ملخص الدرس

الحساب الشعاعي و معادلة المستقيم

سنة أولى جذع مشترك علوم تكنولوجيا

① الأشعة المرتبطة خطيا.

➤ تساوي شعاعين نقول عن شعاعين أنّهما متساويان إذا كان لهما نفس المنحى، ونفس الاتجاه، ونفس الطويلة.

➤ نقول أن شعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي k حيث أن $\vec{u}=k\vec{v}$.

➤ يكون الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطين خطيا إذا و فقط إذا كان المستقيمين (AB) و (CD) متوازيين .

ملاحظة: الشعاع المعدوم الذي نرمز له $\vec{0}$ مرتبط خطيا مع كل شعاع من المستوي.

② طويلة شعاع.

طويلة شعاع $\vec{u}$ حيث $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ هي طول القطعة $[AB]$ و نرمز لها $\|\overrightarrow{AB}\|$ ونكتب $\|\vec{u}\|=\|\overrightarrow{AB}\|=AB$.

ملاحظات:

☆ يكون الشعاع $\vec{u}$ شعاع وحدة إذا و فقط إذا كان $\|\vec{u}\|=1$ (وحدة أطوال في المستوي).

☆ $\|\overrightarrow{AB}\|=0$ معناه النقطة A منطبقة على النقطة B .

☆ من أجل كل شعاع $\vec{u}$ و من أجل كل عدد حقيقي k لدينا $\|k\vec{u}\|=|k|\times\|\vec{u}\|$.

$M\in(AB)$ معناه $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$ (k عدد حقيقي)

③ التوازي و الإستقامة.

القول أن المستقيمين (AB) و (CD) متوازيان معناه أنه يوجد عدد حقيقي k حيث أن $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$.

القول أن النقط A، B، C استقامة واحدة معناه أنه يوجد عدد حقيقي k حيث أن $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.

④ الأشعة المرتبطة خطيا في الهندسة التحليلية.

في المستوي المنسوب إلى معلم (O,I,J) ليكن الشعاعان $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$. القول أن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا معناه : $xy'-x'y=0$.

في المستوي المنسوب إلى معلم (O,I,J) لتكن القطتان $A(x,y)$ و $B(x',y')$. مركبتا الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هي: $\begin{pmatrix}x'-x\\y'-y\end{pmatrix}$.

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (O,I,J) ليكن الشعاع $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. طويلة الشعاع $\vec{u}$ هي : $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$.

⑤ حساب مركبتي شعاع وإحداثيي منتصف قطعة مستقيم

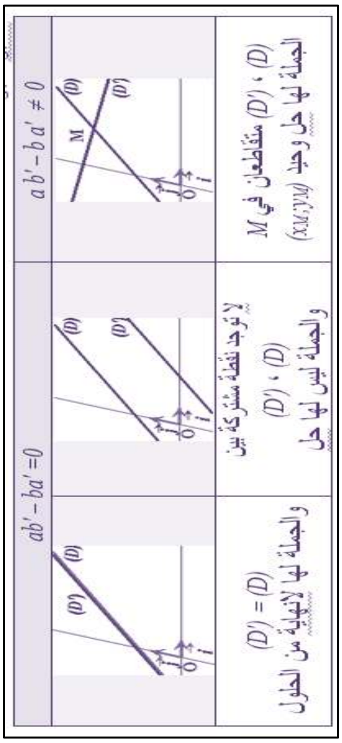
لتكن $A(x_A\ ;\ y_A)$ ، $B(x_B\ ;\ y_B)$ في معلم)

1) مركبتا الشّعاع AB هما $\begin{pmatrix}x_B - x_A\\ y_B - y_A\end{pmatrix}$

2) إحداثيا M منتصف [AB] هما $\begin{pmatrix}\dfrac{x_A + x_B}{2}\\ \dfrac{y_A + y_B}{2}\end{pmatrix}$

⑥ عدد حلول جملة معادلتين خطيتين لمجهولين.

جملة المعادلتين $\begin{cases} a\,x + b\,y = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ إمّا لها حلا وحيدا ، وإمّا لا حل لها، وإمّا لانهاية لها من الحلول، وذلك حسب الوضع النّسبي للمستقيمين (D) و(D').



إذا كان $ab'-ba'\neq 0$ فإنّ الجملة (S) تقبل حلا وحيدا.

إذا كان $ab'-ba'=0$ فالجملة (S) إمّا لا حل لها، وإمّا لانهاية لها من الحلول.

التمارين

1.

1. للشعاعين المتعاكسين أو المتساويين نفس الطويلة.
2. للشّعاعين $\vec{u}$ و $-5\vec{u}$ نفس الاتجاه.
3. الشّعاع $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA}$ معدوم.
4. الشّعاع $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ غير معدوم.
5. A ، B ، C ثلاث نقط لدينا: $5\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=5\overrightarrow{AC}$
6. إذا كان $\vec{u}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ فإنّ $\vec{u}=\overrightarrow{AC}$
7. A ، B ، C ، D ليست في استقامية. إذا كان $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$ فإنّ الرّباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.
8. النّقطة M تنتمي إلى $[AB]$ معناه $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$
9. النّقطة M تنتمي إلى $[AB]$ معناه $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$
10. الشعاعان المتعاكسان مرتبطان خطيا.
11. إذا كان $\|\vec{u}\| = 7$ فإنّ $\|-3\vec{u}\| = 21$

2.

بيّن فيما يأتي أنّ الشّعاعين u و v مرتبطان خطيا، ثمّ عبّر عن أحدهما بدلالة الآخر.

أ) $\vec{u}=\vec{i}+3\vec{j}$ و

$$\vec{v}=(\vec{i}+5\vec{j})+\frac{1}{2}(\vec{i}-\vec{j})$$

3.

عيّن في كلّ ممّا يأتي العدد x بحيث يكون الشّعاعان u وv مرتبطين خطيا.

أ) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}x+1\\6\end{pmatrix}$

ب) $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\-5\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}2-x\\1\end{pmatrix}$

جـ) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\x\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\27\end{pmatrix}$

4. A, B, C ثلاثة نقط ليست في استقامة واحدة. نضع $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ أنشئ النقط المعرفة بالعلاقة الشعاعية التالية:

$$\overrightarrow{AE}=\vec{u}+\vec{v}$$
$$\overrightarrow{AF}=\vec{u}-\vec{v}$$
$$\overrightarrow{AH}=-\vec{u}+\vec{v}$$
$$\overrightarrow{AG}=-\vec{u}-\vec{v}$$

5.

1. برهن أنه من أجل من النقط O, A, B لدينا: $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$
2. A, B, C ثلاثة نقط . I منتصف $[BC]$.

برهن أن: $2\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

6.

لتكن النّقطتان $A(-3\ ;1)$ ، $B(7;6)$ ، M نقطة فاصلتها 1 . عيّن ترتيب النّقطة M بحيث تكون النّقط A ، M ، B في استقامية.

7.

لتكن النّقطتان $A(-3\ ;1)$ ، $B(7;6)$. أوجد علاقا بين x و y والتّي من أجلها تكون النّقطة $M(x\ ;y)$ تنتمي إلى المستقيم (AB) .

8.

في معلم متعامد ومتجانس $(O\ ;\vec{i},\vec{j})$ علّم النّقط $A(0\ ;4)$ ، $B(5\ ;3)$ ، $C(4\ ;-2)$ ، $D(-1\ ;-1)$

تحقّق من أنّ الرّباعي $ABCD$ هو مربّع.

9.

. لتكن النّقط $L(-1;3)$ ، $M(2\ ;-1)$ ، $N(3\ ;6)$.

أ) احسب أطوال أضلاع المثلّث LMN.

ب) بيّن أنّ المثلّث LMN قائم ومتساوي السّاقين.

10.

ليكن ABC مثلث .

أ-أنشئ النقطة M المعرفة بالعلاقة : $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

ب-برهن أن $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

ج-لتكن N نقطة من المستوي حيث
$\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CN}=\vec{0}$

د-برهن أن $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$ ثم أنشئ النقطة N

ه-اثبت أن النقط $A;M;N$ في استقامية .

11.

المستوي منسوب الى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

نعتبر النقط $A(-5,\frac{1}{2}),B(\alpha,\frac{3}{2}),C(3,2)$ حيث α عدد حقيقي

1.عين قيمة α حتى تكون النقطة B منتصف $[AC]$.

2.عين α حتى يكون الشعاع $\overrightarrow{AB}$ موازيا للشعاع $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$.

3.عين احداثيتي النقطة D بحيث: $2\overrightarrow{DA}+3\overrightarrow{DC}=\vec{0}$.

12.

المستوي منسوب الى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ نعتبر النقط $A(2,-3),B(-1,\frac{3}{2}),C(m,2)$

1- أكتب معادلة المستقيم (AC) .

2- عين قيم m بحيث : $B\in(AC)$.

3- عين قيم m بحيث يكون (AC) مستقيم موازي لحامل محور التراتيب.

4- عين قيم m بحيث يكون معامل توجيه المستقيم (AC) يساوي 1.

5- عين معادلة المستقيم (Δ) الذي يشمل I منتصف $[AB]$ و يوازي الشعاع $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$.

13.

المستوي منسوب الى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$،

نعتبر النقط A و B و C حيث :

$\overrightarrow{AB}=-4\vec{i}-2\vec{j}$ ، $\overrightarrow{OA}=2\vec{i}+\vec{j}$ ، $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix}$.

1- بين أن $B(-2,-1)$ و $C(-2,5)$.

2- برهن أن النقط O,A,B على استقامية .

3- عين احداثيي النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع ثم عين احداثيي مركزه I

4- ليكن (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطتين A و C

أ- عين معامل توجيه المستقيم (Δ) ثم أكتب معادلته.

ب- عين احداثيي M نقطة تقاطع (Δ) مع حامل محور الفواصل.

14.

المستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$،

نعتبر النقط $\overrightarrow{OA}=-\vec{i}-\vec{j}$ ، $\overrightarrow{OB}=2\vec{i}+6\vec{j}$ و $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$.

1)- عين احداثيا النقطتين B و C ثم علم النقط في المستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

2)- أ- أحسب الأطوال AB ،AC ، BC.

ب- استنتج نوع المثلث ABC.

3)- أحسب احداثيا النقطة N منتصف [BC].

4)- عين النقطة M المعرفة بالشكل :
$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{OC}$

15.

المستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

1)- تحقق أن (S) تقبل حلا وحيدا في مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

2)- حل في مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ جملة المعادلتين التالية :

$$(S)\begin{cases}x-y=-3\\-3x+y=1\end{cases}$$

3)- أكتب معادلة المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) حيث:

*المستقيم (Δ_1) يشمل النقطتين $A(-2,1), B(2,5)$

*المستقيم (Δ_2) يشمل النقطة $C(-\frac{1}{3};0)$ و يوازي الشعاع $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

4)- أرسم بعناية المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) في المعلم مع تعيين نقطة التقاطع .

16.

المستوي منسوب الى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$،
نعتبر النقط $C(3,2)$ ، $B(\alpha,-1)$ ، $A(2,3)$ حيث α عدد حقيقي .

1- عين α حتى تكون النقط O,A,B في استقامية.

2- نعتبر الآن أن $\alpha=2$:

- عين احداثيتي النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع.

3- نعتبر النقطة $E(\frac{5}{2},\frac{5}{2})$ من هذا المستوى .

- بين أن النقطة E مركز متوازي الأضلاع $ABCD$.

4- أ- أكتب معادلة المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A و يوازي المستقيم (BC).

ب-عين احداثيي M نقطة تقاطع (Δ) مع حامل محور الفواصل.

ج- ليكن (Δ') مستقيم معادلته : $y=x+1$ ، أوجد نقطة تقاطع (Δ) و (Δ').

17.

المستوي منسوب الى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

نعتبر مجموعة النقط (D_m) المعرفة بالمعادلة:

$$m(m+2)x+(m^2-4)y-m+10=0$$

حيث m عدد حقيقي.

1.أوجد E مجموعة قيم m التي من أجلها تكون المجموعة (D_m) مستقيما.

2.أكتب معادلة المستقيم (D_m) الذي يوازي $(\Delta): y=x$.

3.عين المستقيمات (D_m) التي تقطع المحور $(x'x)$ في النقطة ذات الفاصلة 3

18.

المستوي منسوب الى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

نعتبر النقط التالية : $A(2;1), B(3;-1), C(1;-4)$.

1.أ-عين احداثيا الشعاعين $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}$.

ب-هل النقط C,B,A في استقامية ؟.

2.عين احداثيا منتصف $[AC]$.

3.أ-عين معادلة المستقيم (Δ) الذي يشمل C و $\overrightarrow{AB}$ شعاع توجيهه.

ب-هل النقطة $D(0;1)$ تنتمي الى المستقيم (Δ) ؟.

4.عين معادلة المستقيم (Δ_1) الذي يشمل A و يوازي محور التراتيب.

5. عين معادلة المستقيم (Δ_2) الذي يشمل A و يوازي محور الفواصل.

6.عين معامل توجيه المستقيم الذي معادلته: $5x-3y-2=0$.

7.نعتبر النقطة $E(2x;x)$ حيث x عدد حقيقي.عين قيمة التي من أجلها:

أ-تكون النقط E,B,A على استقامة واحدة.

ب-يكون المثلث EBA متساوي الساقين $[EA]$ و $[EB]$.

8.عين احداثيتي النقطة M بحيث: $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{MB}$

9. عين احداثيتي النقطة F بحيث يكون الرباعي $ABCF$ متوازي أضلاع.

19.

1.حل جملة المعادلتين (S) حيث: $(S)\begin{cases}2x-y=-1\\3x+y=21\end{cases}$

2.استنتج حلول الجملة (S') حيث: $(S')\begin{cases}2z^2-t^2=-1\\3z^2+t^2=21\end{cases}$

(**ارشاد** يمكن وضع: $z^2=x$ و $t^2=y$).

من تقدم الأستاذ شعبان أسامة