❺ الجذور التربيعية:

نشاط مقترح:

- علّم على مستقيم عددي النقط التالية: $A(\sqrt{2})$، $B(\sqrt{3})$، $C(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ و $D(\sqrt{5})$.
- قارن بين OC وَ OD.

حل النشاط:

.

① تعريف:

a عدد حقيقي **موجب** $(a \geq 0)$
نسمي **الجذر التربيعي** للعدد a، **العدد الحقيقي الموجب** الذي **مربعه** يساوي a، ونرمز له بالرمز $\sqrt{a}$.

أمثلة:

- $a = 4$، نجد: $\sqrt{4} = 2$ لأنّ $2^2 = 4$ وَ $0 \leq 4$.
- $a = 169$، نجد: $\sqrt{169} = 13$.
- $\sqrt{0{,}49} = 0{,}7$ لأنّ $(0{,}7)^2 = 0{,}49$ وَ $0{,}49 \geq 0$.
- $a = \frac{9}{25}$، نجد: $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$.

ملاحظات:

- لا يُمكن حساب الجذر التربيعي **لعدد حقيقي سالب**.

مثال: ● لا يُمكن حساب $\sqrt{-4}$.

- **الجذر التربيعي** هو **عدد حقيقي موجب دوماً**،

أي: من أجل كل $a \geq 0$ **فإنّ:** $\sqrt{a} \geq 0$.

② خواص: (خواص الحساب على الجذور التربيعية)

- من أجل a **موجب** $(a \geq 0)$، $\sqrt{a} \geq 0$ وَ $\sqrt{a}^2 = a$.
- من أجل $(a \geq 0$ وَ $b \geq 0)$، $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.
- ن أجل $(a \geq 0$ وَ $b > 0)$، $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

ملاحظات:

- من أجل $(a \geq 0$ وَ $b \geq 0)$، $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
وتكون **المساواة محققة** إلا إذا كان أحدهما معدوم أو معدومين معاً.

مثال: $\sqrt{9+16} \neq \sqrt{9} + \sqrt{16}$.

- إذا كان a **موجب** $(a \geq 0)$، $\boxed{\sqrt{a^2} = a}$.
- إذا كان a **سالب** $(a \leq 0)$، $\boxed{\sqrt{a^2} = -a}$.

أمثلة:

- $\sqrt{2^2} = 2$ وَ $\sqrt{(-2)^2} = -(-2) = 2$.
- $\sqrt{0{,}25 \times 16} = \sqrt{0{,}25} \times \sqrt{16} = 0{,}5 \times 4 = 2$.

- $\sqrt{\frac{4}{100}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{100}} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

تمارين: 34؛ 35؛ 39؛ 41؛ 43 و44 ص20-21.

❻ القوى الصحيحة:

① تعريف:

a عدد حقيقي **كيفي** وَ n عدد طبيعي غير معدوم.
نسمي **القوة ذات الرتبة n** للعدد الحقيقي a، **العدد a^n**
حيث: $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ عاملا}}$،

- من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم a $(a \neq 0)$،
وَ n عدد طبيعي غير معدوم $(n \in \mathbb{N}^*)$، $\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$.

اصطلاحا:

من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم a $(a \neq 0)$، $\boxed{a^0 = 1}$.

أمثلة:

- $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$.
- $7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{7\times 7} = \frac{1}{49}$.
- $\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3\times3\times3\times3}{2\times2\times2\times2} = \frac{81}{16}$.
- $\left(\frac{4}{5}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{4}{5}\right)^3} = \frac{1}{\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}} = \frac{1}{\frac{4\times4\times4}{5\times5\times5}} = \frac{1}{\frac{64}{125}} = \frac{125}{64}$.
- $\sqrt{2}^0 = 1$.

② خواص: (خواص الحساب على القوى الصحيحة)

من أجل a وَ b عدادان حقيقيان غير معدومان، n و m عدادان صحيحان.

- $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- $(\;^{n})^{m} = \;^{n\times m}$
- $(a \times b)^n = a^n \times b^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

حالات خاصة:

- من أجل كل عدد حقيقي a غير معدوم وَكل عدد طبيعي n غير معدوم، **لدينا:** $a^n \times a^{-n} = a^{n-n} = a^0 = 1$
ويكون: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.
- من أجل كل عدد طبيعي n؛
  - إذا كان n **زوجي** $(n = 2k)$، $\boxed{(-1)^n = 1}$.
  - إذا كان n **فردي** $(n = 2k+1)$، $\boxed{(-1)^n = -1}$.

أمثلة:

حل التمرين 28 صفحة 20 :

✦ لدينا : $A=\frac{(-2)^5\times(-6)^3\times(-3)^8}{(15)^2\times(-12)^3}=\frac{-2^5\times-6^3\times3^8}{-15^2\times12^3}=-\frac{2^5\times6^3\times3^8}{(5\times3)^2\times(4\times3)^3}$

$=-\frac{2^5\times2^3\times3^3\times3^8}{5^2\times3^2\times2^6\times3^3}=-\frac{2^8\times3^{11}}{5^2\times2^6\times3^5}=-\frac{2^2\times3^6}{5^2}$

إذن : $A=-\frac{2916}{25}$

تمارين: 29؛ 30؛ 31 ص20.

❼ القيم المضبوطة –القيم المقربة:

① الكتابة العلمية: (الشكل العلمي)

كتابة **عدد عشري** على **الشكل العلمي** يعني التعبير عنه على الشكل: $\boxed{a\times10^n}$ (أو $\boxed{-a\times10^n}$)

حيث $\begin{cases}1\le a<10\\ n\in\mathbb{Z}\end{cases}$.

-إزاحة الفاصلة يمكن أن يكون **نحو اليسار** أو **نحو اليمين**.

أمثلة:

● **$1{,}623\times10^8$ هي الكتابة العلمية للعدد 162300000**

← أزحنا الفاصلة 8 مراتب نحو اليسار .

إذن: $162300000=1{,}623\times10^8$.

● **$9{,}33\times10^{-5}$ هي الكتابة العلمية للعدد 0,0000933**

← أزحنا الفاصلة 5 مراتب نحو اليمين .

إذن: $0{,}0000933=9{,}33\times10^{-5}$.

حل التمرين 48 ص21:

.

② مدور عدد حقيقي:

A **عدد حقيقي** مكتوب في شكله العشري، وليكن d رقمه العشري ذا الرتبة $p+1$.

نسمي **مدوّر A إلى 10^{-p}** العدد الذي نحصل عليه كما يلي:

❑ إذا كان $d\ge5$، نأخذ العدد بأرقامه العشرية إلى الرقم العشري الذي رتبته p ونُضيف 1 إلى هذا الرقم.

❑ إذا كان $d<5$، نأخذ العدد بأرقامه العشرية إلى الرقم العشري الذي رتبته p.

أمثلة:

مدور العدد	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{8}$
إلى الوحدة	2	-3
إلى 10^{-1}	1,7	$-2{,}8$
إلى 10^{-2}	1,73	$-2{,}83$
إلى 0,0001	1,7321	$-2{,}8284$

حل التمرين 46؛ 47 و50 ص21:

.

③ رتبة مقدار عدد:

لتحديد رتبة مقدار عدد:

- **نكتبه على الشكل العلمي.**
- **نُدور العدد العشري في كتابته العلمية إلى العدد الصحيح الأقرب منه (أي نُدوره إلى الوحدة) ونحتفظ بالقوة 10.**

أمثلة:

● إيجاد رتبة مقدار العدد x حيث $x=2020$

لدينا **الكتابة العلمية للعدد x** هي: $x=2{,}020\times10^3$

ومنه **رتبة مقداره** هي: 2×10^3

●

العدد	الكتابة العلمية	رتبة مقدار العدد
251,3	$2{,}513\times10^2$	3×10^2
0,095	$9{,}5\times10^{-2}$	1×10^{-1}
150×10^{-3}	$1{,}5\times10^{-1}$	2×10^{-1}

ملاحظة:

العدد يساوي الكتابة العلمية، ولكن لا يساوي رتبة مقدار.

رتبة مقدار جداء عددين أو حاصل قسمتهما:

لإيجاد رتبة مقدار جداء عددين أو حاصل قسمتهما نحسب جداء أو حاصل قسمة رتبتي مقداري العددين ونأخذ رتبة مقدار الناتج.

أمثلة:

✦ رتبة مقدار العدد $251{,}3\times150\times10^{-3}$ هي 6×10

لأنّ : $(3\times10^2)\times(2\times10^{-1})=6\times10$.

✦ رتبة مقدار العدد $\frac{251{,}3}{150\times10^{-3}}$ هي 2×10^3

لأنّ : $\frac{3\times10^2}{2\times10^{-1}}=1{,}5\times10^3$ ورتبة مقدار $1{,}5\times10^3$ هي 2×10^3.

حل التمرين 52 ص21:

.

❽ الأعداد والحاسبة:

① تمثيل الأعداد في الحاسبة:

عند استعمال الحاسبة، نتعامل مع العدد بثلاثة (03) أشكال هي:

- **القيمة المضبوطة.**
- **القيمة الظاهرة.**
- **القيمة المخزنة.**

أمثلة:

● العدد $\sqrt{7}$:

⌫ باستعمال الحاسبة نجد **القيمة الظاهرة** لهذا العدد هي 3,31662479،

⌫ إذا استعملنا هذه القيمة في حساب الفرق الآتي لا تكون النتيجة معدومة $\sqrt{7} - 3{,}31662479$

⌫ نجد أنّ: $\sqrt{7} - 3{,}31662479 = 3{,}6 \times 10^{-10}$ و هذا يعني أنّ الحاسبة لم تستعمل في حساب هذا الفرق القيمة التي أظهرتها لنا بل استعملت قيمة أخرى، تسمى هذه القيمة **بالقيمة المخزنة** و هي: $3{,}6 \times 10^{-10}$.

● العدد $\frac{22}{3}$:

⌫ القيمة المضبوطة هي: $\frac{22}{3}$.

⌫ القيمة الظاهرة هي: $3{,}142857143$.

⌫ القيمة المخزنة هي:

$$\frac{22}{3} - 3{,}142857143 = -1{,}429 \times 10^{-10}.$$

② تنظيم حساب باليد أو بالحاسبة:

عند إجراء حساب ما، نتبع الخطوات التالية:

- **الحسابات داخل الأقواس.**
- **الحسابات المتعلقة بالقوى والجذور التربيعية.**
- **عمليات الضرب والقسمة حسب ترتيب كتابتها.**
- **عمليات الجمع والطرح حسب ترتيب كتابتها.**

أمثلة:

تنظيم حساب باليد :

مثال 1 : لنحسب العبارة : $(4 \times 2 + \sqrt{2})^2 - 3$

⋆ نجري العمليات داخل القوس : $(4 \times 2 + \sqrt{2})^2 - 3 = (8 + \sqrt{2})^2 - 3$

⋆ ثم نحسب القوى : $(4 \times 2 + \sqrt{2})^2 - 3 = 64 + 2 + 16\sqrt{2} - 3$

⋆ و أخيرا عمليات الجمع و الطرح : $(4 \times 2 + \sqrt{2})^2 - 3 = 63 + 16\sqrt{2}$

مثال 2 : لنحسب العبارة : $A = \frac{(2-\sqrt{16})^3}{2} + 7\left(3 - 11 + \frac{12}{7}\right)^2$

⋆ نجري العمليات داخل القوس :

$$A = \frac{(2-\sqrt{16})^3}{2} + 7\left(3 - 11 + \frac{12}{7}\right)^2 = \frac{(-2)^3}{2} + 7\left(\frac{-44}{7}\right)^2$$

⋆ نحسب القوى : $A = \frac{(-2)^3}{2} + 7\left(\frac{-44}{7}\right)^2 = \frac{-8}{2} + 7 \times \frac{1936}{49}$

⋆ القسمة و الضرب : $A = -4 + \frac{1936}{7}$

⋆ و أخيرا توحيد القامات و الجمع : $A = \frac{1908}{7}$

كتابة برنامج حساب بالحاسبة :

مثال : كتابة برنامج لحساب العدد : $\frac{2 \times 10^{-2}}{3 - 0.5}$

$\boxed{2}\boxed{\times}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{y^x}\boxed{2}\boxed{+/-}\boxed{\div}\boxed{(}\boxed{3}\boxed{-}\boxed{0}\boxed{.}\boxed{5}\boxed{)}\boxed{=}$

تطبيق : اكتب برنامجا بالحاسبة لحساب العددين :

$$A = \frac{9 \times 2 - 10}{12 - 8} \qquad B = \frac{2\pi - \sqrt{3}}{10^{-2}}$$

حل التطبيق :

$\boxed{(}\boxed{9}\boxed{\times}\boxed{2}\boxed{-}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{)}\boxed{\div}\boxed{(}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{-}\boxed{8}\boxed{)}\boxed{=}$ 2

$\boxed{(}\boxed{2}\boxed{\times}\boxed{2^{ndf}}\boxed{\pi}\boxed{-}\boxed{3}\boxed{\sqrt{\ }}\boxed{)}\boxed{\div}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{y^x}\boxed{2}\boxed{+/-}\boxed{=}$ 455.11345

حل التمرين 24 و 25 ص19:

.

❾ تعلم البرهنة:

① برهان صحة مساواة:

للبرهان على صحة مساواة $\boxed{A = B}$، A و B عددان أو عبارتان يُمكن اتباع إحدى الطرق التالية:

- **من طرف إلى طرف.**
- **تحويل كل طرف.**
- **حساب الفرق.**

أمثلة:

● من طرف إلى طرف:

البرهان أنّ $\frac{100-(0{,}00003)^2-10^2}{6\times10^{-9}} = -15$:

لدينا:
$$\frac{100-(0{,}00003)^2-10^2}{6\times10^{-9}} = \frac{-9\times10^{-8}}{6\times10^{-9}} = \frac{-3\times10^{-8}\times10^{+9}}{2} = \frac{-3\times10}{2} = \frac{-30}{2} = -15$$

إذن: $\boxed{\frac{100-(0{,}00003)^2-10^2}{6\times10^{-9}} = -15}$.

● تحويل كل طرف:

البرهان أنّ $(x+2)^2 - 5 = (x-1)(x+5) + 4$:

لدينا من جهة:
$$(x+2)^2 - 5 = x^2 + 4x + 4 - 5 = x^2 + 4x - 1$$

ولدينا من جهة أخرى:
$$(x-1)(x+5) + 4 = x^2 + 5x - x - 5 + 4 = x^2 + 4x - 1$$

إذن: $\boxed{(x+2)^2 - 5 = (x-1)(x+5) + 4}$.

● حساب الفرق:

البرهان أنّ $\frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$:

لدينا:
$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{(1+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})-2(3+\sqrt{5})}{2(1+\sqrt{5})} = \frac{1+2\sqrt{5}+5-6-2\sqrt{5}}{2(1+\sqrt{5})} = \frac{0}{2(1+\sqrt{5})} = 0$$

إذن: $\boxed{\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}}$.

② الحكم على نص رياضي:

مثال:

● **مجموع ثلاثة أعداد طبيعية متتالية مضاعف للعدد 3.**

- **الحكم:** النص الرياضي صحيح.
- **التبرير:**

$$n + (n+1) + (n+2) = 3n + 3 = 3k.$$

الحمد لله.

حلول بعض تمارين الكتاب المدرسي

وضع العلامة × في الخانة (أو الخانات) المناسبة:

حل التمرين 1. $\frac{1}{7}$ ينتمي إلى:

$\mathbb{N}$ ☐ $\mathbb{Z}$ ☐ $\mathbb{D}$ ☐ $\mathbb{Q}$ ☒ $\mathbb{R}$ ☒.

حل التمرين 2. من بين الأعداد التالية، العدد الطبيعي هو:

$\frac{(\sqrt{2})^4}{4}$ ☒ $\frac{\sqrt{52}}{\sqrt{13}}$ ☒ $(1+\sqrt{2})^2-3$ ☐.

حل التمرين 3. من بين الأعداد الناطقة التالية، العدد غير العشري هو: 6×10^{-4} ☐ $\sqrt{0,81}$ ☐ $\frac{1}{3\times10^2}$ ☒.

حل التمرين 4. من بين الأعداد التالية، العدد الأولي هو:

183 ☐ 121 ☐ 259 ☐.

حل التمرين 5. التحليل المناسب للعدد 6270 هو:

$2\times5\times11\times57$ ☐

$2^2\times5\times313$ ☐

$2\times3\times5\times11\times19$ ☒

$2\times3\times5\times209$ ☐

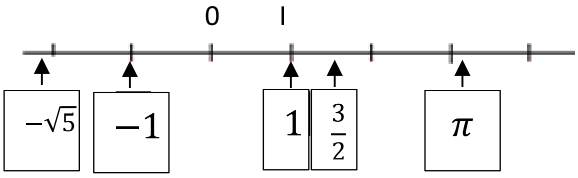
حل التمرين 6. العدد $1^3+2^3+3^3+4^3+5^3$ يساوي:

15^3 ☐ 225 ☒ $(1+2+3+4+5)^3$ ☐

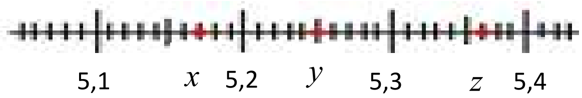
تمثيل أعداد على المستقيم العددي

حل التمرين 7. اعادة رسم المستقيم (الوحدة $1cm$) ثمّ وضع كلا من الأعداد الحقيقية التالية في الخانة المناسبة:

$-\sqrt{5}$ ؛ π ؛ $\frac{3}{2}$ ؛ 1 ؛ -1.



حل التمرين 8. إيجاد الأعداد المعينة بالحروف x وy وz على المستقيم العددي:



$\boxed{x=5,17}$ ؛ $\boxed{y=5,25}$ و $\boxed{z=5,36}$.

حل التمرين 9. تعلّم على مستقيم مزوّد بمعلم (O,I) (الوحدة $1cm$) النقاط الممثلة للأعداد الحقيقية التالية:

$-\pi$ ؛ $-\frac{3}{2}$ ؛ $\sqrt{5}$ ؛ $\frac{\pi}{2}$ ؛ 2π.

مجموعات الأعداد

حل التمرين 11. إكمال بأحد الرمزين $\in$ أو $\notin$:

$10\in\mathbb{N}$ ؛ $3,5\notin\mathbb{Z}$ ؛ $\frac{1}{3}\notin D$ ؛ $\frac{\sqrt{2}}{3}\notin\mathbb{Q}$ ؛ $\frac{2\pi}{3}\in\mathbb{R}$.

حل التمرين 12. تعيين المجموعة (أو المجموعات) التي ينتمي إليها كلّ من الأعداد:

	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{N}$	التبسيط
-3	×	×	×	×		-3
125	×	×	×	×	×	125
$2\sqrt{3}$	×					$2\sqrt{3}$
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	×					$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$-\frac{7}{3}$	×	×				$-\frac{7}{3}$
π	×					π
0	×	×	×	×	×	0
$2,75$	×	×	×			$\frac{275}{10^2}$

حل التمرين 13. تبيّان طبيعة كلّ من الأعداد:

$A=\frac{-\sqrt{144}}{3}=\frac{-12}{3}=-4\in\mathbb{Z}$ ❑

$B=\frac{\pi}{3,14}\in\mathbb{R}$ ❑

$C=\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)-1}{\sqrt{2}-1}=\frac{-(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1}=-1\in\mathbb{Z}$ ❑

حل التمرين 14. لتكن I مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث $-4\le x\le3$.

1) عدد عناصر $\mathbb{N}$ التي تشملها I هو **4 عناصر**.

2) عدد عناصر $\mathbb{Z}$ التي تشملها I هو **8 عناصر**.

3) يوجد **ما لا نهاية** من الأعداد الناطقة التي تشملها I.

حل التمرين 15. نقل الجدول واكماله بوضع علامة × عندما يكون العدد عنصرا من المجموعة:

	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{N}$	التبسيط
58	×	×	×	×	×	58
$\frac{3}{2}$	×	×	×			$\frac{3}{2}$
$-\frac{15}{3}$	×	×	×	×		-5
$1,5\times10^3$	×	×	×	×	×	1500
2π	×					2π
$\frac{1}{100}$	×	×	×			$\frac{1}{100}$
$\sqrt{64}$	×	×	×	×	×	8
$(0,5)^2$	×	×				$\frac{25}{10^2}$

حل التمرين 16. تُعطى قائمة لأعداد