

## معادلة مستقيم

Prof Mustapha

KHA-LD9

[I]. مفاهيم أساسية

◆ كل شعاع يوازي مستقيم هو شعاع توجيه له

◆ (AB) و (CD) لهما نفس معامل التوجيه  $\Leftrightarrow (AB) // (CD)$ 

[II]. حساب معامل وشعاع توجيه مستقيم

المستقيم	$ax + by + c = 0$	$y = ax + b$
معامل توجيهه (الميل)	$-\frac{a}{b}$	$a$
شعاع توجيهه	$\vec{v} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$	$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$

\* معامل توجيه مستقيم يشمل نقطتين  $A(x_A; y_A)$  ،  $B(x_B; y_B)$  هو  $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ 

[III]. قاعدة المستقيمان المتوازيان

المستقيمان المتوازيان لهما نفس معامل التوجيه ونفس شعاع التوجيه

[IV]. المعادلة المكافئة: يمكن الانتقال من المعادلة  $ax + by + c = 0$  إلى المعادلة  $y = ax + b$  بتغيير

أطراف المساواة و بضرب أو قسمة المعاملات على عدد حقيقي غير معدوم.

مثال: كل المعادلات التالية متكافئة ولنفس المعادلة.

$$2x - y - 4 = 0 \Leftrightarrow -2x + y + 4 = 0 \Leftrightarrow -6x + 3y + 12 = 0$$

$$y = 2x - 4 \Leftrightarrow 12x - 6y - 24 = 0 \Leftrightarrow -12x + 6y + 24 = 0$$

[V]. طرق إيجاد معادلة مستقيم

1) مستقيم يشمل نقطتين

[I]. طريقة ① (الارتباط الخطي)

مثال: إيجاد معادلة المستقيم (AB) حيث:

$$B(4; 5) ; A(1; -1)$$

① حساب مركبة  $\overline{AB}$ 

$$\overline{AB} \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 5 - (-1) \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

② نفرض النقطة  $M(x; y)$  حيث  $M \in (AB)$ ③ نحسب مركبة  $\overline{AM}$ 

$$\overline{AM} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - (-1) \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{AM} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y + 1 \end{pmatrix}$$

④ نطبق علاقة الارتباط الخطي بين  $\overline{AB}$  و  $\overline{AM}$ 

$$\overline{AB} // \overline{AM} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & x - 1 \\ 6 & y + 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 3(y + 1) - 6(x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow -6x + 3y + 9 = 0$$

إذن معادلة (AB) هي:  $y = 2x - 3$ 

✓ طريقة ② (معامل التوجيه)

مثال: إيجاد معادلة المستقيم (AB) حيث:

$$B(4; 5) ; A(1; -1)$$

① حساب معامل التوجيه  $a$ 

$$a = \frac{5 - (-1)}{4 - 1} = \frac{6}{3} = 2$$

و منه معادلة (AB) هي:  $y = 2x + b$ ② نحسب المعامل  $b$  بتعويض إحداثي  $A$  أو  $B$  في

المعادلة

$$\text{نعوض } A \text{ تصبح المعادلة } -1 = 2(1) + b$$

$$\Rightarrow b = -3$$

إذن معادلة (AB) هي:  $y = 2x - 3$ أو من الشكل:  $2x - y - 3 = 0$ 

\* بفهم المعادلة المكافئة يتمكن التلميذ من الاستيعاب الكامل للدرس وتصبح له الحرية التامة في اختيار الطريقة المناسبة له

## Prof Mustapha KHA-LSDJ

## ✓ طريقة (4) (استخلاص المعاملات)

$$\text{مثال: } \vec{v} \left( \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \right); E(2; 1)$$

أوجد معادلة المستقيم (D) الذي يشمل E و شعاع توجيهه  $\vec{v}$

① نستخلص المعاملات a و b من شعاع التوجيه

$$\text{لدينا } \vec{v} \left( \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \right) \text{ شعاع توجيهه من الشكل } \vec{v} \left( \begin{matrix} -b \\ a \end{matrix} \right)$$

$$\text{و منه نستنتج أن } \begin{cases} -b = 3 \\ a = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -3 \\ a = 4 \end{cases}$$

أي معادلة (D) من الشكل  $4x - 3y + c = 0$

② إيجاد المعامل c

$$\text{نعوض E في المعادلة } 4x - 3y + c = 0$$

$$\Rightarrow 4(2) - 3(1) + c = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{c = -5}$$

إذن معادلة (D) هي:  $4x - 3y - 5 = 0$

## ✓ طريقة (6) (استنتاج المعاملات)

مثال:

$$5x + 2y - 6 = 0 \text{ مستقيم معادلته } F(-3; 4); (D)$$

أوجد معادلة المستقيم (Δ) الذي يشمل F و يوازي (D)

①  $(\Delta) \parallel (D) \iff (\Delta)$  و (D) لهما نفس معامل

و شعاع التوجيه.

$(\Delta) \iff (D)$  لهما نفس المعاملين a و b

و منه معادلة (Δ) من الشكل  $5x + 2y + c = 0$

② إيجاد المعامل c

$$\text{نعوض F في المعادلة } 5x + 2y + c = 0$$

$$\Rightarrow 5(-3) + 2(4) + c = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{c = 7}$$

إذن معادلة (Δ) هي:  $5x + 2y + 7 = 0$

$(\Delta) \iff (D)$  لهما نفس معامل و شعاع التوجيه

## ✓ طريقة (8) (تعويض معامل التوجيه)

مثال: أوجد معادلة المستقيم (K) الذي يشمل G(6; 5) و معامل توجيهه  $\frac{3}{2}$

و معامل توجيهه  $\frac{3}{2}$

① نعوض معامل التوجيه في المعادلة  $y = ax + b$

$$\text{إذن معادلة (K) من الشكل } y = \frac{3}{2}x + b$$

② نعوض G في المعادلة تصبح  $5 = \frac{3}{2}(6) + b$

$$\Rightarrow \boxed{b = -4}$$

$$\text{و منه معادلة (K) هي } y = \frac{3}{2}x - 4$$

$$\text{أو من الشكل } 3x - 2y - 8 = 0$$

## (2) مستقيم معرف بنقطة و شعاع توجيه

## ✓ طريقة (3) (الارتباط الخطي)

$$\text{مثال: } \vec{v} \left( \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \right); E(2; 1)$$

أوجد معادلة المستقيم (D) الذي يشمل E و شعاع توجيهه  $\vec{v}$

① نفرض النقطة  $M(x; y)$  حيث  $M \in (D)$

② نحسب مركبة  $\overrightarrow{EM}$

$$\overrightarrow{EM} \left( \begin{matrix} x - 2 \\ y - 1 \end{matrix} \right)$$

③ نطبق علاقة الارتباط الخطي بين  $\vec{v}$  و  $\overrightarrow{EM}$

$$\vec{v} \parallel \overrightarrow{EM} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & x - 2 \\ 4 & y - 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 3(y - 1) - 4(x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{-4x + 3y + 5 = 0}$$

إذن معادلة (D) هي:  $4x - 3y - 5 = 0$

## (3) مستقيم يشمل نقطة و يوازي مستقيم

## ✓ طريقة (5) (الارتباط الخطي)

مثال:

$$5x + 2y - 6 = 0 \text{ مستقيم معادلته } F(-3; 4); (D)$$

أوجد معادلة المستقيم (Δ) الذي يشمل F و يوازي (D)

① نستخلص شعاع التوجيه  $\vec{u}$  للمستقيم (D)

$$\vec{u} \left( \begin{matrix} -b \\ a \end{matrix} \right) \Rightarrow \vec{u} \left( \begin{matrix} -2 \\ 5 \end{matrix} \right)$$

② نفرض النقطة  $M(x; y)$  حيث  $M \in (\Delta)$

③ نحسب مركبة  $\overrightarrow{FM}$

④ نطبق علاقة الارتباط الخطي بين  $\vec{u}$  و  $\overrightarrow{FM}$

$$\vec{u} \parallel \overrightarrow{FM} \Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & x + 3 \\ 5 & y - 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -2(y - 4) - 5(x + 3) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{-5x - 2y - 7 = 0}$$

إذن معادلة (Δ) هي:  $5x + 2y + 7 = 0$

## (4) مستقيم معرف بنقطة و معامل توجيه

## ✓ طريقة (7) (استخلاص المعاملات)

مثال: أوجد معادلة المستقيم (K) الذي يشمل G(6; 5) و معامل توجيهه  $\frac{3}{2}$

و معامل توجيهه  $\frac{3}{2}$

① من معامل التوجيه نستنتج المعاملين a و b

$$-\frac{a}{b} = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} -a = 3 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \end{cases}$$

و منه معادلة (K) من الشكل  $-3x + 2y + c = 0$

② نعوض G في المعادلة تصبح:

$$-3(6) + 2(5) + c = 0 \Rightarrow \boxed{c = 8}$$

إذن معادلة (K) هي  $-3x + 2y + 8 = 0$

## حل جملة معادلتين (تقاطع مستقيمين)

### I. طريقة الجمع

تعتمد طريقة الجمع على التخلص من إحدى المجهولين  $x$  أو  $y$  لتصبح معادلة ذات مجهول واحد

مثال: أوجد نقطة تقاطع المستقيمين التاليين

$$\begin{cases} 3x + 6y - 15 = 0 \dots (1) \\ 2x - 4y + 6 = 0 \dots (2) \end{cases}$$

للتخلص من المجهول  $x$  يجب ضرب المعادلة (1) في (2) و المعادلة (2) في (-3) ليصبح معامل المجهول  $x$  متعاكسين، فتصبح الجملة:

$$\begin{cases} 6x + 12y - 30 = 0 \dots (3) \\ -6x + 12y - 18 = 0 \dots (4) \end{cases}$$

جمع المعادلتين (3) + (4) نجد:  $24y - 48 = 0 \Rightarrow y = 2$

بالتعويض في المعادلة (1) أو (2) نجد  $x = 1$  و منه الثنائية (1; 2) هي حل للجملة و النقطة (1; 2) هي نقطة تقاطع المستقيمين

### II. طريقة التعويض

نستعمل طريقة التعويض غالبا عندما يكون معامل أحد المجهولين = 1

مثال: أوجد نقطة تقاطع المستقيمين التاليين

$$\begin{cases} 5x - 4y + 6 = 0 \dots (1) \\ -2x + y + 3 = 0 \dots (2) \end{cases}$$

من المعادلة (2) نستنتج أن:  $y = 2x - 3$  بتعويض  $y$  في المعادلة (1) نجد:

$$\begin{aligned} 5x - 4(2x - 3) + 6 &= 0 \\ \Rightarrow 5x - 8x + 12 + 6 &= 0 \\ \Rightarrow -3x &= -18 \\ \Rightarrow x &= 6 \end{aligned}$$

نعوض  $x$  في المعادلة (3) نجد:

$$y = 2(6) - 3 \Rightarrow y = 9$$

و منه الثنائية (6; 9) هي حل للجملة و النقطة (6; 9) هي نقطة تقاطع المستقيمين.

### III. طريقة المحدد (Det) [الوضع النسبي لمستقيمين]

\* تعتبر طريقة المحدد طريقة كاملة لمعرفة الوضع النسبي لمستقيمين أي:

- ◀ متوازيان منفصلان
- ◀ متوازيان متطابقان
- ◀ متقاطعان مع إيجاد نقطة التقاطع

الطريقة:

(D) مستقيم معادلته  $ax + by = c$

(D') مستقيم معادلته  $a'x + b'y = c'$

$$(*) \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

لمعرفة الوضع النسبي للمستقيمين (D) و (D') نستعمل المحدد  $det$

$$det = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$$

$det \neq 0$	$det = 0$	إذا كان
◀ الجملة (*) تقبل حل وحيد	◀ الجملة (*) تقبل ما لا نهاية من الحلول أو لا تقبل حلول	فإن
◀ (D) و (D') يتقاطعان في نقطة وحيدة	◀ (D) و (D') إما متوازيان متطابقان أو متوازيان غير متطابقان	التفسير الهندسي

\* في حالة  $det \neq 0$  إحداثيي نقطة التقاطع هي:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{det}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{det}$$

✓ ملاحظة:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \Leftrightarrow (D) // (D') \text{ و منفصلين}$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Leftrightarrow (D) \text{ ينطبق على } (D')$$