقطع [AC] في M وليكن (Δ') المستقيم الموازي للمستقيم (Δ) ويشمل B فيقطع [AC] في N .
- برهن أن (Δ') هو صورة (Δ) بالتناظر الذي مركزه O .
- برهن أن O منتصف [MN] .

تمرين 39 :

إليك أطوال 40 تلميذاً في إحدى الأقسام :

.155 . 165 . 170 . 160 . 160 . 160 . 165 . 160 . 155 . 150 . 150 . 150 . 140
. 160 . 155 . 150 . 140 . 140 . 180 . 180 . 175 . 175 . 160 . 160 . 165 . 160
. 175 . 180 . 160 . 170 . 170 . 160 . 160 . 155 . 155 . 160 . 140 . 175 . 170
. 175 . (الأطوال بـ : cm) .

- 1 (اكتب جدولاً تبين فيه : التكرار و التواتر .
- 2 (مثل هذه الأطوال بواسطة : الأعمدة البيانية .
- 3 (احسب : المتوسط الحسابي ، الوسيط ، المنوال ، المدى لهذه الأطوال

تمرين 40 :

سئل 30 تلميذاً على عدد الساعات التي يقضيها كل واحد منهم في المراجعة المنزلية اليومية فكانت كما يلي :

| | | | | | | | | | |
|---|-----|---|-----|-----|---|-----|---|-----|-----|
| 3 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0,5 | 0,5 |
| 3 | 0,5 | 4 | 4 | 4,5 | 5 | 5 | 5 | 1,5 | 1,5 |
| 2 | 4 | 4 | 3,5 | 3,5 | 1 | 0,5 | 5 | 5 | 4 |

- 1 (يطلب تجميع هذه القيم في فئات سعتها 1 و أول هذه الفئات [0, 1].
ثم اكتب جدولاً إحصائياً تبين فيه التكرار و التواتر و مراكز الفئات .
- 2 (مثل هذه القيم بواسطة المدرج التكراري .
- 3 (احسب المتوسط الحسابي ، الوسيط ، المنوال ، المدى لهذه القيم .

تمرين 41 :

وعاء به 100 كرية منها 40 بيضاء و 50 صفراء و 10 خضراء ، نقوم بسحب 30 قريصة على التوالي مع إعادة الكرة المسحوبة إلى الوعاء قبل السحب الموالي .
في السحب الأول حصلنا على 15 قريصة بيضاء و 12 صفراء و 3 خضراء .
وفي السحب الثاني حصلنا على 9 قريصات بيضاء و 15 صفراء و 6 خضراء .
نرمز بـ : B إلى الحادثة « سحب قريصة بيضاء »
J إلى الحادثة « سحب قريصة صفراء »
V إلى الحادثة « سحب قريصة خضراء »

- 1 (ما هو التواتر لكل من الحوادث : B ، J ، V في كل من السحبين الأول و الثاني .
- 2 (مثل بيانياً هذين التواترين بواسطة الأعمدة على أن تصل بين رؤوس الأعمدة في كل من السحبين .

تمرين 42 :

إليك قائمة 10 أعداد أعطيت عشوائيا من طرف آلة حاسبة . نقترح استعمال هذه القائمة لمحاكاة 100 رمية لقطعة نقدية .

0,8937493678

0,6602753046

0,4425142699

0,0716413187

0,5881510402

0,8592915232

0,4195489012

0,1025053159

0,2138811512

0,4441064248

نقترح على أن نرفق بكل من الأرقام 0,1,2,3,4 الوجه P و بكل من الأرقام

5,6,7,8,9 الوجه F

(1) ما هو عدد الأوجه P ؟

(2) ما هو عدد الأوجه F ؟

(3) ما هو التواتر لكل من P و F ؟ أنشئ بيانيا التواتر لكل منهما .

(الرقم 0 إذا كان على اليمين لا يحسب)

المطلوب

تمرین 01 :

| | N | Z | D | Q | R |
|----------------|-------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| - 3,2 | × | × | - 3,2 | - 3,2 | - 3,2 |
| $-\frac{6}{3}$ | × | $\frac{-6}{3}$ | $\frac{-6}{3}$ | $\frac{-6}{3}$ | $\frac{-6}{3}$ |
| 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| $-\frac{3}{4}$ | × | × | $\frac{-3}{4}$ | $\frac{-3}{4}$ | $\frac{-3}{4}$ |
| $\sqrt{2}$ | × | × | × | × | $\sqrt{2}$ |
| $\sqrt{16}$ | $\sqrt{16}$ | $\sqrt{16}$ | $\sqrt{16}$ | $\sqrt{16}$ | $\sqrt{16}$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| π | | | | | π |

تمرین 02 :

1 - a) $a^{-7} \cdot c^2 = \frac{c^2}{a^7}$; b) $\frac{-a \cdot c}{b^2}$; c) $a^2 \cdot b^2 = (ab)^2$

2 - a) $a^{-3} \cdot b^{-4} \cdot c = \frac{c}{a^3 b^4}$; b) $a^3 \cdot b^{-2} \cdot c = \frac{a^3 \cdot c}{b^2}$

تمرين 03 :

(1) تعيين مقلوب φ :

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{5-1} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

(2) * تحقيق $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$:

$$\frac{1}{\varphi} + 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 1 = \frac{\sqrt{5}-1+2}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

* تحقيق $\varphi^2 = \varphi + 1$:

$$\varphi^2 = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^2 = \frac{5+2\sqrt{5}+1}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$\varphi + 1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} + 1 = \frac{\sqrt{5}+1+2}{2} = \frac{\sqrt{5}+3}{2}$$

إذن : $\varphi^2 = \varphi + 1$

تمرين 04 :

1) $DC = \frac{8}{11} + \frac{5}{11}\sqrt{3}$

2) $DE = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

تمرين 05 :

- 1) 3×10^8 ; رتبة المقدار 10^8
2) 3×10^{20} ; رتبة المقدار 10^{20}
3) $9,4608 \times 10^{15}$; رتبة المقدار 10^{15}

ملاحظة : طول السنة الضوئية = سرعة الضوء $\times (365 \times 24 \times 60 \times 60)$

لأن السنة فيها 365 يوم و اليوم فيه 24 ساعة و الساعة فيها 60 دقيقة
و الدقيقة فيها 60 ثانية .

تمرين 06 :

1- a) $\frac{250}{11} \approx 22,7273$; b) $\frac{3\sqrt{5}}{2} \approx 3,3541$
c) $43,57 \times 0,009 \approx 0,3921$; d) $\frac{547}{1,43} \approx 382,5175$
e) $\frac{700}{3\sqrt{2}} \approx 164,9916$

2- a) $\frac{5\sqrt{3}-4}{30} \approx 0,1553$
b) $\frac{41}{12} - \sqrt{2} \approx 2,0025$
c) $\frac{105}{104} - \frac{\sqrt{26}}{5} \approx -0,0102$

تمرين 07 :

*
$$P = \frac{-15^2 \times (345)^5 \times 64 \times (5)^6 \times (49)^2 \times (161)^4}{(23)^5 \cdot (1225)^4 \times 480 \times (25)^{-2} \times 15^4 \times (115)^4}$$
$$P = \frac{-(3 \times 5)^2 \times (3 \times 5 \times 23)^5 \times 2^6 \times 5^6 \times (7^2)^2 \times (7 \times 23)^4}{(23)^5 (5^2 \times 7^2)^4 \times 2^5 \times 3 \times 5 \times (5^2)^{-2} \times (3 \times 5)^4 \times (5 \times 23)^4}$$
$$P = \frac{-3^2 \times 5^2 \times 3^5 \times 5^5 \times (23)^5 \times 2^6 \times 5^6 \times 7^4 \times 7^4 \times (23)^4}{(23)^5 \times 5^8 \times 7^8 \times 2^5 \times 3 \times 5 \times 5^{-4} \times 3^4 \times 5^4 \times 5^4 \times (23)^4}$$

$$P = \frac{-2^6 \times 3^7 \times 5^{13} \times 7^8 \times (23)^9}{2^5 \times 3^5 \times 5^{13} \times 7^8 \times (23)^9} = -2 \times 3^2 = -18$$

$$* Q = \frac{60^5 \times 3^{24} \times 5^4 \times 8^6 \times 16^3}{9^5 \times (40)^3 \times (36)^2 \times 6^{10} \times (48)^5 \times (625)^2}$$

$$Q = \frac{2^{10} \times 3^5 \times 5^5 \times 3^{24} \times 5^4 \times 2^{18} \times 2^{12}}{3^{10} \times 2^9 \times 5^3 \times 2^4 \times 3^4 \times 2^{10} \times 3^{10} \times 2^{20} \times 3^5 \times 5^8} = \frac{2^{40} \times 3^{29} \times 5^9}{2^{43} \times 3^{29} \times 5^{11}} = \frac{1}{2^3 \times 5^2} = \frac{1}{200}$$

$$* R = \frac{3 \times (2 \times 5)^{-4} \times (5^{-8})^2 \times (2 \times 5)^6 \times 2^4 \times (2 \times 5)^{-2} \times 11}{2 \times (2 \times 5)^2 \times 3 \times 10^{-5} \times 2^2 \times 11 \times (2 \times 5)^{-7} \times 5^{-8}}$$

$$R = \frac{3 \times 2^{-4} \times 5^{-4} \times 5^{-16} \times 2^6 \times 5^6 \times 2^4 \times 2^{-2} \times 5^{-2} \times 11}{2 \times 2^2 \times 5^2 \times 3 \times 2^{-5} \times 5^{-5} \times 2^2 \times 11 \times 2^{-7} \times 5^{-7} \times 5^{-8}}$$

$$R = \frac{2^4 \times 3 \times 5^{-16} \times 11}{2^{-7} \times 3 \times 5^{-18} \times 11} = 2^{11} \times 5^2 = 51200$$

تمرین 08 :

$$a \times b = 1200 = 2^4 \times 3 \times 5^2$$

بما أن a عدد أولى فإن قيم a هي : 2 ، 3 ، 5 .

$$* a = 2: b = \frac{1200}{2} = 600$$

$$* a = 3: b = \frac{1200}{3} = 400$$

$$* a = 5: b = \frac{1200}{5} = 240$$

تمرين 09 :

تعيين حصر العدد K :

$$\text{لدينا : } 1,3 \leq a \leq 1,4 \quad \text{و منه : } 1,69 \leq a^2 \leq 1,96$$

$$\text{و بما أن : } 2,5 \leq b \leq 2,6 \quad \text{و } 3,1 \leq c \leq 3,2 \quad \text{فإن : } 7,75 \leq bc \leq 8,32$$

$$\text{و منه : } 9,44 \leq a^2 + bc \leq 10,28$$

$$\left(\begin{array}{l} 8,1 \leq d \leq 8,2 \\ 3,1 \leq c \leq 3,2 \end{array} \right) \Rightarrow (8,1 - 3,2 \leq d - c \leq 8,2 - 3,1) \quad \text{لدينا :}$$

$$\text{و عليه : } 4,9 \leq d - c \leq 5,1$$

$$\left(\begin{array}{l} 9,44 \leq a^2 + bc \leq 10,28 \\ 4,9 \leq d - c \leq 5,1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\frac{9,44}{5,1} \leq \frac{a^2 + bc}{d - c} \leq \frac{10,28}{4,9} \right) \quad \text{لدينا :}$$

$$\text{و عليه : } 1,85 \leq \frac{a^2 + bc}{d - c} \leq 2,09$$

$$\text{و منه : } \sqrt{1,85} \leq \sqrt{\frac{a^2 + bc}{d - c}} \leq \sqrt{2,09} \quad \text{إذن : } 1,36 \leq K \leq 1,44$$

تمرين 10 :

$$S = \pi R^2 \quad \text{1 - مساحة قاعدة البئر :}$$

$$\text{لدينا : } (4,3 \leq R \leq 4,4) \Rightarrow (18,49 \leq R^2 \leq 19,36)$$

$$\text{و منه : } 18,49 \times 3,14 \leq \pi R^2 \leq 19,36 \times 3,15 \quad \text{إذن : } 58,05 \leq S \leq 60,98$$

$$V_1 = S \times H \quad \text{2 - حجم البئر :}$$

$$\text{لدينا : } 58,05 \times 50,9 \leq S \times H \leq 60,98 \times 50,8$$

$$\text{إذن : } 2954,745 \leq V_1 \leq 3097,784$$

$$2954,745 \times \frac{3}{4} \leq V_1 \times \frac{3}{4} \leq 3097,784 \times \frac{3}{4} \quad \text{لدينا} \quad V_2 = V_1 \times \frac{3}{4} \quad \text{3 - حجم الماء :}$$

$$2216,05875 \leq V_2 \leq 2323,338 \quad \text{ومنه :}$$

تمرين 11 :

$$1- \text{لدينا : } (2 \leq x \leq 3) \Rightarrow (4 \leq x^2 \leq 9)$$

$$\left(\begin{array}{l} 10 \leq 5x \leq 15 \\ \text{و} \\ 4 \leq x^2 \leq 9 \end{array} \right) \Rightarrow (14 \leq x^2 + 5x \leq 24) \quad \text{ومنه :}$$

$$\text{إذن : } 11 \leq x^2 + 5x - 3 \leq 21 \quad \dots (1)$$

$$\text{لدينا : } (4 \leq x^2 \leq 9) \Rightarrow (5 \leq x^2 + 1 \leq 10) \dots (2)$$

$$\text{من (1) و (2) ينتج : } \frac{11}{10} \leq \frac{x^2 + 5x - 3}{x^2 + 1} \leq \frac{21}{5} \quad \text{إذن : } 1,1 \leq f(x) \leq 4,2$$

$$2- \text{لدينا : } (n \leq x \leq n+1) \Rightarrow (n^2 \leq x^2 \leq (n+1)^2)$$

$$\left(\begin{array}{l} n^2 \leq x^2 \leq (n+1)^2 \\ 5n \leq 5x \leq 5(n+1) \end{array} \right) \Rightarrow (n^2 + 5n \leq x^2 + 5x \leq (n+1)^2 + 5(n+1))$$

$$\text{ومنه : } n^2 + 5n - 3 \leq x^2 + 5x - 3 \leq (n+1)^2 + 5(n+1) - 3$$

$$n^2 + 5n - 3 \leq x^2 + 5x - 3 \leq n^2 + 7n + 3 \quad \dots (1)$$

$$\text{لدينا : } n^2 + 1 \leq x^2 + 1 \leq (n+1)^2 + 1$$

$$\text{ومنه : } n^2 + 1 \leq x^2 + 1 \leq n^2 + 2n + 2 \quad \dots (2)$$

$$\text{و عليه : } \frac{n^2 + 5n - 3}{n^2 + 2n + 2} \leq \frac{x^2 + 5x - 3}{x^2 + 1} \leq \frac{n^2 + 7n + 3}{n^2 + 1}$$

و عليه : $\frac{n^2 + 5n - 3}{n^2 + 2n + 2} \leq f(x) \leq \frac{n^2 + 7n + 3}{n^2 + 1}$

تمرين 12 :

(1) إثبات أن المثلثين ABC و ABD متقايسان .

لدينا : (فرضا) * $BC = AD$ * (فرضا) * $BD = AC$

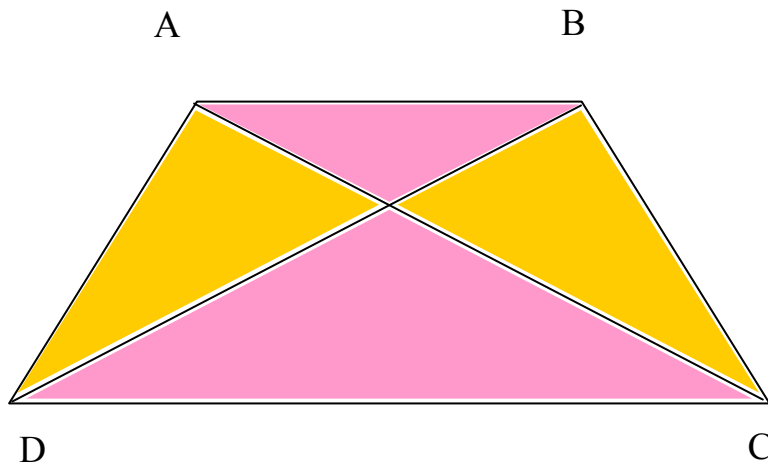
* [AB] (ضلع مشترك)

ومنه : المثلثان ABC و ABD متقايسان .

(2) إثبات أن المثلثين ACD و BDC متقايسان .

لدينا : (فرضا) * $AC = BD$ * (فرضا) * $AD = BC$ * [DC] (ضلع مشترك)

ومنه : المثلثان ACD و BDC متقايسان .



تمرين 13 :

(1) الحساب :

* المثلث LBC قائم في B وعليه : $LC^2 = LB^2 + BC^2$

$$LC^2 = (16 - x)^2 + (20)^2 \quad \text{ومنه :}$$

$$= 256 - 32x + x^2 + 400$$

$$= 656 - 32x + x^2$$

* المثلث KDC قائم في D

وعليه : $KC^2 = KD^2 + DC^2$

$$= (5)^2 + (16)^2$$

$$= 25 + 256 = 281$$

* المثلث ALK قائم في A

وعليه : $LK^2 = LA^2 + AK^2 = x^2 + (15)^2 = x^2 + 225$

(2) لدينا : $KC = LK$

ومنه : $281 = x^2 + 225$ إذن : $x^2 = 56$

و عليه : $x = \sqrt{56}$ و بالتالي : $x = 2\sqrt{14}$

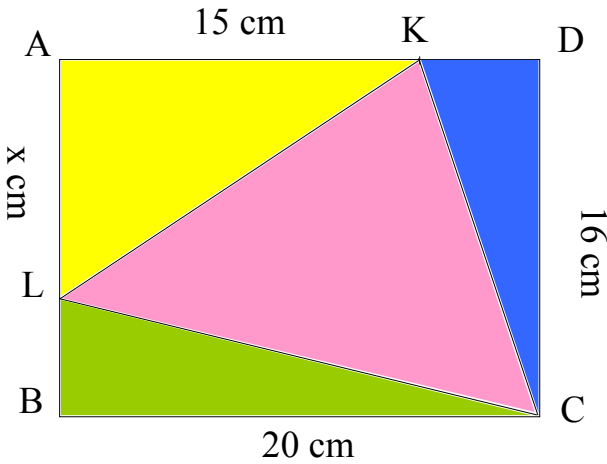
(3) المثلث KCL قائم في K معناه :

$$KC^2 + KL^2 = LC^2$$

و عليه : $281 + x^2 + 225 = 656 - 32x + x^2$

ومنه : $32x = 656 - 281 - 225 = 150$

و بالتالي : $x = \frac{150}{32}$ إذن : $x = \frac{75}{16}$



تمرين 14 :

1 (تبيان أن : $MC = \frac{3x}{7}$)

لدينا : $(AB) \parallel (\Delta)$

و عليه حسب نظرية طاليس $\frac{LC}{LA} = \frac{MC}{AK}$ و بالتالي : $\frac{6}{14} = \frac{MC}{x}$

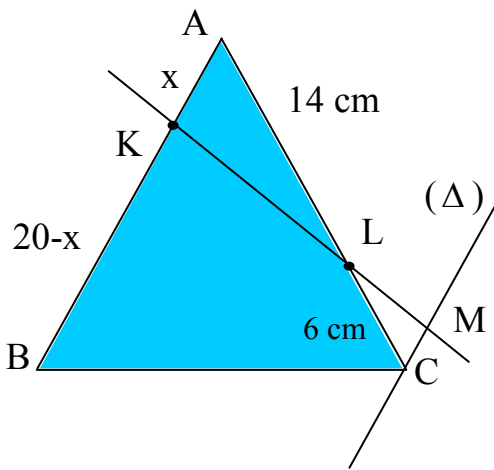
ومنه : $14 MC = 6x$ و عليه : $MC = \frac{6}{14}x$

وبالتالي : $MC = \frac{3x}{7}$

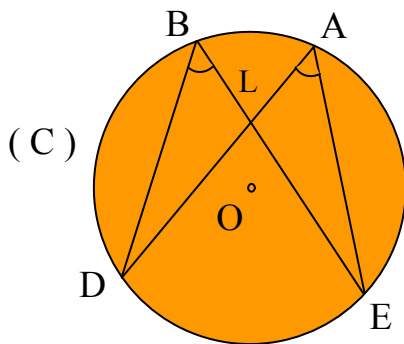
(2) تعيين x :

لدينا : $MC = 3$ و عليه : $\frac{3x}{7} = 3$

ومنه : $3x = 21$ إذن : $x = 7$



تمرين 15 :



* لدينا : $\widehat{ALE} = \widehat{BLD}$ (بالتقابل بالرأس) .

* و لدينا : $\widehat{EAL} = \widehat{DBL}$

(زاويتان تحصران نفس القوس DE) .

و عليه : المثلثان ALE و BLD متشابهان .

تمرين 16 :

1- تبسيط العبارة $p(x)$:

$$p(x) = \cos(x + \pi) + \sin x + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$p(x) = -\cos x + \sin x + \cos x + \sin x$$

إذن : $p(x) = 2 \sin x$.

2- حل المعادلة : $p(x) = 0$

أي : $2 \sin x = 0$ و بالتالي : $\sin x = 0$

و حسب الدائرة المثلثية نجد : $(x = k\pi ; k \in \mathbb{Z})$

إذن حلول المعادلة هي الأعداد الحقيقية x حيث : $x = k\pi ; k \in \mathbb{Z}$.

3- حل المعادلة : $p(x + 2\pi) = p(x) \dots (1)$

(1) تعني : $2 \sin(x + 2\pi) = 2 \sin(-x)$

و هذا يعني أن : $\sin(x + 2\pi) = \sin(-x)$

و حسب الدائرة المثلثية نجد :

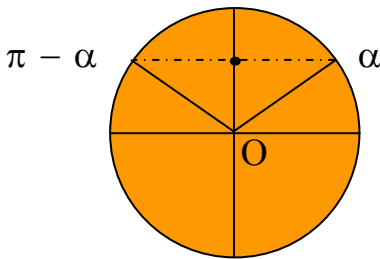
$$\left(\begin{array}{l} x + 2\pi = -x + 2k\pi , k \in \mathbb{Z} \\ \text{أو} \\ x + 2\pi = \pi + x + 2k\pi , k \in \mathbb{Z} \end{array} \right)$$

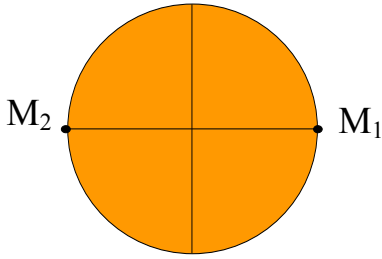
ومنه :

$$\left(\begin{array}{l} x = -\pi + k\pi , k \in \mathbb{Z} \\ 0 = -\pi + 2k\pi , k \in \mathbb{Z} \text{ (مستحيل)} \end{array} \right)$$

إذن حلول المعادلة هي الأعداد الحقيقية x بحيث :

$$x = (k - 1)\pi , k \in \mathbb{Z}$$





- تمثيل صور الحلول على الدائرة المثلثية :

من أجل : $k = 0$ لدينا : $x = -\pi$

من أجل : $k = 1$ لدينا : $x = 0$

صورتا الحلين هما النقطتان $M_1(0)$ و $M_2(-\pi)$

تمرين 17 :

يكون $Q(x)$ معرفة إذا وفقط إذا : $\cos^2(\pi+x) - \sin^2(\pi+x) \neq 0$

$$[\cos^2(\pi+x) - \sin^2(\pi+x) = 0] \Leftrightarrow [\cos^2 x - \sin^2 x = 0] \dots (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow [(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = 0]$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x - \sin x = 0 \\ \cos x + \sin x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \sin x \\ \cos x = -\sin x \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi & ; k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{-\pi}{4} + k\pi & ; k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{و منه حسب الدائرة المثلثية :}$$

إذن تكون $Q(x)$ معرفة إذا وفقط إذا :

$$x \neq \frac{\pi}{4} + R\pi, \quad x \neq \frac{-\pi}{4} + k\pi, \quad R \in \mathbb{Z}$$

$$Q(x) = \frac{-2 \cos x}{2 \cos^2 x - 1} \quad \text{- تبيان أن :}$$

$$Q(x) = \frac{\cos(\pi+x) - \sin(\pi+x) + \cos(\pi-x) - \sin(\pi-x)}{\cos^2(\pi+x) - \sin^2(\pi+x)}$$

$$Q(x) = \frac{-\cos x + \sin x - \cos x - \sin x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$$

$$Q(x) = \frac{-2 \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$$

ومنه : $Q(x) = \frac{-2 \cos x}{2 \cos^2 x - 1}$

*حل في $[0, 2\pi]$ المعادلة : $Q(x) = 2$

$$(Q(x) = 2) \Leftrightarrow \left(\frac{-2 \cos x}{2 \cos^2 x - 1} = 2 \right) \dots (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow (-2 \cos x = 4 \cos^2 x - 2)$$

$$(1) \Leftrightarrow (4 \cos^2 x + 2 \cos x - 2 = 0)$$

$$(1) \Leftrightarrow (2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0)$$

حل المعادلة : $2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

بوضع : $\cos x = y$ نجد : $2y^2 + y - 1 = 0$

إذن : $(y + 1)(2y - 1) = 0$

وعليه : $(\cos x + 1)(2 \cos x - 1) = 0 \dots (2)$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x + 1 = 0 \\ \text{أو} \\ 2 \cos x - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{إذن :}$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

ومنه : $(\cos x = -1) \Leftrightarrow (\cos x = \cos \pi)$

$$(\cos x = -1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{أو} \\ x = -\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$(\cos x = -1) \Leftrightarrow (x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

$$\left(\cos x = \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow \left(\cos x = \cos \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\left(\cos x = \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{أو} \\ x = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{pmatrix}$$

و بما أن $x \in [0, 2\pi]$ فإن : $x = \frac{\pi}{3}$ أو $x = \pi$ أو $x = \frac{-\pi}{4}$

وبالتالي الحلول هي : $\frac{-\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \pi$

و هذه الحلول مقبولة لأن $Q(x)$ معرفة عندها .

تمرين 18 :

- (1) (2) (3) (4)
- (5) (6) (7)

تمرين 19 :

1) نشر وتبسيط واختصار العبارة : $(a - b)^3$

$$* (a - b)^3 = (a - b)(a - b)^2 = (a - b)(a^2 - 2ab + b^2)$$

$$= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3$$

$$\cdot (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \quad \text{و منه :}$$

(2) النشر :

$$* (a - b) (a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3$$

$$\cdot (a - b) (a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3 \quad \text{و منه :}$$

$$* (a + b) (a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3$$

$$\cdot (a + b) (a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3 \quad \text{و منه :}$$

الاستنتاج :

$$* a^3 - b^3 = (a - b) (a^2 + ab + b^2)$$

$$* a^3 + b^3 = (a + b) (a^2 - ab + b^2)$$

(3) النشر والاختصار :

$$(a + b + c)^2 = [a + (b + c)]^2 = a^2 + 2a (b + c) + (b + c)^2$$

$$= a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + c^2 + 2bc$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

استنتاج $(4x^2 - x + 1)^2$:

$$(4x^2 - x + 1)^2 = [4x^2 + (-x) + 1]^2$$

$$= (4x^2)^2 + (-x)^2 + (1)^2 + 2(4x^2)(-x) + 2(4x^2)(1) + 2(-x)(1)$$

$$= 16x^4 + x^2 + 1 - 8x^3 + 8x^2 - 2x$$

$$\cdot (4x^2 - x + 1)^2 = 16x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 2x + 1$$

تمرين 20 :

مساحة ABCD هي : $S_1 = (2x - 1)x = 2x^2 - x$

مساحة ADE هي : $S_2 = \frac{(2x - 1)x}{2} = \frac{2x^2 - x}{2}$

مساحة المنزل هي : $S = S_1 + S_2$ و منه : $S = 2x^2 - x + \frac{2x^2 - x}{2} = \frac{4x^2 - 2x + 2x^2 - x}{2}$

ومنه : $S = \frac{6x^2 - 3x}{2}$ ولدينا : $S = 180 \text{ m}^2$ وعليه : $\frac{6x^2 - 3x}{2} = 180$

إذن : $6x^2 - 3x = 360$ أي : $6x^2 - 3x - 360 = 0$

بالقسمة على 3 نجد : $2x^2 - x - 120 = 0$

لدينا : $\Delta = b^2 - 4ac$ أي : $\Delta = (-1)^2 - 4(2)(-120) = 961$

$\Delta > 0$ و عليه للمعادلة حلين متمايزين :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - \sqrt{961}}{2 \times 2} = \frac{-15}{2} \quad (\text{مرفوض})$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + \sqrt{961}}{2 \times 2} = 8 \quad \text{و}$$

وعليه : $x = 8$.

تمرين 21 :

تعيين وضعية M :

* في المثلث القائم ABM لدينا : $AM^2 = AB^2 + BM^2$

ومنه : $AM^2 = 9 + (BC - MC)^2$

إذن : $AM^2 = 9 + (5 - MC)^2$

* وفي المثلث القائم DCM لدينا : $DM^2 = DC^2 + MC^2$

$$DM^2 = 16 + MC^2 \quad \text{ومنه :}$$

يكون $AM = DM$ إذا فقط إذا كان : $AM^2 = DM^2$

$$9 + (5 - MC)^2 = 16 + MC^2 \quad \text{وهذا يعني أن :}$$

$$9 + 25 - 10MC + MC^2 = 16 + MC^2 \quad \text{أي :} \quad MC = \frac{18}{10} \quad \text{ومنه :}$$

أي : $MC = 1,8 \text{ Cm}$. وعليه : $MB = 5 - 1,8$ أي : $MB = 3,2 \text{ Cm}$.

تمرين 22 :

(1) الحل الجبري :

نفرض x عرض المستطيل و y طوله و بالتالي $x < y$.

$$\text{فيكون : } xy = 6 \quad \text{و} \quad 2(x+y) = 10$$

$$\text{إذن : } xy = 6 \quad \text{و} \quad x + y = 5$$

$$\text{وعليه : } xy = 6 \quad \text{و} \quad y = 5 - x$$

$$\text{ومنه : } x(5-x) = 6 \quad \text{و} \quad y = 5 - x$$

إذن : $-x^2 + 5x - 6 = 0$ و هي معادلة من الدرجة الثانية

$$\text{لدينا : } \Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4(-1)(-6) = 1$$

$$\text{ومنه للمعادلة حلين هما : } x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - 1}{2(-1)} = 3 \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + 1}{2(-1)} = 2$$

لما $x = 3$ فان : $y = 2$ (مرفوض لأن $x < y$)

لما $x = 2$ فان : $y = 3$

ومنه يوجد مستطيل حيث طوله 3 Cm و عرضه 2 Cm .

2) الحل البياني :

لدينا : $x y = 6$ و $x + y = 5$

ومنه : $y = \frac{6}{x}$ و $y = 5 - x$ حيث : $x < y$

لتكن f, g الدالتين المعرفتين كما يلي : $f(x) = \frac{6}{x}$ و $g(x) = 5 - x$

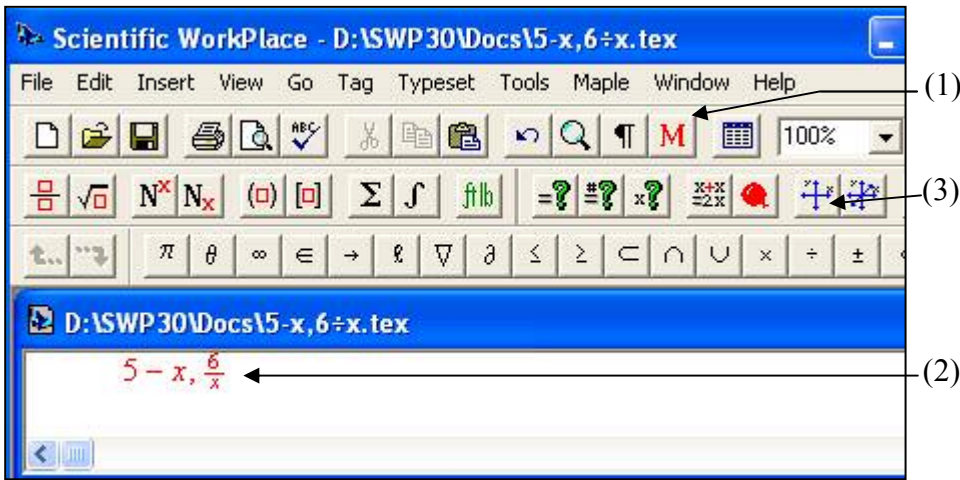
نقوم بإنشاء البيانين (8) و (c) الممثلين للدالتين f, g باستعمال الحاسبة البيانية أو الحاسوب بتباع الخطوات التالية :

1 / نستعمل اللمسة (1) لتحويل النص من أدبي [T] إلى رياضي [M].

2 / نكتب عبارة الدالتين في لوحة تحرير النص (2).

3 / نستعمل اللمسة (3) لتمثيل الدالتين في معلم ثنائي البعدين .

الخطوات السابقة موضحة في الرسم التالي :

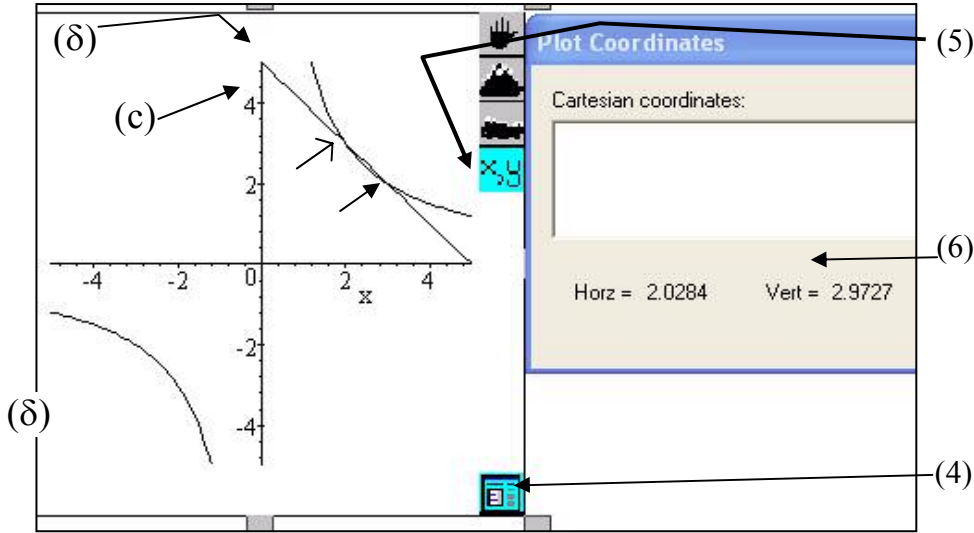


4 / نضبط الوحدات و قيم x و كذلك قيم y و هذا باستعمال اللمسة (4).

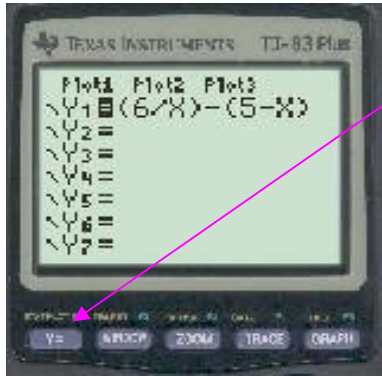
5 / نستعمل اللمسة (5) لكي نظهر لوحة (6) التي تعطي إحداثيات أي نقطة من

المعلم حيث Horz يمثل x و Vert يمثل y .

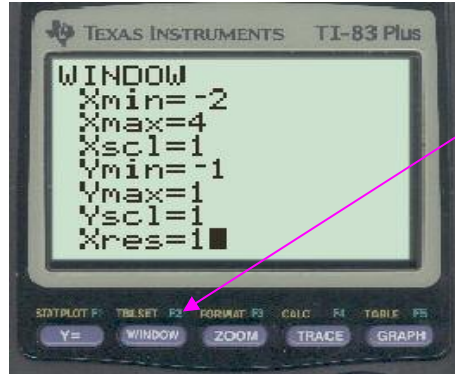
الخطوتان الأخيرتان تظهران في الرسم التالي :



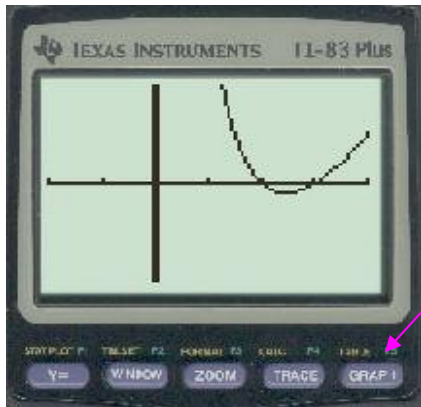
نقطتي تقاطع (c) و (δ) هما النقطتان $M_1(3, 2)$ المشار إليها في الشكل بالسهم : \rightarrow و $M_2(2, 3)$ المشار إليها في الشكل بالسهم : \rightarrow و هي النقطة التي تظهر إحداثياتها بالتقريب في اللوحة (6) إذن : $x = 2,0284$ ، $y = 2,9727$ ومنه : $x = 2$ و $y = 3$ يمكن استعمال الحاسبة البيانية لتمثيل $y = (6/x) - (5 - x)$ باتباع الخطوات التالية :



1/ نستعمل الزر $Y=$ و نكتب العبارة $(6/x) - (5 - x)$



2/ نستعمل الزر $WINDOW$ لضبط مجال القيم



3/ نستعمل الزر $GRAPH$

فيظهر المنحني و نلاحظ قيم x هي 2 و 3

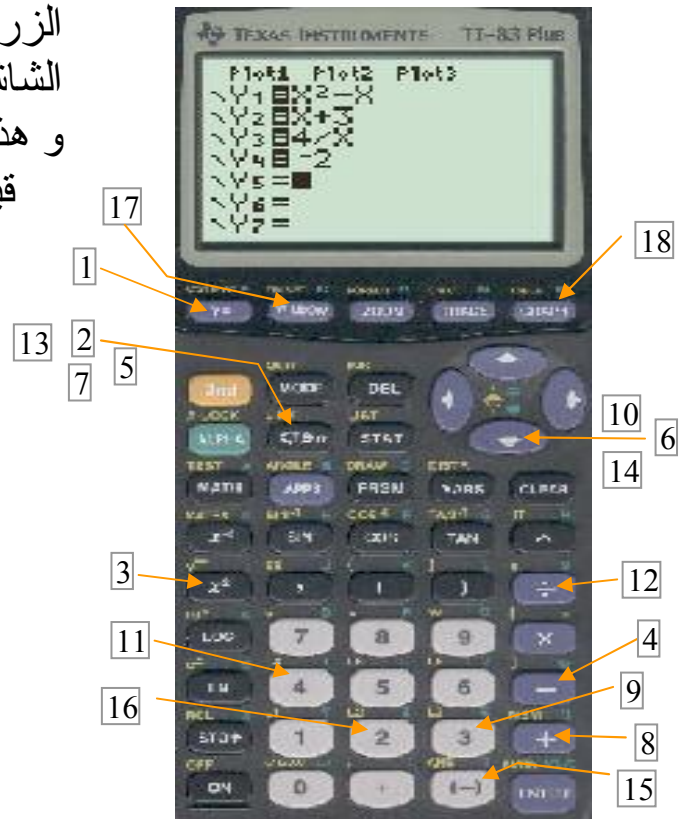
إذن يوجد مستطيل حيث طوله 3 Cm و عرضه 2 Cm .

تمرين 23 :

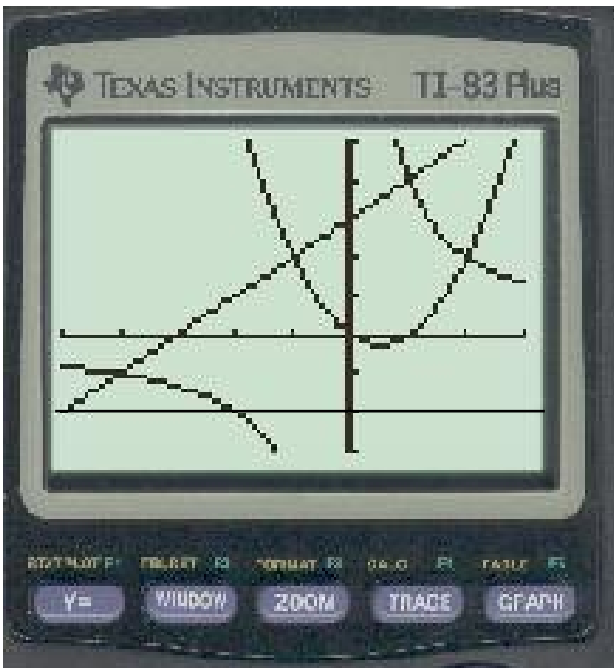
باستعمال آلة بيانية ننشئ التمثيلات البيانية (U_1) ; (U_2) ; (U_3)

للدوال $h(x) = x + 3$; $f(x) = x^2 - x$: حيث f, g, h على الترتيب حيث : $g(x) = \frac{4}{x}$. نضغط على الأزرار بتتابع ترتيب الأرقام التي تشير إليها كما هو في الصورة.

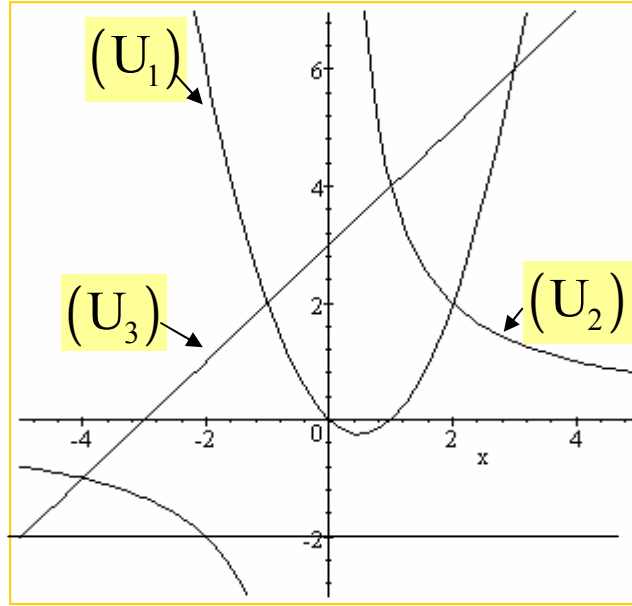
الزر **WINDOW** المشار إليه بالرقم 17 يظهر على الشاشة ما يلي :
و هذا لضبط مجال قيم x و y



الزر **GRAPH** المشار إليه بالرقم 18 يظهر على الشاشة ما يلي :



يمكن توضيح الصورة بالرسم التالي :



* حل بيانيا للمعادلة : $f(x) = -2$ ؛ (Δ) مستقيم معادلته : $y = -2$
 نلاحظ بيانيا أن : $(U_1) \cap (\Delta) = \emptyset$ وعليه ليس للمعادلة حلول .

* حل بيانيا المتراجحة : $f(x) > -2$

بيان نلاحظ أن المنحنى (U_1) يقع فوق المستقيم (Δ) وعليه مجموعة حلول المتراجحة هي :

* الحل الحسابي للمتراجحة : $\frac{4}{x} \leq x + 3$

وهذا يعني أن : $\frac{4}{x} - (x + 3) \leq 0$ أي : $\frac{4 - x^2 - 3x}{x} \leq 0$ ومنه : $\frac{-x^2 - 3x + 4}{x} \leq 0$

- نحلل العبارة : $-x^2 - 3x + 4$

لدينا : $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4(-1)(4) = 25$

ومنه : $x_1 = \frac{3-5}{-2} = 1$ ؛ $x_2 = \frac{3+5}{-2} = -4$

ملاحظة هامة :

المعادلة $a x^2 + b x + c = 0$ في حالة $a + c = -b$ تقبل حلين هما : 1 و $\frac{c}{a}$.

$$\text{إذن : } -x^2 - 3x + 4 = -(x-1)(x+4)$$

$$\frac{-(x-1)(x+4)}{x} \leq 0 \quad \text{وعليه المتراجحة تصبح :}$$

جدول الإشارة :

| x | $-\infty$ | -4 | 0 | 1 | $+\infty$ | |
|-------------------------|-----------|----|---|---|-----------|---|
| $-(x-1)$ | + | + | + | ○ | - | |
| $x+4$ | - | ○ | + | + | + | |
| x | - | - | ○ | + | + | |
| $-(x-1)(x+4)$ | - | ○ | + | + | ○ | - |
| $\frac{-(x-1)(x+4)}{x}$ | + | ○ | - | + | ○ | - |

$$\text{وعليه حلول المتراجحة : } E_1 = [-4, 0 [\cup [1, +\infty [$$

$$\text{* الحل البياني للمتراجحة : } \frac{4}{x} \leq x + 3 \quad \text{أي : } g(x) \leq h(x)$$

و هذا يؤول إلى إيجاد وضعية المنحني (U_2) و (U_3) .

من خلال البياني نلاحظ أن : (U_2) يقع تحت (U_3) في كل من المجالين :

$$[-4, 0 [\quad \text{و} \quad [1, +\infty [\quad \text{وعليه } g(x) < h(x).$$

كذلك (U_2) يقطع (U_3) في النقطتين اللتين فاصلتهما -4 ، 1 وعلي مجموعة

$$\text{حلول المتراجحة } g(x) \leq f(x) \text{ هي : } E_1 = [-4, 0 [\cup [1, +\infty [$$

$$\text{* الحل الحسابي للمتراجحة : } x + 3 \geq x^2 - x$$

$$\text{وهذا يعني أن : } x + 3 - x^2 + x \geq 0 \quad \text{أي : } -x^2 + 2x + 3 \geq 0$$

$$\text{لدينا : } \Delta = 4 + 12 = 16$$

$$x_1 = \frac{-2-4}{-2} = 3 \quad ; \quad x_2 = \frac{-2+4}{-2} = -1 \quad \text{و منه :}$$

ملاحظة هامة :

المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ في حالة $a + c = b$
تقبل حلين هما : -1 و $-\frac{c}{a}$.

$$\text{وعليه : } -x^2 + 2x + 3 = -(x-3)(x+1)$$

$$\text{و المتراجحة تصبح : } -(x-3)(x+1) \geq 0$$

| x | $-\infty$ | -1 | 3 | $+\infty$ |
|---------------|-----------|----|---|-----------|
| $-(x-3)$ | + | + | ○ | - |
| $x+1$ | - | ○ | + | + |
| $-(x-3)(x+1)$ | - | ○ | + | ○ |

جدول الإشارة :

$$\text{وعليه مجموعة حلول المتراجحة هي : } E_2 = [-1, 3]$$

$$\text{* الحل البياني للمتراجحة : } x+3 \geq x^2 - x \quad \text{أي : } h(x) \geq f(x)$$

وهذا يؤول إلى دراسة الوضعية لكل من (U_1) و (U_3) .

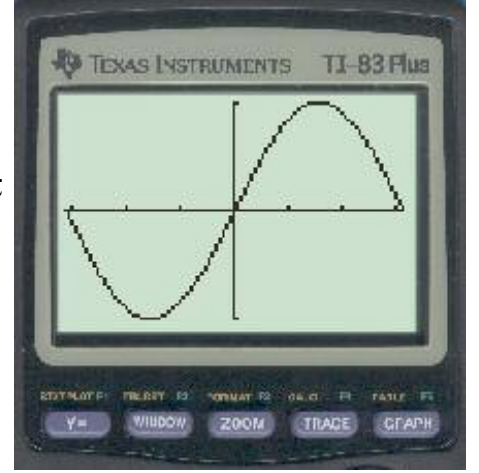
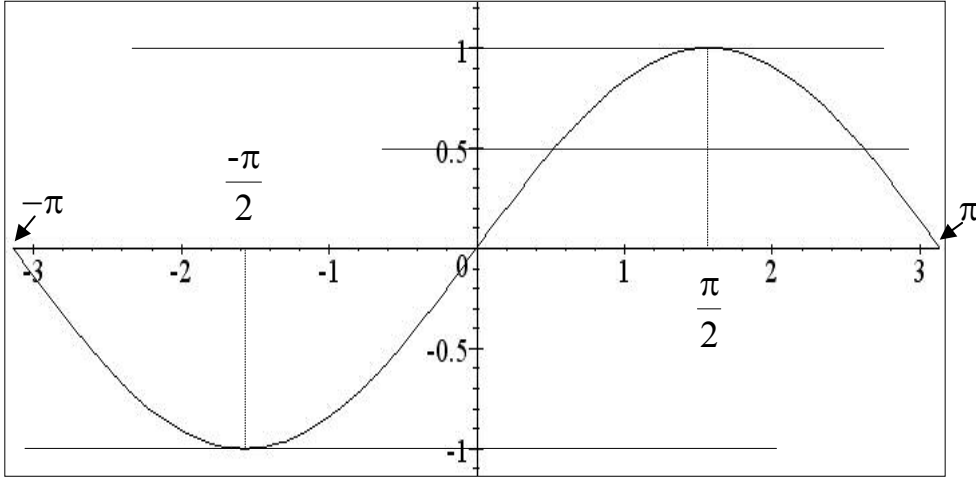
من خلال البياني نلاحظ أن (U_3) يقطع فوق (U_1) في المجال $]-1, 3[$

ويقطعه عند النقطتين ذات الفاصلتين 3 ، -1

$$\text{وعليه مجموعة حلول المتراجحة هي : } E_2 = [-1, 3]$$

تمرين 24 :

التمثيل البياني للدالة f :



نرسم المستقيمات التي معادلاتها : $y = -1$, $y = 1$, $y = 0$. فنجد .

(1) للمعادلة $f(x) = 0$ ثلاثة حلول هي : $-\pi$, 0 , π

(2) للمعادلة $f(x) = 1$ حل مضاعف هو : $\frac{\pi}{2}$

(3) للمعادلة $f(x) = -1$ حل مضاعف هو : $-\frac{\pi}{2}$

- استنتاج حلول المتراجحات :

(1) حلول المتراجحة $f(x) \geq 0$ هي قيم x التي تنتمي إلى المجال $[0, \pi]$.

(2) حلول المتراجحة $f(x) > 1$ ليس لها حلول .

(3) حلول المتراجحة $f(x) \leq 1$ للمتراجحة حل وحيد هو $-\frac{\pi}{2}$

- عدد حلول المعادلة $f(x) = \frac{1}{2}$

نرسم المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y = \frac{1}{2}$ فيقطع (c) في نقطتين فاصلتهما x_1, x_2 حيث :

$$x_1 = \frac{5\pi}{6}, \quad x_2 = \frac{\pi}{6} \quad \text{إذن : } x_1 = 2,617, \quad x_2 = 0,523$$

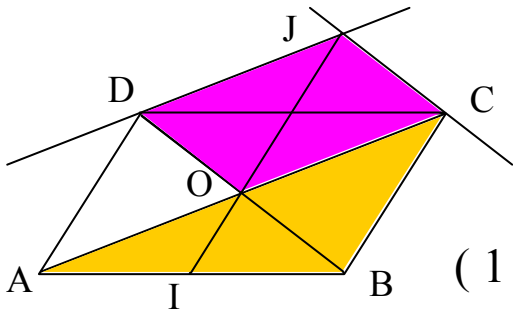
ومنه مجموعة حلول المترابحة هي : $\{x_1, x_2\}$

تمرين 25 :

إثبات أن : O, I, J على استقامة واحدة :

في المثلث ABC لدينا :

O منتصف $[AC]$ و I منتصف $[AB]$.



$$\vec{OI} = \frac{1}{2} \vec{CB} \quad \text{أى : } \vec{OI} = \frac{-1}{2} \vec{BC} \quad (1) \dots$$

* الرباعي $OCJD$ متوازي الأضلاع وعليه : $\vec{OJ} = \vec{OC} + \vec{OD}$

$$\vec{OJ} = \vec{BO} + \vec{OC} \quad \text{أى : } \vec{OJ} = \vec{OC} + \vec{BO}$$

$$\vec{OI} = \frac{-1}{2} \vec{OJ} \quad \text{أى : } \vec{OJ} = \vec{BC} \quad (2) \dots \quad \text{وبالتالي من (1) و (2) ينتج :}$$

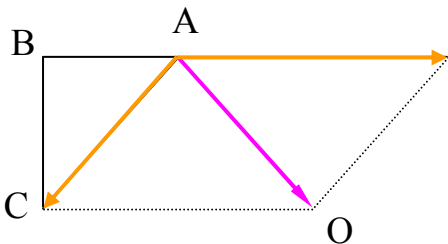
وعليه $\vec{OI} \parallel \vec{OJ}$ ونستنتج أن O, I, J على استقامة واحدة .

تمرين 26 :

1 - نبين أن : $\vec{V} = \vec{NA} - 2\vec{NB} + \vec{NC}$ شعاع ثابت :

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \vec{NA} - 2(\vec{NA} + \vec{AB}) + \vec{NA} + \vec{AC} \quad \text{لدينا :} \\ &= \vec{NA} - 2\vec{NA} - 2\vec{AB} + \vec{NA} + \vec{AC} \end{aligned}$$

ومنه : $\vec{V} = -2\vec{AB} + \vec{AC}$ و هو شعاع ثابت .



2 - إنشاء النقطة O حيث : $\vec{AO} = \vec{V}$.

تمرين 27 :

1 - إثبات أن (O, \vec{U}, \vec{V}) معلما للمستوي :

$$\vec{U} \neq \vec{0} ; \vec{V} \neq \vec{0} : \text{ومنه } \vec{U} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} ; \vec{V} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ لدينا}$$

$$\text{من شرط التوازي نجد : } (-2)(-1) - 3(4) = 2 - 12 = -10$$

ومنه \vec{U} لا يوازي \vec{V} و بالتالي (\vec{U}, \vec{V}) أساسا للمستوي .

و عليه : (O, \vec{U}, \vec{V}) معلما للمستوي .

2 - كتابة x', y' بدلالة x, y :

$$\vec{ON} = x' \vec{U} + y' \vec{V} \quad \text{و} \quad (1) \dots \vec{ON} = x \vec{i} + y \vec{j} \text{ لدينا}$$

$$\vec{ON} = x'(-2 \vec{i} + 3 \vec{j}) + y'(4 \vec{i} - \vec{j}) \quad \text{ومنه :}$$

$$\text{أي : } (2) \dots \vec{ON} = (-2x' + 4y') \vec{i} + (3x' - y') \vec{j}$$

$$\text{من (1) و (2) نجد : } \begin{cases} x = -2x' + 4y' \\ y = 3x' - y' \end{cases} \text{ أي : } \begin{cases} x = -2x' + 4y' \\ y' = 3x' - y \end{cases}$$

و بالتعويض نجد : $x = -2x' + 4(3x' - y)$ أي : $x + 4y = 10x'$

$$\text{إذن : } x' = \frac{1}{10}x + \frac{2}{5}y \quad \text{ومنه : } y' = \frac{3}{10}x + \frac{1}{5}y$$

3 - البحث عن وجود نقط لها نفس الإحداثيات في المعلمين :

$$\begin{cases} \frac{9}{10}x - \frac{2}{5}y = 0 \\ -\frac{3}{10}x + \frac{4}{5}y = 0 \end{cases} \text{ أي : } \begin{cases} x = \frac{1}{10}x + \frac{2}{5}y \\ y = \frac{3}{10}x + \frac{1}{5}y \end{cases} \text{ و منه : } \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases} \text{ نفرض :}$$

$$\text{وهذا يعني أن : } \begin{cases} 9x - 4y = 0 \\ -3x + 8y = 0 \end{cases} \text{ بضرب طرفي المعادلة الثانية في 3 و الجمع مع المعادلة}$$

$$\text{الأولى طرفا لطرف نجد : } 20y = 0 \quad \text{ومنه : } (x, y) = (0, 0)$$

إذن النقطة الوحيدة التي لها نفس الإحداثيات في المعلمين هي : $O(0, 0)$.

تمرين 28 :

1- تعيين m بحيث يكون (Δ) و (D) متوازيان :

$$\text{حسب شرط التوازي نجد : } m(7m - 5) - (m - 1)(m + 1) = 0$$

$$\text{أي : } 7m^2 - 5m - m^2 + 1 = 0 \quad \text{أي : } 6m^2 - 5m + 1 = 0$$

لدينا : $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 6 \times 1 = 1$ ومنه للمعادلة حلين متمايزين m_1, m_2

$$\text{حيث : } m_1 = \frac{5-1}{2 \times 6} = \frac{1}{3}, \quad m_2 = \frac{5+1}{2 \times 6} = \frac{1}{2}$$

و منه مجموعة قيم m هي : $\left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right\}$.

2- مناقشة تقاطع (Δ) و (D) :

$$\begin{cases} mx + (m-1)y - 2 = 0 \\ (m+1)x + (7m-5)y + 3 = 0 \end{cases} \quad \text{أي ناقش حل الجملة :}$$

$$\text{لدينا : } d = \begin{vmatrix} m & m-1 \\ m+1 & 7m-5 \end{vmatrix} = m(7m-5) - (m+1)(m-1)$$

و منه : $d = 6m^2 - 5m + 1$ و مما سبق ينعدم عند $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ و بالتالي :

$$\text{* لما } m = \frac{1}{3} \text{ : الجملة تكتب : } \begin{cases} x - 2y - 6 = 0 \\ 4x - 8y + 9 = 0 \end{cases}$$

وبضرب المعادلة الأولى في -4 و الجمع مع الثانية نجد : $0 = 33$ و هذا مستحيل إذن الجملة ليس لها حل و بالتالي : (Δ) و (D) منفصلان .

$$\text{* لما } m = \frac{1}{2} \text{ : الجملة تكتب : } \begin{cases} x - y - 4 = 0 \\ 3x - 3y + 6 = 0 \end{cases}$$

وبضرب المعادلة الأولى في -3 و الجمع مع الثانية نجد : $0 = 18$ و هذا مستحيل إذن الجملة ليس لها حل و بالتالي : (Δ) و (D) منفصلان .

* لما $m \neq \frac{1}{2}$ و $m \neq \frac{1}{3}$ فإن الجملة لها حل وحيد (x, y) حيث :

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -2 & m \\ 3 & m+1 \end{vmatrix}}{d} = \frac{-5m-2}{6m^2-5m+1} \quad ; \quad x = \frac{\begin{vmatrix} m-1 & -2 \\ 7m-5 & 3 \end{vmatrix}}{d} = \frac{17m-13}{6m^2-5m+1}$$

وبالتالي : $(\Delta) \cap (D) = \{L\}$ حيث $L\left(\frac{17m-13}{6m^2-5m+1}, \frac{-5m-2}{6m^2-5m+1}\right)$

تمرين 29 :

(1) ص (2) خ (3) ص (4) ص (5) ص

(6) خ (7) ص (8) ص (9) خ (10) ص

تمرين 30 :

لدينا : $f(x) = \frac{a}{x}$

(1) مجموعة التعريف : $D =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

(2) تعيين a بحيث : $f(1) = -3$

لدينا : $f(1) = \frac{a}{1} = a$ ومنه : $a = -3$ و بالتالي : $f(x) = \frac{-3}{x}$.

(3) دراسة التغيرات :

▪ من أجل : $x_1 \in D, x_2 \in D$ و $x_1 \neq x_2$ لدينا :

$$g = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{-3}{x_1} - \frac{-3}{x_2}}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{-3x_2 + 3x_1}{x_1 \times x_2}}{x_1 - x_2} = \frac{3}{x_1 \times x_2}$$

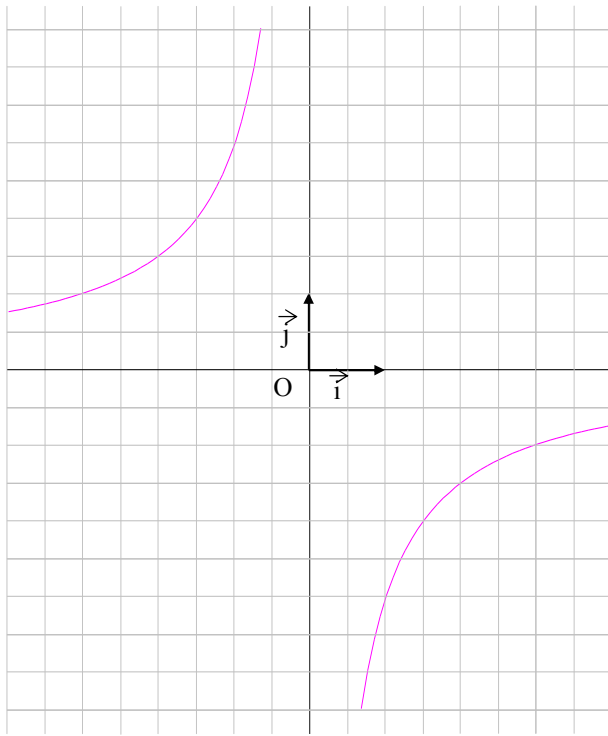
لما $x_1 > 0$ و $x_2 > 0$: $\mathcal{G} > 0$ و منه f متزايدة تماما .
لما $x_1 < 0$ و $x_2 < 0$: $\mathcal{G} > 0$ و منه f متزايدة تماما .

▪ جدول التغيرات :

| X | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|------|-----------|---|-----------|
| f(x) | ↗ | | ↗ |

(4) الحساب : $f(-1) = 3$; $f(-6) = \frac{1}{2}$; $f(1) = -3$; $f(3) = -1$; $f(6) = -\frac{1}{2}$

(5) إنشاء البيان :



تمرين 31 :

(1) - مساحة كل من المستطيلين ABCD و EFGH هي :

$$A_1 = 8 \text{ Cm} \times 6 \text{ Cm} \quad \text{أي} \quad A_1 = 48 \text{ Cm}^2$$

- مساحة كل من المستطيلين ADHE و BFGC هي :

$$A_2 = 6 \text{ Cm} \times 3\sqrt{5} \text{ Cm} \quad \text{أي} \quad A_2 = 18\sqrt{5} \text{ Cm}^2$$

- مساحة كل من المستطيلين ABFE و DCGH هي :

$$A_3 = 8 \text{ Cm} \times 3\sqrt{5} \text{ Cm} \quad \text{أي} \quad A_3 = 24\sqrt{5} \text{ Cm}^2$$

- المساحة الجانبية للشكل هي : $A = 2A_1 + 2A_2 + 2A_3$

$$A = [2(48) + 2(18\sqrt{5}) + 2(24\sqrt{5})] \text{ Cm}^2 \quad \text{أي}$$

$$A = [96 + 36\sqrt{5} + 48\sqrt{5}] \text{ Cm}^2 = (96 + 84\sqrt{5}) \text{ Cm}^2 \quad \text{ومنه}$$

$$A = 283,829 \text{ Cm}^2 \quad \text{إذن}$$

(2) حجم الشكل هو : $V = (8 \times 6 \times 3\sqrt{5}) \text{ Cm}^3$

$$V = 144\sqrt{5} \text{ Cm}^3 \quad \text{أي} \quad V = 321,993 \text{ Cm}^3 \quad \text{إذن}$$

(3) - حساب AF :

في المثلث ABF القائم في B لدينا : $AF^2 = AB^2 + BF^2$

$$AF^2 = [8^2 + (3\sqrt{5})^2] \text{ Cm}^2 = 109 \text{ Cm}^2 \quad \text{أي} \quad AF = 10,440 \text{ Cm} \quad \text{إذن}$$

- محيط الرباعي AFGD هو :

$$p = 2(AF + FG) = 2(10,44 + 6) \text{ Cm} = 32,88 \text{ Cm} \quad \text{إذن}$$

تمرين 32 :

- حجم المكعب هو : $V_1 = (2,55 \text{ Cm})^3$ أي : $V_1 = (2,55 \text{ Cm})^3$

إذن : $V_1 = 16,58 \text{ Cm}^3$

- حجم الهرم هو : $V_2 = \frac{2,55 \times 2,55 \times 3,78}{3} \text{ Cm}^3$ و منه : $V_2 = 8,19 \text{ Cm}^3$

- حجم الشكل هو : $V = V_1 + V_2$

أي : $V = (16,58 + 8,19) \text{ Cm}^3$ و منه : $V = 24,77 \text{ Cm}^3$

تمرين 33 :

المثلث ABC قائم في A . وعليه (A B) عمودي على (A C) .

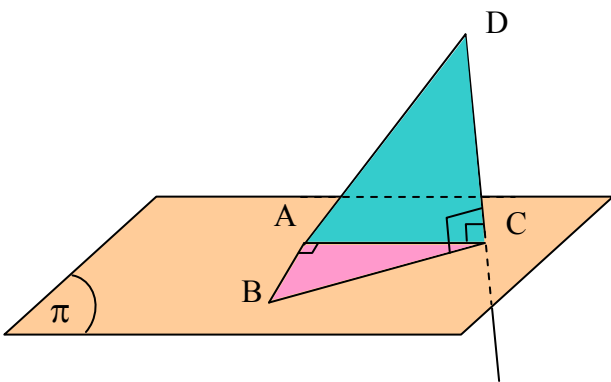
المستقيم (DC) عمودي على المستوي (A B C) وعليه فإن (DC) عمودي على كل مستقيمت

هذا المستوي وبالتالي (D C) عمودي على (A C) .

بما أن المستقيم (A B) عمودي على كل من المستقيمين

(A C) و (D C) من المستوي (A D C) فإن :

(A B) عمودي على المستوي (A D C) .



تمرين 34 :

بما أن النقط E, F, G, H تنتمي إلى المستوي (π) الذي يوازي قاعدة الهرم $SABCD$ فإن $SEFGH$ هو هرم أيضا .
 لحساب حجم هذا الهرم فإننا نحسب : FE, GF .

في المثلث SCD لدينا : $\frac{SE}{SD} = \frac{SF}{SC} = \frac{FE}{CD}$

وعليه : $\frac{1}{2} = \frac{SF}{SC} = \frac{FE}{20}$ ومنه : $FE = \frac{20 \times 1}{2} = 10 \text{ Cm}$

في المثلث SBC لدينا : $\frac{SG}{SB} = \frac{GF}{BC} = \frac{SF}{SC}$

وعليه : $\frac{SG}{SB} = \frac{GF}{30} = \frac{1}{2}$ ومنه : $GF = \frac{30 \times 1}{2} = 15 \text{ Cm}$

ليكن : SO ارتفاع الهرم $SABCD$ و SO' ارتفاع الهرم $SEFGH$

لدينا في المثلث SOC : $\frac{SO'}{SO} = \frac{SF}{SC}$ وعليه : $\frac{SO'}{SO} = \frac{1}{2}$

ومنه : $SO' = 25 \text{ Cm}$

حجم الهرم $SEFGH$:

لدينا : $V_1 = \frac{1}{3} \times 15 \times 10 \times 25$ أي : $V_1 = 1250 \text{ Cm}^3$

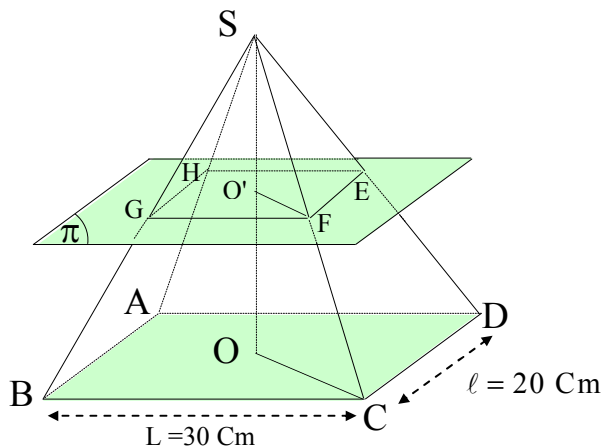
حجم الهرم $SABCD$:

لدينا : $V_2 = \frac{1}{3} \times 30 \times 20 \times 50$

أي : $V_2 = 10\,000 \text{ Cm}^3$

حجم الجزء المحصور بين الهرمين :

$V_3 = V_2 - V_1 = 8750 \text{ Cm}^3$



تمرين 35 :

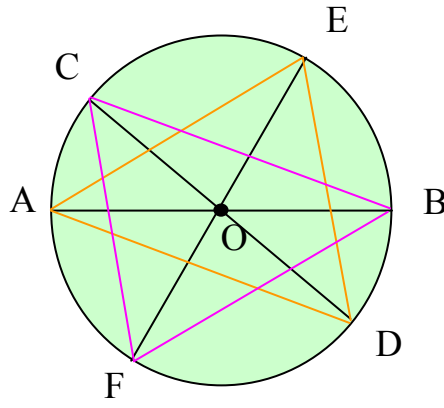
- 1) محور تناظر التحويل الذي يحول T_1 إلى T_2 هو (BC) .
- 2) شعاع الانسحاب الذي يحول T_1 إلى T_3 هو \vec{AB} .
- 3) مركز التناظر الذي يحول T_2 إلى T_4 هو النقطة O منتصف $[CD]$.
- 4) زاوية الدوران هي : $\frac{\pi}{3}$.

تمرين 36 :

- بما أن المثلثات AOA' , BOB' , COC' متقايسة الأضلاع فإن زواياها متقايسة وكل منها يساوي 60° .
- النقطة A' هي صورة A بالدوران r الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$.
- النقطة B' هي صورة B بالدوران r .
- النقطة C' هي صورة C بالدوران r .
- وعليه النقط A' , B' , C' هي صور النقط A , B , C بنفس الدوران r .
- وبما أن A , B , C على استقامة واحدة فإن A' , B' , C' على استقامة واحدة .

تمرين 37 :

- لدينا : $OA = OB$ و $OC = OD$ و $OE = OF$.
- وعليه B , C , F هي صور النقط A , D , E بالتناظر الذي مركزه O .
- ومنه صورة المثلث AED هي المثلث الذي يقايسه CFB .
- وعليه : **مساحة المثلث AED تقايس مساحة المثلث CFB** .



تمرين 38 :

ليكن S التناظر الذي مركزه O . B هي صورة D بواسطة S .
المستقيمان (Δ) , (Δ') متوازيان ويشملان D , B على الترتيب .

وعليه (Δ') هو صورة (Δ) بواسطة S .

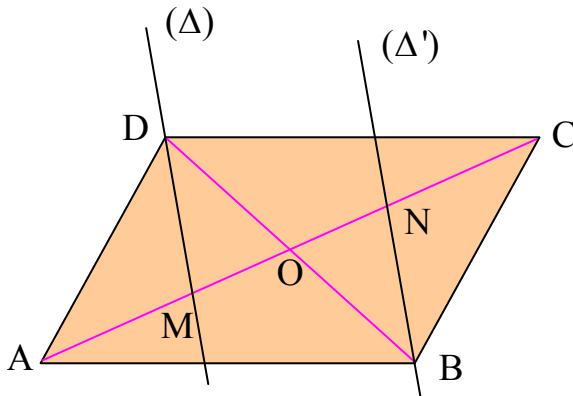
وكذلك (AC) هو صورة (AC) بواسطة S .

المستقيمان (Δ) و (AC) يتقاطعان في M

والمستقيمان (Δ') و (AC) يتقاطعان في N .

وعليه صورة M بواسطة S هي N .

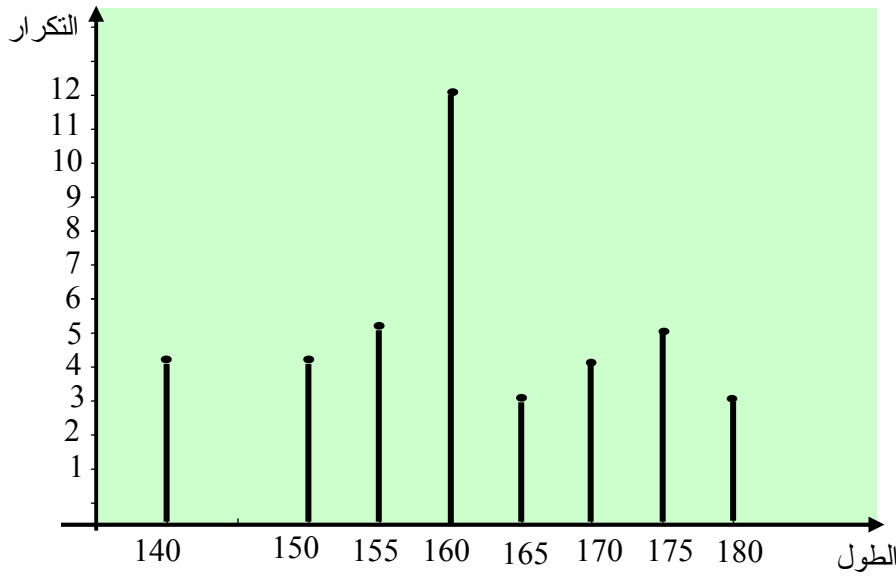
إذن : $OM = ON$ وعليه : **[MN]** منتصف O .



تمرين 39 :

(1) الجدول الإحصائي

| الأطوال Cm | 140 | 150 | 155 | 160 | 165 | 170 | 175 | 180 |
|---------------|-----|-----|-------|-----|-------|-----|-------|-------|
| التكرار | 4 | 4 | 5 | 12 | 3 | 4 | 5 | 3 |
| التواتر | 0,1 | 0,1 | 0,125 | 0,3 | 0,075 | 0,1 | 0,125 | 0,075 |



(3) - المتوسط الحسابي :

$$\bar{x} = \frac{140 \times 4 + 150 \times 4 + 155 \times 5 + 160 \times 12 + 165 \times 3 + 170 \times 4 + 175 \times 5 + 180 \times 3}{40}$$

ومنه : $\bar{x} = 161,25$.

- الوسيط : $Med = \frac{a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1}}{2}$ ؛ لدينا : $n = 40$ و عليه : $\frac{n}{2} = 20$

$a_{\frac{n}{2}}$ هو الحد الذي رتبته 20 وهو : 170 . $a_{\frac{n}{2}+1}$ هو الحد الذي رتبته 21 وهو : 170 .

إذن : $Med = 170$.

- المنوال : $Mod = 170$

- المدى : $E = 180 - 140$ و منه : $E = 40$.

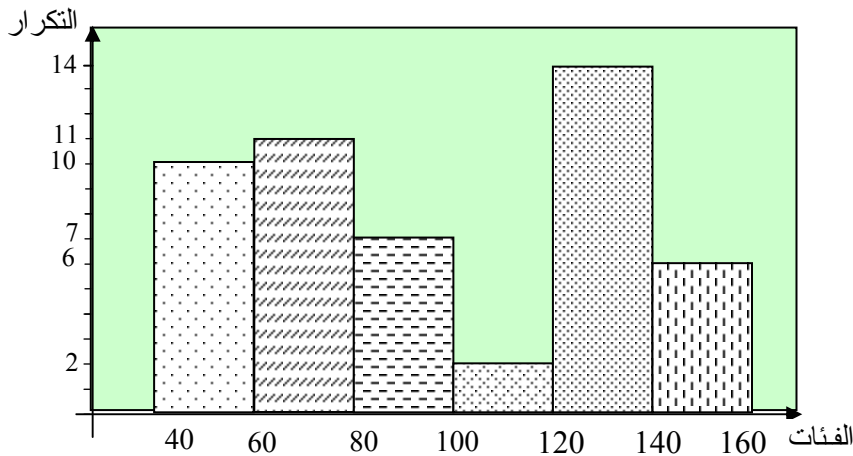
تمرين 40 :

(1) الجدول الإحصائي :

| الفئات | $[40;60[$ | $[60;80[$ | $[80;100[$ |
|--------------|-----------|-----------|------------|
| التكرار | 10 | 11 | 7 |
| التواتر | 0,2 | 0,22 | 0,14 |
| مراكز الفئات | 50 | 70 | 90 |

| الفئات | $[100 ;120[$ | $[120 ;140[$ | $[140 ;160[$ |
|--------------|--------------|--------------|--------------|
| التكرار | 2 | 14 | 6 |
| التواتر | 0,04 | 0,28 | 0,12 |
| مراكز الفئات | 110 | 130 | 150 |

(2) التمثيل بواسطة المدرج التكراري :



(3) - المتوسط الحسابي :

$$\bar{x} = \frac{50 \times 10 + 70 \times 11 + 90 \times 7 + 110 \times 14 + 150 \times 16}{100}$$

$$\bar{x} = 96,8$$

ومنه : $\bar{x} = \frac{500 + 770 + 630 + 220 + 1820 + 900}{100} = \frac{4840}{50}$ إذن :

$$\text{Med} = a_i + \frac{\frac{n}{2} - s}{E_i} \times h_i \quad \text{- الوسيط :}$$

لدينا : $n = 50$ و عليه : $\frac{n}{2} = 25$ ومنه الفئة الوسيطة هي : $[80 ; 100[$ و عليه :

$$S = 21, \quad h_i = 20, \quad E_i = 7, \quad a_i = 80$$

ومنه : $\text{Med} = 80 + \frac{25 - 21}{7} \times 20$ أي : $\text{Med} = 91,42$

$$\text{Mod} = a_i + \frac{D_1}{D_1 + D_2} \times h_i \quad \text{- المنوال :}$$

الفئة المنوالية هي الفئة : $[120 ; 140[$ و عليه : $a_i = 120$, $h_i = 140 - 120 = 20$

$$D_2 = 14 - 6 = 8, \quad D_1 = 14 - 2 = 12$$

ومنه : $\text{Mod} = 120 + \frac{12}{12 + 8} \times 20$ ومنه : $\text{Mod} = 132$

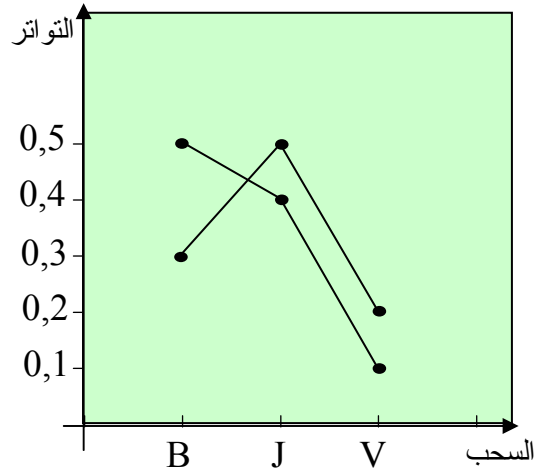
- المدى : $E = 160 - 140$ ومنه : $E = 12$

تمرين 41 :

| | | | |
|---------|-----|-----|-----|
| السحب 1 | B | J | V |
| التكرار | 15 | 12 | 3 |
| التواتر | 0,5 | 0,4 | 0,1 |
| السحب 2 | B | J | V |
| التكرار | 9 | 15 | 6 |

| | | | |
|---------|-----|-----|-----|
| التواتر | 0,3 | 0,5 | 0,2 |
|---------|-----|-----|-----|

التمثيل البياني :



تمرين 42 :

| التواتر | عدد الأوجه | |
|---------|------------|---|
| 0,58 | 58 | P |
| 0,42 | 42 | F |

- الإنشاء البياني :

