ملخص شامل في الدوال المرجعية

أولى جدع مشترك علوم

اعداد الأستاذ: شعبان أسامة

1AS

الدوال المرجعية

1.الدالة التآلفية:

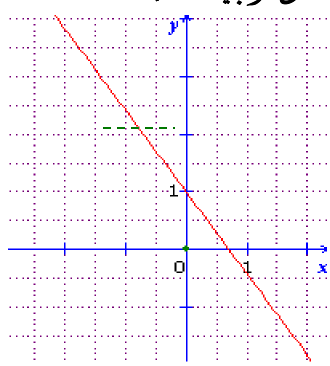
تعريف

نسمّي **دالة تآلفية** كلّ دالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل $f(x)=ax+b$ حيث a و b عددان حقيقيان مفروضان.

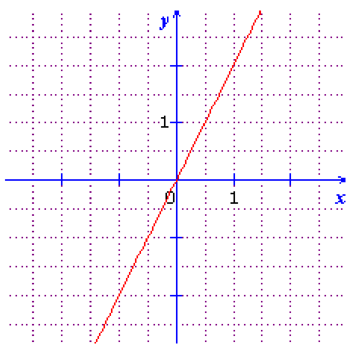
أمثلة:

- الدالة $f : x \mapsto 2x-3$ هي دالة تآلفية حيث $a=2$ هو المعامل الذي يُضرب فيه x و $b=-3$ هو صورة 0 بالدالة f ، بمعنى $f(0)=-3$.
- في حالة $b=0$ ، الدالة $x \mapsto ax$ هي دالة **خطية** ذات معامل التناسبية a .
  $g : x \mapsto \frac{1}{2}x$ دالة خطية حيث $a=\frac{1}{2}$.
- في حالة $a=0$ ، $x \mapsto b$ هي دالة ثابتة.

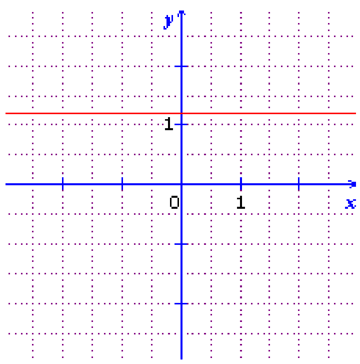
1. الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل
$f(x)=-\sqrt{2}x+1$
تمثّل بالمستقيم $(\mathcal{D})$ الذي معادلته
$y=-\sqrt{2}x+1$.
$(\mathcal{D})$ يمرّ من النقطة $B(0\,;1)$
ومعامل توجيهه $a=-\sqrt{2}$



2. في حالة دالة خطية $x \mapsto ax$ ،
المستقيم $(\mathcal{D})$ الذي معادلته يمرّ من مبدأ المعلم



3. في حالة دالة ثابتة $x \mapsto b$
المستقيم $(\mathcal{D})$ الذي معادلته
$y=b$ يوازي محور الفواصل.



اتجاه تغيّر دالة تآلفية

مبرهنة

f دالة تآلفية معرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل $f(x)=ax+b$.

- إذا كان $a < 0$ ، فإنّ f متناقصة تماما.
- إذا كان $a>0$ فإنّ f متزايدة تماما.

2.الدّالة "مربّع":

تعريف

الدّالة "مربّع" هي الدّالة التّي ترفق بكل عدد حقيقي x مربّعه x^2

إذا رمزنا إلى الدّالة مربع بالرّمز f ، نكتب $f(x)=x^2$ أو $x \xrightarrow{f} x^2$.

مثال:

3 و -3 لهما نفس الصّورة بالدّالة مربع: $3^2 = (-3)^2 = 9$

اتجاه التغيّر

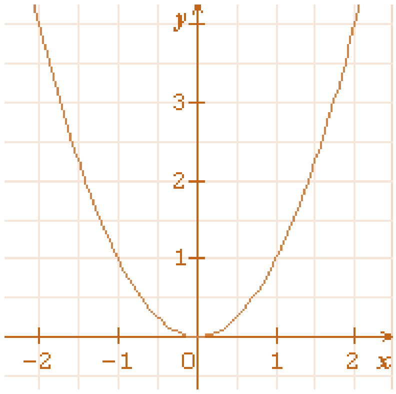
مبرهنة 1

الدّالة مربع متزايدة تماما على $[0,+\infty[$ ، ومتناقصة تماما على $]-\infty,0]$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

التمثيل البياني

عندما نمثّل في معلم $(O;I,J)$ النّقط ذات الإحداثيات $(x;x^2)$ نحصل على المنحنى الممثل للدّالة "مربّع".



(C) هو منحنى الدّالة مربّع

معادلة (C) هي ، $y = x^2$

يسمّى (C) قطعا مكافئا ذروته

خاصية:

من أجل كلّ عدد حقيقي x، لدينا $(-x)$ عدد حقيقي و $(-x)^2 = x^2$ أي $f(-x)=f(x)$.

نستنتج أنّ الدّالة مربّع زوجية.

ملاحظة

في معلم متعامد يكون بيان الدّالة مربّع متناظرا بالنّسبة إلى محور التّراتيب.

3.الدّالة "مقلوب" :

تعريف

الدّالة "مقلوب" هي الدّالة المعرفة على المجموعة $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ ، **والتّي ترفق بكلّ عدد حقيقي** x **غير معدوم مقلوبه** $\frac{1}{x}$.

مثال: $f(2)=\frac{1}{2}$ **و** $f\left(-\frac{2}{5}\right)=-\frac{5}{2}$.

- **إتجاه التغيّر**

الدّالة "مقلوب" متناقصة تماماعلى كلّ من المجالين $]0,+\infty[$ و $]-\infty,0[$

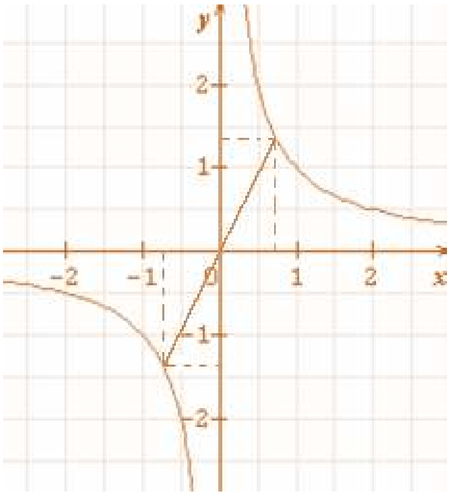
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$0 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 0$

الخط المضاعف في الجدول يعني
أنّ الدّالة "مقلوب" غير معرّفة عند **0**

تذكير : إذا كان $0<x_1<x_2$ **فإن** $0<\frac{1}{x_2}<\frac{1}{x_1}$

وإذا كان $x_1<x_2<0$ **فإن** $\frac{1}{x_2}<\frac{1}{x_1}$ **(حسب قواعد ترتيب الأعداد)**

- **التمثيل البياني**



بما أنّ 0 ليس له صورة بالدّالة مقلوب ، فإنّ منحنيها لا يقطع محور التّراتيب .

يسمّى المنحنى الممثل للدّالة "مقلوب" قطعا زائدا.

خاصية:

من أجل كلّ عدد حقيقي x غير معدوم،لدينا $(-x)$ عدد حقيقي غير معدوم و $\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}$

أي $f(-x)=-f(x)$.

نستنتج أنّ الدّالة مقلوب فردية.

ملاحظة

في كلّ معلم يكون منحنى الدّالة مقلوب متناظرا بالنّسبة إلى مبدأ هذا المعلم.

4.الدّالة "الجذر التربيعي" :

تعريف

الدّالة "الجذر التّربيعي" هي الدّالة المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ والتّي ترفق بكلّ عدد حقيقي x جذره التربيعى $\sqrt{x}$.

إذا رمزنا إلى الدّالة "الجذر التّربيعي" بالرّمز f ، نكتب $f(x)=\sqrt{x}$ أو $\sqrt{x} \xrightarrow{f} x$.

مثال: $f(0{,}49)=\sqrt{0{,}49}=0{,}7$ و $f\left(\frac{7}{9}\right)=\sqrt{\frac{7}{9}}=\frac{\sqrt{7}}{3}$

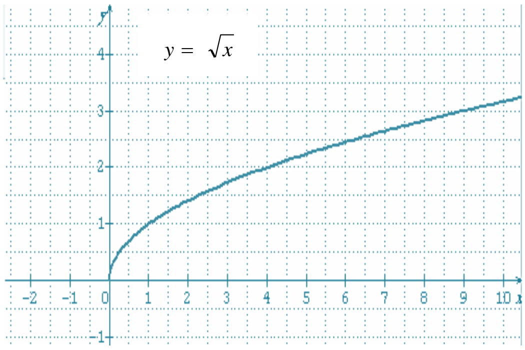
- **إتجاه التغيّر**

الدّالة "الجذر التّربيعي" متزايدة على المجال $[0,+\infty[$.

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0 ↗	$+\infty$

- **التمثيل البياني**

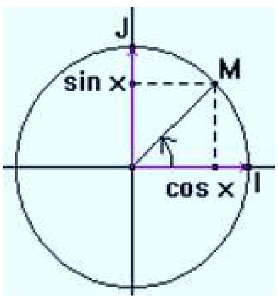
بما أنّ الدّالة "الجذر التربيعي" معرّفة فقط على المجال $[0;+\infty[$ فإنّ منحنيها يقع في الربع الأول من المعلم كما هو موضّح في الشّكل المقابل



5. الدّالة "جيب" ، الدّالة "جيب التّمام"

تعريف

x عدد حقيقي. M النقطة المرفقة بالعدد x من الدائرة المثلثية .
في المعلم $(O;I,J)$:



- نسمّي جيب تمام العدد الحقيقي x، فاصلة النقطة M ونرمز إليه بالرّمز $\cos x$.
الدالة $\cos$ هي الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي x العدد $\cos x$.
- نسمّي جيب العدد الحقيقة x، ترتيب النقطة M ونرمز إليه بالرّمز $\sin x$.
الدالة $\sin$ هي الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي x العدد $\sin x$.

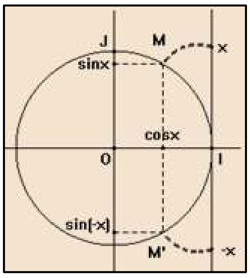
أمثلة

صورة العدد $\frac{\pi}{2}$ هي النقطة $J(0,1)$ إذن $\cos\frac{\pi}{2}=0$ و $\sin\frac{\pi}{2}=1$.

للعددين $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ نفس الصورة $J'(0,-1)$ إذن $\cos\frac{3\pi}{2}=\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right)=0$ و $\sin\frac{3\pi}{2}=\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)=-1$

صورة العدد π هي النقطة $I'(-1,0)$ إذن $\cos\pi=-1$ و $\sin\pi=0$.

مبرهنة:

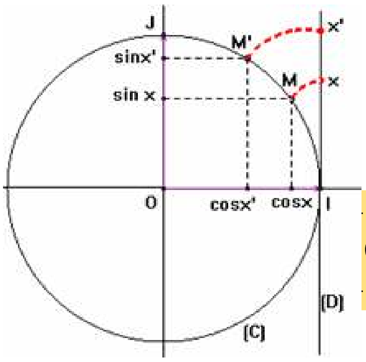


من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :

• $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ و $-1\leq \sin x\leq 1$ و $-1\leq \cos x\leq 1$

• $\cos(-x)=\cos x$ و $\sin(-x)=-\sin x$

أي أنّ الدّالة جيب تمام زوجية و الدالة جيب فردية.

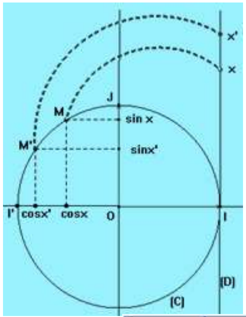


اتجاه تغيّر الدّالتين "جيب تمام" و "جيب" على المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

خاصية 1

• الدالة $\cos x$ متناقصة تماما على المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ • الدالة $\sin x$ متزايدة تماما على المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

خاصية2



• الدالة cos متناقصة تماما على المجال $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ • الدالة sin متناقصة تماماعلى المجال $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

• جدول تغيّرات الدّالتين "جيب تمام" و "جيب" على المجال $[0\ ;\ \pi]$

نستنتج من الخاص 1 و من الخاصة2 :

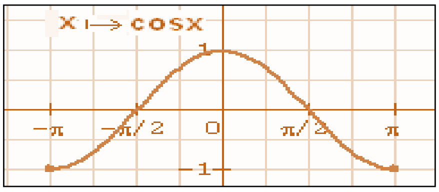
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0 ↗	1	↘ 0

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
cos	1 ↘	0	↘ -1

التمثيل البياني

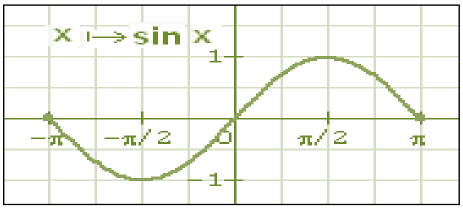
• ننشئ التمثيل البياني للدالة cos على المجال $[0,\pi]$ انطلاقا من جدول تغيراتها.

نتمم هذا الرسم على $[-\pi,0]$ بالتناظر بالنسبة للمبدأ لأن الدالة cos زوجية .



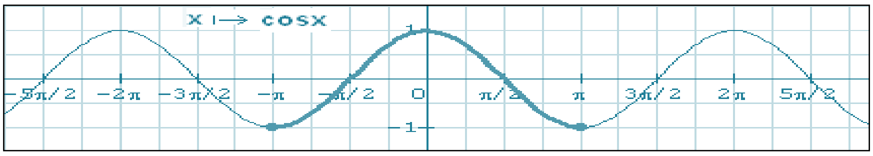
• ننشئ التمثيل البياني للدالة sin على المجال $[0,\pi]$ انطلاقا من جدول تغيراتها.

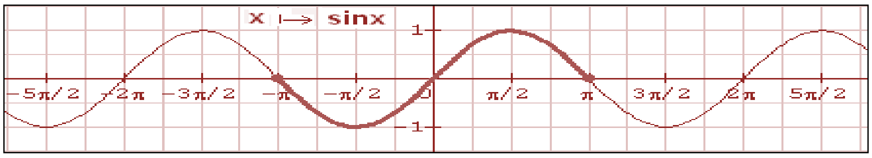
نتمم هذا الرسم على $[-\pi,0]$ بالتناظر بالنسبة للمبدأ لأن الدالة sin فردية .



ملاحظة:

بيان الدالة "جيب تمام" و بيان الدالة "جيب" على $\mathbb{R}$ هما

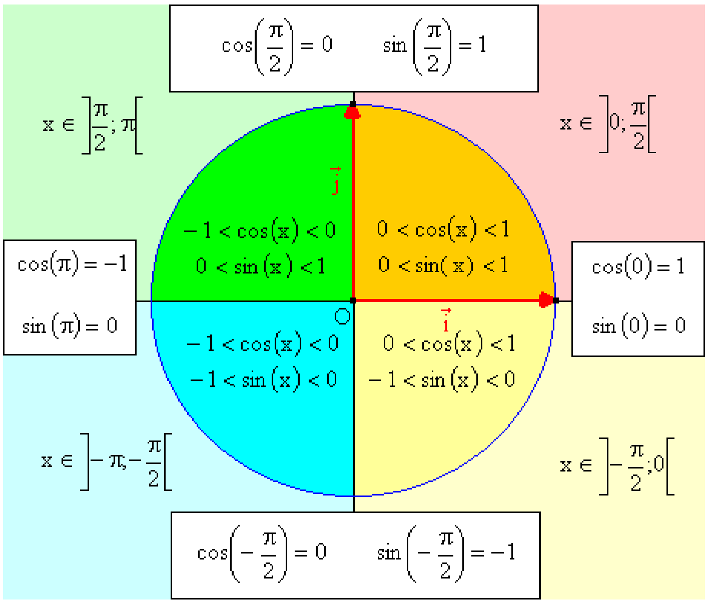


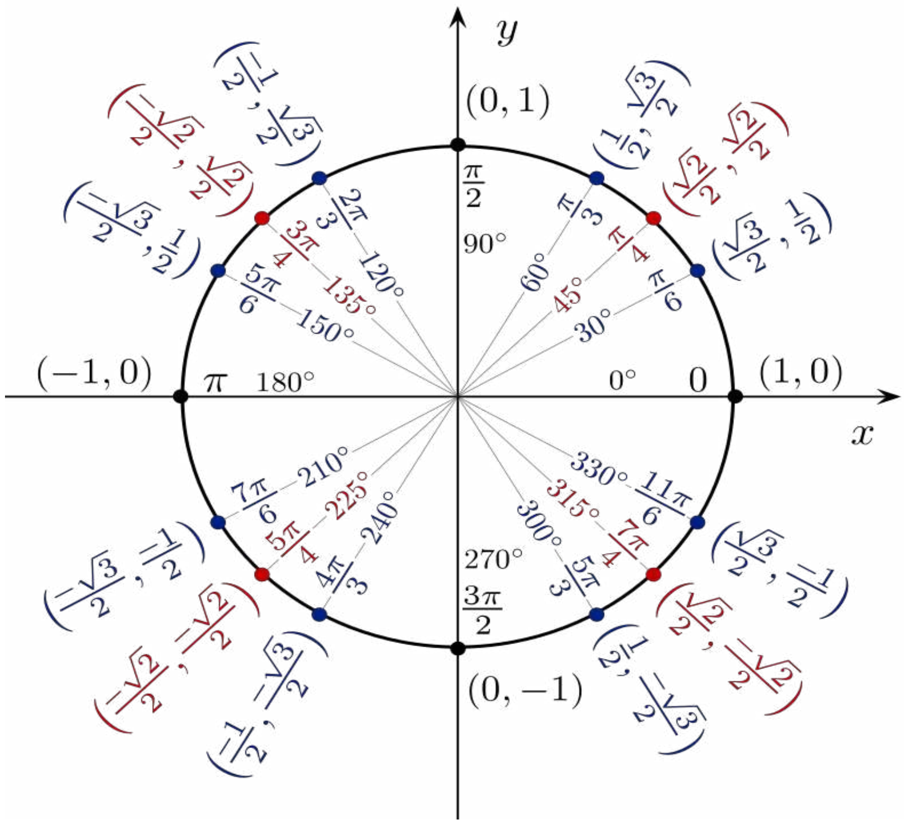


لاحظ انه يمكن استنتاج أي جزء من بيان الدالة "جيب تمام" (أو الدالة "جيب") من الجزء الملون بالأحمر وذلك بانجاز " دوريا" مثيلات له لأن من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $\cos(x+2\pi)=\cos x$ و($\sin(x+2\pi)=\sin x$) نقول إنّ الدالة "جيب تمام" (الدالة "جيب" أيضا) دورية ودورها 2π.

جدول جيب وجيب تمام القيم الشهيرة:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0





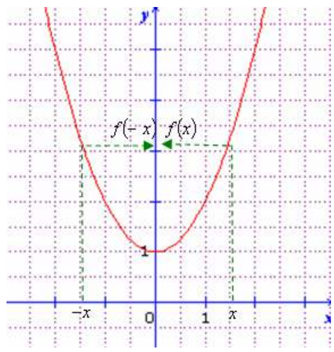
شفعية دالة

تعريف

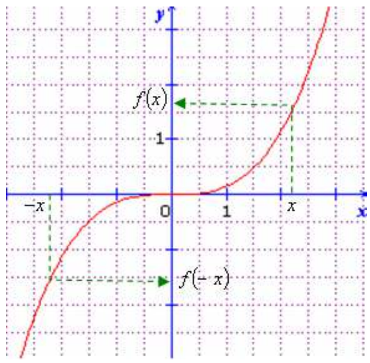
D جزء من $\mathbb{R}$، f دالة معرّفة على D.

- نقول إنّ f دالة **زوجية** إذا كان D متناظرا بالنسبة إلى 0 وكان لكلّ x من D، $f(-x)=f(x)$

- نقول إنّ f دالة **فردية** إذا كان D متناظرا بالنسبة إلى 0 وكان لكلّ x من D، $f(-x)=-f(x)$.



بيان الدالة الزوجية في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد يكون متناظرا بالنسبة إلى محور التراتيب.



بيان الدالة فردية في المستوي المنسوب إلى معلم يكون متناظرا بالنسبة إلى مبدأ المعلم.

أمثلة:

1. الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x)=2x^2+1$ دالة زوجية، لأنّ :
مجموعة تعريفها $\mathbb{R}$ متناظرة بالنسبة إلى 0 (بمعنى، لكلّ x من R، $-x\in R$)
ولكلّ x من $\mathbb{R}$، $f(-x)=2(-x)^2+1=2x^2+1=f(x)$.

2. الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة $g(x)=-\dfrac{2}{x}$ فردية، لأنّ:
مجموعة تعريفها $\mathbb{R}^*$ متناظرة بالنسبة إلى 0
ولكلّ x من $\mathbb{R}^*$، $g(-x)=-\dfrac{2}{(-x)}=-\left(-\dfrac{2}{x}\right)=-g(x)$.

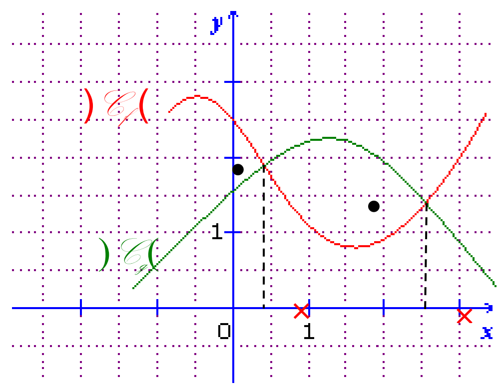
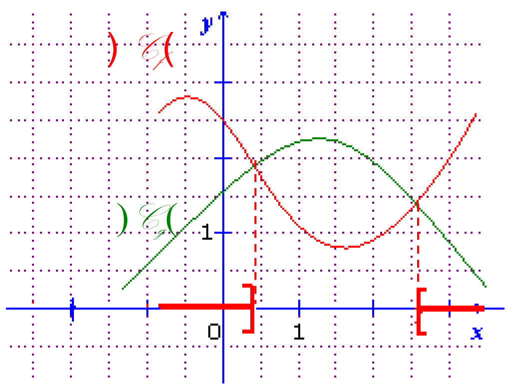
3. الدالة h المعرفة على $[0\,;+\infty[$ بالعبارة $f(x)=2x^2+1$ ليست زوجية ولا فردية، لأنّ المجال $[0\,;+\infty[$ غير متناظر بالنسبة إلى 0.

4. الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $u(x)=x+3$ ليست زوجية ولا فردية، لأنّه بالرغم من أنّ مجموعة تعريفها $\mathbb{R}$ متناظرة بالنسبة إلى 0، لكن $u(-x)=-x+3$ لا يساوي $u(x)$ ولا يساوي $-u(x)$.

ملاحظة

للبرهان على أنّ f ليست دالة زوجية (أو دالة فردية)، يكفي إيجاد عنصر a من مجموعة تعريفها حيث $f(-a)\neq f(a)$ (أو $f(-a)\neq -f(a)$). ويعتبر التمثيل البياني للدّالة وسيلة للتحقّق من شفعية الدالة.

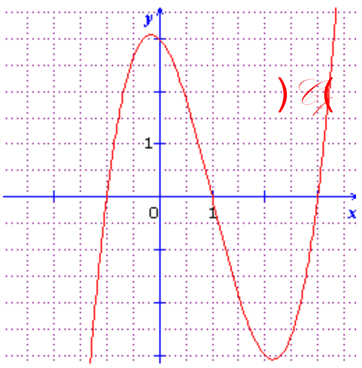
f و g دالتان معرفتان على مجموعة D، $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$ منحنياهما في معلم للمستوي.

• حلّ المعادلة $f(x)=g(x)$ بيانيا يعني: تعيين فواصل النقط المشتركة للمنحنيين (C_f) و (C_g).	• حلّ المتراجحة $f(x)>g(x)$ بيانيا يعني: تعيين فواصل نقط المنحني (C_f) الواقعة فوق المنحني (C_g).
	

أمثلة

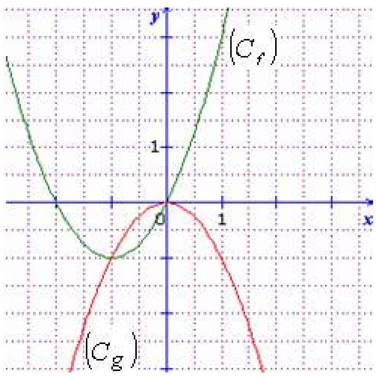
1. نعرّف الدالة f بالمنحني $(\mathscr{C}_f)$ المقابل.
حلّ المعادلة $f(x)=0$ بيانيا يؤول إلى تعيين فواصل نقط تقاطع المنحني $\mathscr{C}_f$ مع محور الفواصل.
المنحني $(\mathscr{C}_f)$ يقطع ثلاث مرات محور الفواصل.

حلول المعادلة $f(x)=0$ هي فواصل هذه النقط:
$S=\{-1;1;3\}$



2. f ، g دالتان معرفتان بالمنحنيين $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$ (الشكل المقابل).
حلّ المتراجحة $f(x)\geq g(x)$ بيانيا يؤول إلى تعيين فواصل نقط المنحني $(\mathscr{C}_f)$ الواقعة فوق المنحني $(\mathscr{C}_g)$ وفواصل النقط المشتركة.

$S=]-\infty;-1]\cup[0;+\infty[$



إشارة جداء أو حاصل قسمة

<u>خاصية</u>

جداء و حاصل قسمة عددين غير معدومين ومن نفس الإشارة هو عدد موجب تمام.
جداء و حاصل قسمة عددين غير معدومين ومن إشارتين متعاكستين هو عدد سالب تمام.

مثال

لندرس إشارة $f(x)=(2x+3)(1-x)$ على $\mathbb{R}$.

إنّ $2x+3$ هي عبارة دالة تآلفية، تمثيلها البياني مستقيم معادلته $y=2x+3$ ومعامل التوجيه له 2 موجب تماما.

ولدينا كذلك $2x+3=0$ يكافئ $x=-\frac{3}{2}$.

كما أنّ $1-x$ هي عبارة دالة تآلفية، تمثيلها البياني مستقيم معادلته $y=-x+1$ ومعامل التوجيه له -1 سالب تماما.

ولدينا كذلك $1-x=0$ يكافئ $x=1$. منه:

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		1		$+\infty$
إشارة $2x+3$		-	0	+		+	
إشارة $1-x$		+		+	0	-	
إشارة $(2x+3)(1-x)$		-	0	+	0	-	

بالتوفيق للجميع...أستاذ المادة.شعبان

تجدون هذا الملف: