سلسلة الخباش في الرياضيات

1 AS

ثـانوي

جذع مشترك علوم

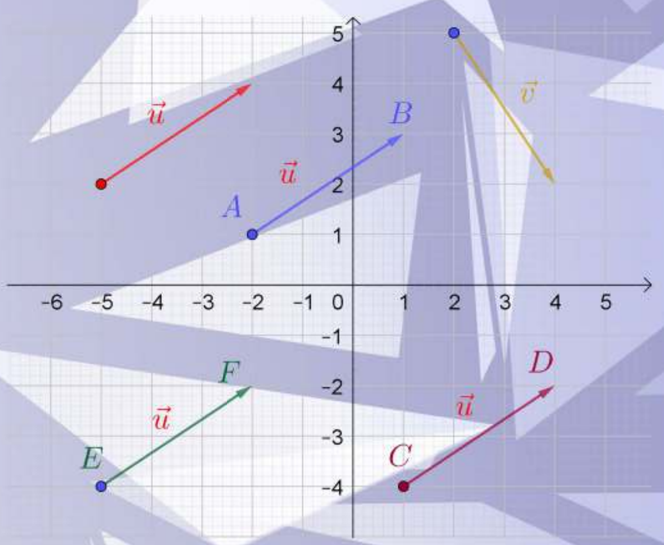
الحساب الشعاعي و معادلة مستقيم

BAC 2026

تتضمن هذه السلسلة **ملخص الدرس**

و **سلسلة التمارين** لكل من

- الحساب الشعاعي
- المعلم في المستوي
- معادلة مستقيم
- جملة معادلتين خطيتين



جمع و إعداد الأستاذ :

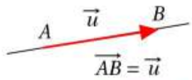
أمين كـروش

ملخص الدرس

01. الحساب الشعاعي

01 مفهوم شعاع :

✍ A ، B نقطتان من المستوي نقول أن الثنائية $(A;B)$ تعيّن شعاعا نرمز له بالرمز $\overrightarrow{AB}$ أو $\vec{v}$.



له ثلاث عناصر أساسية و هي :

✍ المنحى ✍ الطويلة ✍ الإتجاه

◂ إذا كانت A منطبقة على B فإن الشعاع $\overrightarrow{AB}$ يصبح معدوما و نكتب $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

ملاحظة هامة: ليس للشعاع المعدوم أي منحى.

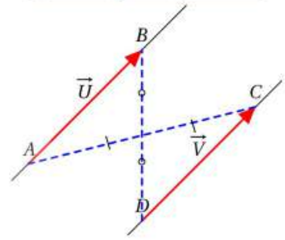
02 تساوي شعاعين :

◂ $\vec{u}=\vec{v}$ معناه أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ لهما نفس المنحى، نفس الإتجاه و نفس الطول

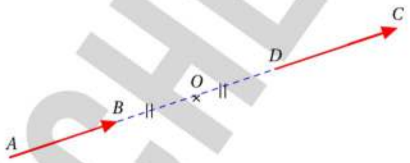
ملاحظة :

A، B، C و D أربع نقط من المستوي إذا كان $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ فإن $[AC]$ و $[BD]$ متناصفان (لهما نفس المنتصف) أي $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$ و $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD}$ و نميز حالتين :

A,B,C,D ليست في إستقامية



A,B,C,D في إستقامية



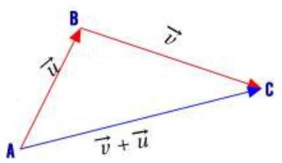
03 مجموع شعاعين :

مجموع شعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو الشعاع $\vec{u}+\vec{v}$ و المعرف كمايلي :

علاقة شال:

◂ إذا كانت نهاية $\vec{u}$ بداية $\vec{v}$ فإن :

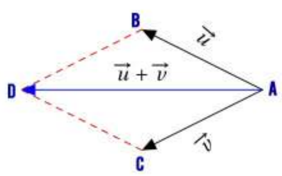
* من أجل كل ثلاث نقط A ، B ، C من المستوي فإن: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (تسمى علاقة شال).



علاقة متوازي الأضلاع:

◂ إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ لهما نفس المبدء فإن :

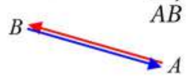
* إذا مثلنا شعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ من نفس المبدا A، مثلا $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ فإن مجموعهما $\vec{u}+\vec{v}$ يساوي $\overrightarrow{AD}$ حيث $ABDC$ متوازي أضلاع.



04 الشعاعان المتعاكسان:

من أجل كل نقطتين A ، B من المستوي فإن : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$

نقول عن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BA}$ أنهما متعاكسان معناه لهما نفس المنحى و نفس الطويلة لكن متعاكسان في الإتجاه و نكتب $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$



كيف نبين مساواة شعاعية ؟ :

طريقة

✍ لإثبات صحة مساواة شعاعية يمكن تفكيك أحد الطرفين والوصول إلى الطرف الأخر بإستعمال علاقة شال وعبارات شعاعية تترجم وضعيات معطاة مثل:

★ $\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{CI}=\vec{0}$ أو $\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{IC}$ أو $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BI}$ .... للتعبير عن أن I منتصف $[BC]$

★ $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{MN}$ للتعبير عن أن M، N منتصفي $[AB]$ ، $[AC]$ في المثلث ABC.

مثال: ✍ A، B و C ثلاث نقط. I منتصف $[AB]$.

❶ بين أنه من أجل كل نقطة M فإن: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MA}$.

❷ بين أن: $2\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$.

الحل:

❶ حسب علاقة شال لدينا: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC}$

ومنه $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MA}$.

❷ لدينا حسب علاقة شال: $\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AI}$ و $\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BI}$.

بالجمع طرف لطرف نجد $2\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI})$.

بما أن $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI}=\vec{0}$ لأن (I منتصف $[AB]$) فإن $2\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$.

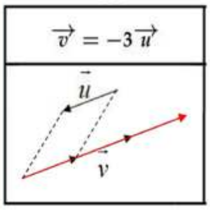
05 جداء شعاع بعدد حقيقي

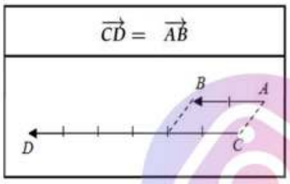
$\vec{u}$ شعاع من المستوي و k عدد حقيقي غير معدوم، جداء الشعاع $\vec{u}$ بعدد حقيقي هو الشعاع $k\vec{u}$ حيث :

★ $\vec{u}$ و $k\vec{u}$ لهما نفس الاتجاه إذا كان $k>0$

★ $\vec{u}$ و $k\vec{u}$ متعاكسان في الاتجاه إذا كان $k<0$

★ $\|k\vec{u}\|=|k|\|\vec{u}\|$





خواص

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان و k و k' عددان حقيقيان.

① $k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}$. ③ $k(k'\vec{u})=(kk')\vec{u}$.

② $(k+k')\vec{u}=k\vec{u}+k'\vec{u}$. ④ $1\vec{u}=\vec{u}$.

⑤ $k\vec{u}=\vec{0}$ يكافئ [$\vec{u}=\vec{0}$ أو $k=0$].

مثال:

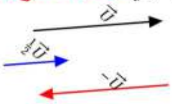
(بتطبيق الخاصية ① ثم شال) $3\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}=3(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=3\overrightarrow{AC}$ ✔

(بتطبيق الخاصية ②). $8\vec{u}-10\vec{u}=(8-10)\vec{u}=-2\vec{u}$ ✔

(بتطبيق الخاصية ③ ثم ④). $\frac{3}{8}\times\left(\frac{8}{3}\vec{u}\right)=\left(\frac{3}{8}\times\frac{8}{3}\right)\vec{u}=1\vec{u}=\vec{u}$ ✔

06 الإرتباط الخطي :

نقول عن شعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ أنهما **مرتبطين خطيا** إذا كان أحدهما يساوي **جداء الآخر بعدد حقيقي**. أي إذا وجد عدد حقيقي k حيث $\vec{v}=k\vec{u}$.



07 الإستقامية و التوازي:

مبرهنة

مبرهنة 1 : يكون المستقيمان (AB) و (CD) متوازيين إذا وفقط إذا كان الشّعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطين خطيا.

مبرهنة 2 : تكون النّقط A ، B و C في استقامية إذا وفقط إذا كان الشّعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطين خطيا.

02 المعلم للمستوي

توجد أربعة أنواع من المعالم: معلم متعامد ومتجانس، معلم متعامد، معلم متجانس ومعلم كيفي.
في كل ما سيأتي نعتبر $(O; \vec{i}, \vec{j})$ معلم للمستوي.

01 مركبتي الشعاع

مبرهنة :

- من أجل كلّ شعاع $\vec{u}$ ، توجد ثنائية وحيدة من الأعداد الحقيقيّة $(x;y)$ بحيث $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
- لتكن $A(x_A;y_A)$ ، $B(x_B;y_B)$ في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
مركبتا الشّعاع $\overrightarrow{AB}$ هما $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

02 تساوي شعاعين – مجموع شعاعين – جداء عدد حقيقي بشعاع:

نتائج

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ و k عدد حقيقي.

- **تساوي شعاعين:** $\vec{u} = \vec{v}$ يكافئ $[x = x'$ و $y = y']$.
- **مجموع شعاعين:** مركبتا المجموع $\vec{u} + \vec{v}$ هما $\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$
- **جداء عدد بشعاع:** مركبتا الشّعاع $k\vec{u}$ هما $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$

مثال :
ليكن الشعاعين $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

◄ $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} 4-3 \\ 1+2 \end{pmatrix}$ أي $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.   ◄ $-2\vec{u}\begin{pmatrix} -2\times 4 \\ -2\times 1 \end{pmatrix}$ أي $-2\vec{u}\begin{pmatrix} -8 \\ -2 \end{pmatrix}$.

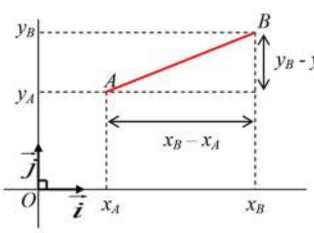
03 إحداثيتي منتصف قطعة مستقيم

$M(x;y)$ منتصف القطعة $[AB]$ فإحداثيتي النقطة M هي :

$$M\left(\frac{x_a + x_b}{2}; \frac{y_a + y_b}{2}\right)$$

04 المسافة بين نقطتين

$(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ معلم متعامد ومتجانس للمستوي . و $A(x_A ; y_A)$ ، $B(x_B ; y_B)$ نقطتان منه.



$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

01 الإرتباط الخطي لشعاعين

مبرهنة :

ليكن $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
يكون الشّعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا إذا و فقط إذا كان $xy' - x'y = 0$.

ملاحظة

❖ لإثبات أن شعاعين متوازيين يكفي إثبات أنهما مرتبطين خطيا أي $xy' - x'y = 0$ ويمكن أن تكتب $xy' = x'y$.

مثال : ليكن الشعاعين $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}$ في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

✔ لدينا: $(-2) \times 12 - 6 \times (-4) = 0$ ومنه الشّعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا.

03 معادلة مستقيم

✍ في كل ما سيأتي نعتبرالمستوي مزود بمعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$
و $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$ نقطتان منه.

01 شعاع توجيه مستقيم

يسمى كل شعاع له نفس منحى مستقيم (D)، شعاع توجيه له

ملاحظات

❖ إذا كان $\overrightarrow{AB}$ شعاع توجيه للمستقيم (D)، فكلّ شعاع غير معدوم ومرتبط خطيا بالشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو أيضا شعاع توجيه للمستقيم (D).
❖ يعرف مستقيم بإعطاء نقطتين منه أو بإعطاء نقطة منه وأحد أشعة توجيهه.

02 معادلة مستقيم

خلاصة :

كل مستقيم من المستوي له معادلة من الشكل : $ax + by + c = 0$ تسمى المعادلة الديكارتية لمستقيم حيث الشعاع $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ هو شعاع توجيهه.

◄ تسمي $y = \alpha x + \beta y$ المعادلة المختصرة للمستقيم حيث α معامل توجيه المسقيم يحسب كالتالي : $\alpha = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

03 شرط توازي مستقيمين

◄ $(D) : ax + by + c = 0$ و $(D') : a'x + b'y + c' = 0$ ،
$(D) \mathbin{/\!/} (D')$ إذا و فقط إذا كان $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}$ مرتبطان خطيا.

$ab' - ba' = 0$ معناه $(D) \parallel (D')$ $ab' = a'b$

(يكون مستقيمان متوازيان إذا كان شعاعي توجيههما مرتبطان خطيا)

◄ $(D) : y = \alpha x + \beta$ و $(D) : y = \alpha' x + \beta'$

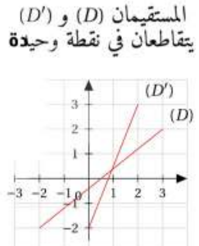
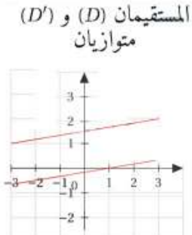
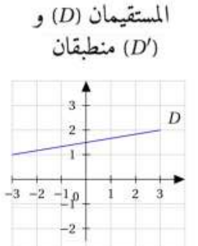
$\alpha = \alpha'$ معناه $(D) \parallel (D')$

(يكون مستقيمان متوازيان إذا كان لهما نفس معامل التوجيه)

04 جملة معادلتين خطيتين

لتكن جملة المعادلتين (S): $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

- إذا كان $ab' - ba' \neq 0$ فإنّ الجملة (S) تقبل حلا وحيدا.
- إذا كان $ab' - ba' = 0$ فالجملة (S) إمّا لا حل لها، وإمّا لانهاية لها من الحلول.

الجملة	$(S): \begin{cases} ax + by = c \cdots (1) \\ a'x + b'y = c' \cdots (2) \end{cases}$		
المحدد	$ab' - ba'$		
الحلول	$ab' - ba' \neq 0$	$ab' - ba' = 0$	
		(1) و (2) غير متكافئتان	(1) و (2) متكافئتان
	(S) تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}^2$	(S) لا تقبل حلول في $\mathbb{R}^2$	(S) تقبل مالا نهاية من الحلول في $\mathbb{R}^2$
التفسير البياني	المستقيمان (D) و (D') يتقاطعان في نقطة وحيدة	المستقيمان (D) و (D') متوازيان	المستقيمان (D) و (D') منطبقان
			

سلسلة التمارين

التمرين 01 الصعوبة:

A، B، C و D أربع نقط من المستوي. بين أن:

❶ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$.

❷ $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.

التمرين 02 الصعوبة:

A ، B و C ثلاث نقط ليست في إستقامية.

❶ أنشئ النقطتين M و N المعرفتين بالعلاقة الترتيب: $\overrightarrow{AN}=-2\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CM}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

❷ بين أن النقطة C منتصف $[MN]$.

التمرين 03 الصعوبة:

❶ ارسم مثلثا كيفي ABC، وعلم عليه النقطتين M و N بحيث: $\overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

❷ بين أن المستقيمين (CM) و (BN) متوازيان.

التمرين 04 الصعوبة:

ABC مثلث كيفي ، أنشئ النقط D ، E ، F المعرفة كما يأتي :

$\overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{CE}=-\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CB}$

❷ بين أن الرباعي AEBD متوازي أضلاع .

❸ بين أن النقط E ، A ، F في استقامية .

التمرين 05 الصعوبة:

لتكن A ، B و C ثلاث نقط من المستوي مختلفة مثنى مثنى.

❶ علم النقطة D بحيث: $\overrightarrow{DA}-3\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{0}$.

❷ علم النقطة E بحيث: $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}$.

❸ برهن أن $AEDB$ متوازي أضلاع.

❹ برهن أنه من أجل كل نقطة M من المستوي لدينا: $\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MC}=-2\overrightarrow{MD}$.

❺ لتكن النقطة O مركز متوازي الأضلاع $AEDB$، برهن أن: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AO}$.

التمرين 06 الصعوبة:

المستوي المنسوب إلى المعلم م م $(O;\vec{i},\vec{j})$.

❶ علم النقط $A(0;4)$ ، $B(5;3)$ ، $C(4;-2)$ و $D(-1;-1)$.

❷ تحقق أن الرباعي $ABCD$ مربع.

التمرين 06 الصعوبة:

$(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم للمستوي، و α عدد حقيقي. لتكن النقط $A(1;3)$ ، $B(-2;-3)$ ، $C(1;-1)$ و $D(3;\alpha)$.

❶ احسب مركبتي كل من الأشعة التالية: $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BC}$.

❷ احسب مركبتي الشعاع $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}$.

❸ عين العدد الحقيقي α حتى يكون الشعاعان $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطين خطيا.

التمرين 06 الصعوبة:

المستوي منسوب الى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

اعتبر النقط التالية : $A(2;1)$, $B(3;-1)$, $C(1;-4)$.

❶ أ-عين مركبتي الشعاعين $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

ب-هل النقط A, B, C في استقامية ؟.

❷ عين احداثيا منتصف $[AC]$.

❸ أ-عين معادلة المستقيم (Δ) الذي يشمل C و $\overrightarrow{AB}$ شعاع توجيهه.

ب-هل النقطة $D(0;1)$ تنتمي الى المستقيم (Δ) ؟.

❹ عين معادلة المستقيم (Δ_1) الذي يشمل A و يوازي محور التراتيب.

❺ عين معادلة المستقيم (Δ_2) الذي يشمل A و يوازي محور الفواصل.

❻ عين معامل توجيه المستقيم الذي معادلته: $5x-3y-2=0$.

❼ نعتبر النقطة $E(2x;x)$ عين قيمة x التي من أجلها:

أ-تكون النقط A, B, E على استقامة واحدة.

ب-يكون المثلث EBA متساوي الساقين $[EA]$ و $[EB]$.

❽ عين احداثيتي النقطة M بحيث: $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{MB}$

❾ عين احداثيتي النقطة F بحيث يكون $ABCF$ متوازي أضلاع.

❿ هل المثلث ABC قائم؟علل.

التمرين 06 الصعوبة:

$(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم متعامد و متجانس للمستوي.

نعتبر النقط : $A(2;1)$ ، $B(3;2)$ ، $C(0;3)$

❶ علم النقط A ، B و C .

❷ أحسب أطوال أضلاع المثلث ABC ثم حدد طبيعته

❸ أحسب معامل توجيه المستقيم (AB) ثم أكتب معادلة له .

❹ نعتبر النقطة $F(-1;\alpha)$.

حدد قيمة α حتى تكون النقط A ، B ، F في إستقامية

❺ أرسم المستقيم (T) الذي معادلته : $y=5x+3$.

❻ حدد نقطة تقاطع المستقيمين (T) و (AB) بيانيا .

II- نعتبر جملة المعادلتين (S) التالية : $(S)\begin{cases}x-y=1\\5x-y=-3\end{cases}$

❶ تحقق أن الجملة (S) تقبل حلا وحيدا .

❷ حل الجملة (S) ثم فسر النتيجة هندسيا .

التمرين 06 الصعوبة:

نريد حل جملة المعادلتين (S) التالية :

$$(S)\begin{cases}2z^2-t^2=-1\\3z^2+t^2=21\end{cases}$$

❶ بوضع $x=z^2$ و $y=t^2$ أكتب جملة معادلتين (S') تكافئ الجملة (S) .

ب- حل جملة المعادلتين (S') .

❷ إستنتج حلول الجملة (S) .