5 min Maths

مجلة

أولى جذع مشترك علوم

الفصل الثاني

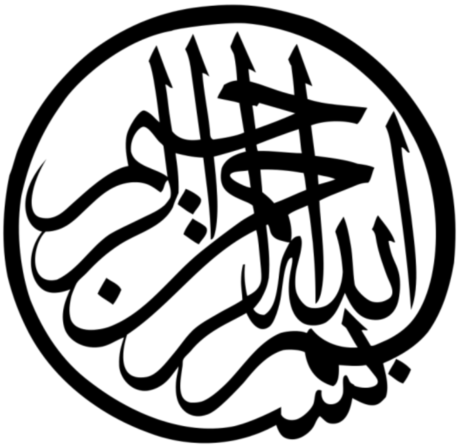
تشمل المحاور:

- الحساب الشعاعي و معادلة المستقيم
- الدوال المرجعية
- العبارات الجبرية

فكرة و اعداد الأستاذ: شعبان أسامة

فيفري 2020

شكر خاص للأستاذ خالد بخاخشة



بتوفيق من الله عز و جل انجزت هذا العمل المتواضع الذي أرجوا
عأن يفيد

تلاميذ السنة أولى جذع مشترك علوم و تكنولوجيا على ما يحتوي
عمن جوانب علمية قيمة و مطروحة بشكل واضح و بسيط.

كما أود أن أشكر زميلي الأستاذ: **بخاخشة خالد** على مساعدته
عبتقديم أعماله القيمة لاضافتها في المجلة

ع

عأهدي هذا العمل الى كل عائلتي و أحبائي

أ.شعبان أسامة

مجلة Maths 5min

السنة الأولى جذع مشترك علوم (الفصل الثاني)

تجدون فيها:

محور

الحساب الشعاعي و معادلة مستقيم

ملخص الدرس

1.الأشعة المرتبطة خطيا.

• تساوي شعاعين نقول عن شعاعين أنّهما متساويان إذا كان لهما نفس المنحى، ونفس الاتجاه، ونفس الطويلة.

نقول أن شعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي k حيث أن $\vec{u}=k\vec{v}$.

يكون الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطين خطيا إذا و فقط إذا كان المستقيمين (AB) و (CD) متوازيين .

ملاحظة: الشعاع المعدوم الذي نرمز له $\vec{0}$ مرتبط خطيا مع كل شعاع من المستوي.

2.طويلة شعاع.

طويلة شعاع $\vec{u}$ حيث $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ هي طول القطعة $[AB]$ و نرمز لها $\|\overrightarrow{AB}\|$ ونكتب $\|\vec{u}\|=\|\overrightarrow{AB}\|=AB$.

ملاحظات:

يكون الشعاع $\vec{u}$ شعاع وحدة إذا و فقط إذا كان $\|\vec{u}\|=1$ (وحدة أطوال في المستوي).

$\|\overrightarrow{AB}\|=0$ معناه النقطة A منطبقة على النقطة B .

من أجل كل شعاع $\vec{u}$ و من أجل كل عدد حقيقي k لدينا $\|k\vec{u}\|=|k|\times\|\vec{u}\|$.

$M\in(AB)$ معناه $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$ (k عدد حقيقي)

3.التوازي و الإستقامة.

القول أن المستقيمين (AB) و (CD) متوازيان معناه أنه يوجد عدد حقيقي k حيث أن $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$.

القول أن النقط A ، B ، C استقامة واحدة معناه أنه يوجد عدد حقيقي k حيث أن $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.

4.الأشعة المرتبطة خطيا في الهندسة التحليلية.

في المستوي المنسوب إلى معلم (O,I,J) ليكن الشعاعان $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$. القول أن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا معناه: $xy'-x'y=0$.

في المستوي المنسوب إلى معلم (O,I,J) لتكن القطتان $A(x,y)$ و $B(x',y')$. مركبتا الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هي: $\begin{pmatrix}x'-x\\y'-y\end{pmatrix}$.

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (O,I,J) ليكن الشعاع $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. طويلة الشعاع $\vec{u}$ هي : $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$.

5. حساب مركبتي شعاع وإحداثيي منتصف قطعة مستقيم

لتكن $A(x_A\,;\,y_A)$ ، $B(x_B\,;\,y_B)$ في معلم $(\,O\,;\,i\,,\,j\,)$.

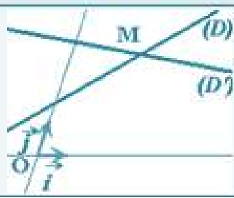
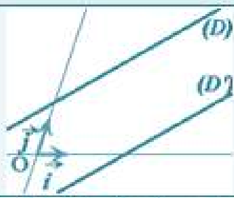
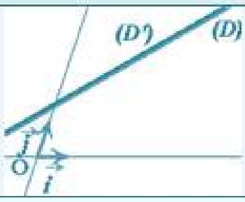
1) مركبتا الشّعاع $\vec{AB}$ هما $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

2) إحداثيا M منتصف [AB] هما $\begin{pmatrix} \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{pmatrix}$

6. عدد حلول جملة معادلتين خطيتين لمجهولين

جملة المعادلتين $\begin{cases} a\,x + b\,y = c \\ a'\,x + b'\,y = c' \end{cases}$ إمّا لها حلا وحيدا ، وإمّا لا حل لها، وإمّا لانهاية لها من الحلول، وذلك حسب الوضع النّسبي للمستقيمين (D) و(D').

- إذا كان $a\,b' - b\,a' \neq 0$ فإنّ الجملة (S) تقبل حلا وحيدا.
- إذا كان $a\,b' - b\,a' = 0$ فالجملة (S) إمّا لا حل لها، وإمّا لانهاية لها من الحلول.

$a\,b' - b\,a' \neq 0$	$ab' - ba' = 0$	
		
(D) ، (D') متقاطعان في M الجملة لها حل وحيد $(x_M;y_M)$	لا توجد نقطة مشتركة بين (D) ، (D') والجملة ليس لها حل	(D') = (D) والجملة لها لانهاية من الحلول

QCM

<u>الأسئلة</u>: ضع علامة $(\times)$ أمام الجواب الصحيح مع التعليل .

1. النقطة M منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ معناه :

أ) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ ☐ ب) $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ ☐ ج) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$ ☐

التعليل:..

....

2. شعاع توجيه المستقيم (D) ذو المعادلة $3x-5y=7$ هو:

أ) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ ☐ ب) $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ ☐ ج) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$ ☐

التعليل:..

3. قيمة العدد الحقيقي x حتى تكون النقط $A(x,3)$ ، $B(4,5)$ و $C(0,-1)$ في استقامية هي:

أ) $x=0$ ☐ ب) $x=\frac{-3}{2}$ ☐ ج) $x=\frac{8}{3}$ ☐

التعليل:..

....

4. المستقيمان (D_1) ، (D_2) معادلتيهما على الترتيب $y=\frac{2}{3}x-1$ و $y=\frac{2}{3}x+1$ هما مستقيمان :

أ) منطبقان ☐ ب) متوازيان تماما ☐ ج) غير متوازيان ☐

التعليل:..

....

5. جملة المعادلتين ذات المجهولين الحقيقيين x, y

$$(S):\begin{cases}2x-y=5\\x-2y=1\end{cases}$$

أ) تقبل حل وحيد هو الثنائية $(3,1)$ ☐ ب) تقبل عدد غير منته من الحلول ☐ ج) ليس لها حل ☐

التعليل:..

....

حل QCM :

1. النقطة M منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ معناه :

أ) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

التعليل: $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$

$\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

2. شعاع توجيه المستقيم (D) ذو المعادلة $3x-5y=7$ هو:

أب) $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$

التعليل: **لأن معامل توجيه هذا المستقيم هو:** $\frac{3}{5}$

3. قيمة العدد الحقيقي x حتى تكون النقط $A(x,3)$ ، $B(4,5)$ و $C(0,-1)$ في استقامية هي:

ج) $x=\frac{8}{3}$

التعليل:: لاثبات أن النقط A,B,C في استقامية علينا اثبات أن النقطة A تنمي الى المستقيم (BC).

معادلة المستقيم (BC) تكتب: $(BC): y=\frac{3}{2}x-1$.

4. المستقيمان (D_1) ، (D_2) معادلتيهما على الترتيب $y=\frac{2}{3}x-1$ و $y=\frac{2}{3}x+1$ هما مستقيمان :

ب) متوازيان تماما

التعليل لأن معامل توجيههما متساوي

5. جملة المعادلتين ذات المجهولين الحقيقيين y,x $(S):\begin{cases}2x-y=5\\x-2y=1\end{cases}$

أ) تقبل حل وحيد هو الثنائية $(3,1)$

التعليل: **لأن** $2(-2)-1(-1)\neq 0$ **. و بالتالي المستقيمان:** $\begin{cases}(\Delta): 2x-y=5\\(\Delta'): x-2y=1\end{cases}$ **يتقاطعان في نقطة وحيدة** $(3,1)$.

تمارين محلولة

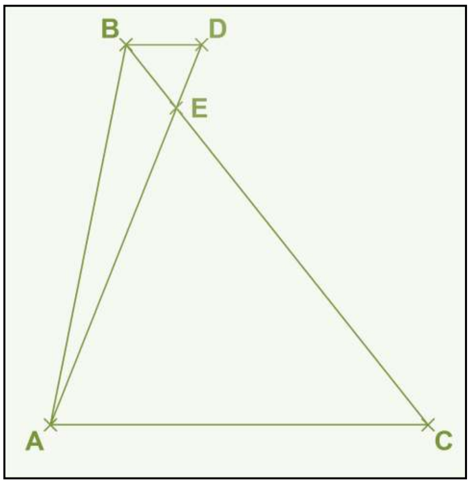
تمرين 1:

ليكن ABC مثلث من المستوي، لتكن النقطة D حيث $5\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$ و لتكن النقطة E حيث $6\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}$

أثبت أن النقط A ، E ، D على استقامة واحدة .

حل مقترح:

طريقة: **لإثبات أن النقط A ، E ، D على استقامة واحدة نثبت أن $\overrightarrow{EA}=k\overrightarrow{DE}$ (k عدد حقيقي) .**



بتطبيق علاقة شال $\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CA}$.

نعلم أن $5\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$ ومنه $5\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{CA}$. ونعلم أن $6\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}$.

لدينا $\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EC}=6\overrightarrow{BE}$ (الرسم المقابل) ومنه $\overrightarrow{EC}=5\overrightarrow{BE}$.

$\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CA}$ ومنه $\overrightarrow{EA}=5\overrightarrow{BE}+5\overrightarrow{DB}$ أي

$\overrightarrow{EA}=5\overrightarrow{DB}+5\overrightarrow{BE}$ ومنه $\overrightarrow{EA}=5\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BE}\right)$

أي $\overrightarrow{EA}=5\overrightarrow{DE}$

إذن النقط A ، E ، D في استقامية .

تمرين 2:

A ، B ، C ، D أربع نقط من المستوي.

بيّن أنّ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$

وكذلك $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$

حل مقترح:

استعمال خواص مجموع شعاعين (علاقة شال)

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}$

بالجمع طرف إلي طرف نجد

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}$

و بما أنّ $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CC}=\vec{0}$ فإنّ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$

كذلك:

$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$

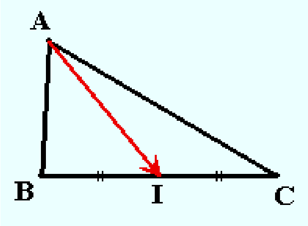
$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$ (لأنّ $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DD}=\vec{0}$)

تمرين 3:

A ، B ، C ثلاث نقط ، I منتصف $[BC]$.

1) بيّن أنّه من أجل كلّ نقطة O فإنّ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

2) بيّن أنّ: $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$



حل مقترح:

1) لدينا حسب علاقة شال $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$ ومنه

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = (-\overrightarrow{OA}) + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

2) لدينا حسب علاقة شال:

$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}$

$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CI}$

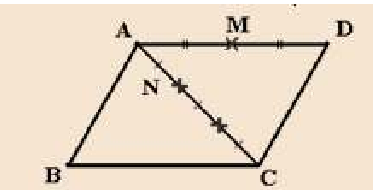
وبالجمع طرف إلي طرف نجد:

$2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + (\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CI})$

وبما أنّ $\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{0}$ لأنّ I منتصف $[BC]$ فإنّ

$2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

تمرين 4:



$ABCD$ متوازي أضلاع ، و M منتصف $[AD]$ ، و نقطة N

بحيث $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

بيّن أنّ النقط B ، N ، M في استقامية.

حل مقترح:

لدينا حسب علاقة شال:

$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ (لأنّ $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$)

$= \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$

$= \overrightarrow{BA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

ومنه $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ ... (1)

وكذلك: $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

ومنه $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ (لأنّ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$)

من (1) نجد $\frac{3}{2}\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

وبالتالي فان $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BN}$ والشعاعان $\overrightarrow{BM}$ ، $\overrightarrow{BN}$ مرتبطان خطيا.

ونستنتج أن النّقط B ، N ، M في استقامية.

تمرين 5:

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ معلم للمستوي ، $A(-2;1)$ ، $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}$.

أ) احسب إحداثيي النّقطة A' صورة النّقطة A بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}$.

ب) احسب مركبتي الشعاع $\overrightarrow{OM}$ حيث $\overrightarrow{OM} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$.

حل مقترح:

أ) نفرض $A'(x\,;y)$ ، فيكون $\overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix} x-(-2) \\ y-1 \end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \end{pmatrix}$

من $\overrightarrow{AA'} = \vec{u}$ نجد $\begin{cases} x+2=1 \\ y-1=3 \end{cases}$ ومنه $x=-1$ و $y=4$

وبالتّالي $A'(-1\,;4)$

ب) لدينا: $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j}$ و $\vec{v} = -4\vec{i}$

ومنه $\overrightarrow{OM} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$

$\overrightarrow{OM} = 2(\vec{i} + 3\vec{j}) - 3(-4\vec{i}) = 2\vec{i} + 6\vec{j} + 12\vec{i}$

ومنه $\overrightarrow{OM} = 14\vec{i} + 6\vec{j}$

وبالتّالي $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} 14 \\ 6 \end{pmatrix}$

تمرين 6:

$(O\,;\vec{i},\vec{j})$ معلما للمستوي . A ، B نقطتان حيث $A(-3\,;1)$ ،
$B(4\,;2)$
جد معادلة للمستقيم (AB) .

حل مقترح:

بما أنّ النّقطتين A ، B ليس لهما نفس الفاصلة فإنّ للمستقيم (AB) معادلة من الشّكل $y=ax+b$.

إحداثيا النّقطة A تحقّق المعادلة $y=ax+b$ ومنه
$1 = a(-3) + b$ ومنه $b = 3a + 1$

إحداثيا النّقطة B تحقّق المعادلة $y=ax+b$ ومنه
$2 = a(4) + b$ ومنه $b = -4a + 2$

وبالتّالي: $3a + 1 = -4a + 2$ ومنه $7a = 1$ أي $a = \frac{1}{7}$

ومنه $b = 3 \times \frac{1}{7} + 1 = \frac{10}{7}$

والنتيجة: المعادلة التّي نبحث عنها هي: $y = \frac{1}{7}x + \frac{10}{7}$

- يمكن إيجاد معادلة للمستقيم (AB) باستعمال الارتباط الخطي للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AM}$ حيث النّقطة $M(x\,;y)$ تنتمي إلى (AB).

احسب مركبتي $\overrightarrow{AB}$ ومركبتي $\overrightarrow{AM}$ ، ثمّ طبّق شرط الارتباط الخطي للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AM}$

تمرين 7:

$(O\,;\vec{i},\vec{j})$ معلما للمستوي . (D) مستقيم معادلته $y = -2x + 3$
و A نقطة حيث $A(2\,;3)$.
جد معادلة للمستقيم (D') الذي يشمل النّقطة A ويوازي المستقيم (D)

حل مقترح:

بما أنّ المستقيمين (D) و (D') متوازيان فإنّ لهما نفس معامل التوجيه $a = -2$

للمستقيم (D') معادلة من الشّكل $y = -2x + b$

إحداثيا النّقطة A تحقّق المعادلة $y = -2x + b$ ومنه

$3 = -2(2) + b$ ومنه $b = 7$

والنتيجة: معادلة (D') هي: $y = -2x + 7$

تمرين 8:

نعتبر جمل المعادلتين الآتية: عيّن عدد حلول كلّ جملة ، وجدْها.

$$(S_1)\ \begin{cases} 2x + y = 8 \\ x - 3y = -3 \end{cases} \qquad (S_2)\ \begin{cases} -x + 2y = 6 \\ 3x - 6y = 12 \end{cases} \qquad (S_3)\ \begin{cases} -x + 2y = 6 \\ 3x - 6y = -18 \end{cases}$$

حل مقترح:

1) بالنّسبة إلى الجملة (S_1)

نكتب المعادلة المختزلة لكل من (D) و (D'):

لدينا $2x + y = 8$ تكافئ $y = -2x + 8$

و $x - 3y = -3$ تكافئ $y = \frac{1}{3}x + 1$

بما أنّ $-2 \neq \frac{1}{3}$ فإنّ المستقيمين (D) و (D') متقاطعان ، ومنه الجملة (S_1) تقبل حلا وحيدا

إذا $(x\,;y)$ حل للجملة (S_1) فإنّ $x = 3y - 3$ (من المعادلة (2))

وبالتّعويض في المعادلة (1) نجد $2(3y-3) + y = 8$ وهي تكافئ $y=2$.

وبالتّعويض في المعادلة (2) نجد $x = 3$.

وبما أنّ الجملة (S_1) تقبل حلا وحيدا فهو $(3\,;2)$

2) بالنّسبة إلى الجملة (S_2)

نحسب المقدار $ab' - ba'$ فنجد $ab'-ba'=(-1)(-6)-2\times3=0$ وبالتّالي فالجملة إمّا لها لانهاية من الحلول وإمّا ليس لها حل.

الجملة (S_2) تكافئ $\begin{cases} -x + 2y = 6 \\ -x + 2y = -4 \end{cases}$ بقسمة طرفي المعادلة (2) على -3

لا توجد قيم لِـ $(x\,;y)$ تجعل $-x + 2y$ يساوي 6 و-4 في أن واحد

ومنه الجملة (S_2) لا حل لها.

3) بالنّسبة إلى الجملة (S_3)

نحسب المقدار $a b' - b a'$ فنجد $ab'-ba'=(-1)(-6)-2\times 3=0$ وبالتّالي فالجملة إمّا لها لانهاية من الحلول وإمّا لا حل لها.

الجملة (S_2) تكافئ $\begin{cases}-x+2y=6\\ -x+2y=6\end{cases}$ بقسمة طرفي المعادلة (2) على -3

كلّ نقطة من المستقيم (D) الذي معادلته $y=\frac{1}{2}x+3$ إحداثياها تحقّق الجملة (S_3) .

نستنتج أنّ الجملة (S_3) لها لا نهاية من الحلول من الشّكل:

$(x,\frac{1}{2}x+3)$ و x عدد حقيقي.

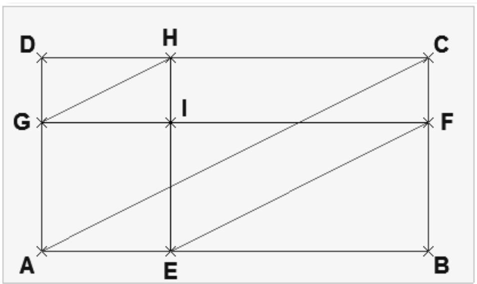
تمرين 9:

ليكن $ABCD$ مستطيلا من المستوي، α عدد حقيقي غير معدوم ويختلف عن 1 ، E النقطة حيث $\overrightarrow{AE}=\alpha\overrightarrow{AB}$. لتكن F النقطة حيث $\overrightarrow{BF}=(1-\alpha)\overrightarrow{BC}$. المستقيم الموازي للمستقيم (AD) و يشمل E يقطع المستقيم (CD) في H. المستقيم الموازي للمستقيم (AB) و يشمل F يقطع المستقيم (AD) في G. المستقيمان (EH) و (FG) يتقاطعان في النقطة I. أثبت أن المستقيمات (AC) ، (EF) و (GH) متوازية .

حل مقترح:

طريقة: لإثبات أن المستقيمات (AC) ، (EF) و (GH) متوازية نثبت أن الأشعة $\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{EF}$ و $\overrightarrow{GH}$ مرتبطة خطيا مثنى مثنى .

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EI}+\overrightarrow{EB}$ (محصلة شعاعين)



$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EI}+\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}$$
$$\overrightarrow{EF}=(1-\alpha)\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}-\alpha\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{EF}=(1-\alpha)\overrightarrow{BC}+(1-\alpha)\overrightarrow{AB}$$

$\overrightarrow{EF}=(1-\alpha)\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\right)$ و منه $\overrightarrow{EF}=(1-\alpha)\overrightarrow{AC}$

إذن (AC) و (EF) متوازيين . $\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GI}$ (محصلة شعاعين) ومنه $\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{BC}-(1-\alpha)\overrightarrow{BC}+\alpha\overrightarrow{AB}$ ومنه $\overrightarrow{GH}=\alpha\overrightarrow{BC}+\alpha\overrightarrow{AB}$ أي $\overrightarrow{GH}=\alpha\overrightarrow{AC}$

ومنه (EF) و (GH) متوازيين . و بالتالي المستقيمات (AC) ، (EF) و (GH) متوازية .

تمارين مقترحة

1:

C,B,A ثلاثة نقط ليست في استقامة واحدة. نضع $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ أنشئ النقط المعرفة بالعلاقة الشعاعية التالية:

$\overrightarrow{AE}=\vec{u}+\vec{v}$

$\overrightarrow{AF}=\vec{u}-\vec{v}$

$\overrightarrow{AH}=-\vec{u}+\vec{v}$

$\overrightarrow{AG}=-\vec{u}-\vec{v}$

:2

1.برهن أنه من أجل من النقط B,A,O لدينا: $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$

2. C,B,A ثلاثة نقط . I منتصف $[BC]$.

برهن أن: $2\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

: 3

$ABCD$ معين. لتكن النقط N,M,O,P منتصفات الأضلاع:

$[AB],[BC],[CD],[DA]$ على الترتيب.

-أثبت أن: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{NO}+\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$

: 4

ليكن ABC مثلث .

أ-أنشئ النقطة M المعرفة بالعلاقة : $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

ب-برهن أن $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

ج-لتكن N نقطة من المستوي حيث $\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CN}=\vec{0}$

د-برهن أن $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$ ثم أنشئ النقطة N

ه-اثبت أن النقط $N;M;A$ في استقامية .

5 :

المستوي منسوب الى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

نعتبر النقط $A(-5,\frac{1}{2}),B(\alpha,\frac{3}{2}),C(3,2)$ حيث α عدد حقيقي

1.عين قيمة α حتى تكون النقطة B منتصف $[AC]$.

2.عين α حتى يكون الشعاع $\overrightarrow{AB}$ موازيا للشعاع $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$.

3.عين احداثيي النقطة D بحيث: $2\overrightarrow{DA}+3\overrightarrow{DC}=\vec{0}$.

6 :

المستوي منسوب الى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، نعتبر النقط $A(2,-3),B(-1,\frac{3}{2}),C(m,2)$

1- أكتب معادلة المستقيم (AC) .

2- عين قيم m بحيث : $B\in(AC)$.

3- عين قيم m بحيث يكون (AC) مستقيم موازي لحامل محور التراتيب.

4- عين قيم m بحيث يكون معامل توجيه المستقيم (AC) يساوي 1.

5- عين معادلة المستقيم (Δ) الذي يشمل I منتصف $[AB]$ و يوازي الشعاع $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$.

7 :

المستوي منسوب الى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، نعتبر النقط A و B و C حيث :

$\overrightarrow{AB}=-4\vec{i}-2\vec{j}$ ، $\overrightarrow{OA}=2\vec{i}+\vec{j}$ ، $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix}$.

1- بين أن $B(-2,-1)$ و $C(-2,5)$.

2- برهن أن النقط O,A,B على استقامية .

3- عين احداثيي النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع ثم عين احداثيي مركزه I

4- ليكن (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطتين A و C

أ- عين معامل توجيه المستقيم (Δ) ثم أكتب معادلته.

ب- عين احداثيي M نقطة تقاطع (Δ) مع حامل محور الفواصل.

8:

المستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$، نعتبر النقط $\overrightarrow{OB}=2\vec{i}+6\vec{j}\,,\,\overrightarrow{OA}=-\vec{i}-\vec{j}$ و $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$.

1)- عين احداثيا النقطتين B و C ثم علم النقط في المستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

2)- أ- أحسب الأطوال AB ،AC ، BC.

ب- استنتج نوع المثلث ABC.

3)- أحسب احداثيا النقطة N منتصف [BC].

4)- عين النقطة M المعرفة بالشكل : $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{OC}$

9:

المستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

1)- تحقق أن (S) تقبل حلا وحيدا في مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

2)- حل في مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ جملة المعادلتين التالية : $(S)\begin{cases}x-y=-3\\-3x+y=1\end{cases}$

3)- أكتب معادلة المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) حيث:

*المستقيم (Δ_1) يشمل النقطتين $B(2,5), A(-2,1)$

*المستقيم (Δ_2) يشمل النقطة $C(-\frac{1}{3};0)$ و يوازي الشعاع $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

4)- أرسم بعناية المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) في المعلم مع تعيين نقطة التقاطع .

10:

المستوي منسوب الى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، نعتبر النقط $C(3,2)$ ، $B(\alpha,-1)$ ، $A(2,3)$ حيث α عدد حقيقي .

1-عين α حتى تكون النقط O,A,B في استقامية.

2- نعتبر الآن أن $\alpha=2$:

- عين احداثيتي النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع.

3- نعتبر النقطة $E(\frac{5}{2},\frac{5}{2})$ من هذا المستوي .

- بين أن النقطة E مركز متوازي الأضلاع $ABCD$.

4- أ- أكتب معادلة المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A و يوازي المستقيم (BC).

ب-عين احداثيي M نقطة تقاطع (Δ) مع حامل محور الفواصل.

ج- ليكن (Δ') مستقيم معادلته : $y=x+1$ ، أوجد نقطة تقاطع (Δ) و (Δ').

11:

المستوي منسوب الى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

نعتبر مجموعة النقط (D_m) المعرفة بالمعادلة: $m(m+2)x+(m^2-4)y-m+10=0$

حيث m عدد حقيقي.

1.أوجد E مجموعة قيم m التي من أجلها تكون المجموعة (D_m) مستقيما.

2.أكتب معادلة المستقيم (D_m) الذي يوازي $(\Delta): y=x$.

3.عين المستقيمات (D_m) التي تقطع المحور $(x'x)$ في النقطة ذات الفاصلة 3

12:

المستوي منسوب الى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

نعتبر النقط التالية : $C(1;-4), B(3;-1), A(2;1)$.

1.أ-عين احداثيا الشعاعين $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}$.

ب-هل النقط C,B,A في استقامية ؟.

2.عين احداثيا منتصف $[AC]$.

3.أ-عين معادلة المستقيم (Δ) الذي يشمل C و $\overrightarrow{AB}$ شعاع توجيهه.

ب-هل النقطة $D(0;1)$ تنتمي الى المستقيم (Δ) ؟.

4.عين معادلة المستقيم (Δ_1) الذي يشمل A و يوازي محور التراتيب.

5. عين معادلة المستقيم (Δ_2) الذي يشمل A و يوازي محور الفواصل.

6.عين معامل توجيه المستقيم الذي معادلته: $5x-3y-2=0$.

7.نعتبر النقطة $E(2x;x)$ حيث x عدد حقيقي.عين قيمة التي من أجلها:

أ-تكون النقط E,B,A على استقامة واحدة.

ب-يكون المثلث EBA متساوي الساقين $[EA]$ و $[EB]$.

8.عين احداثيتي النقطة M بحيث: $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{MB}$

9. عين احداثيتي النقطة F بحيث يكون الرباعي $ABCF$ متوازي أضلاع.

10.هل المثلث ABC قائم؟علل.

13:

1.حل جملة المعادلتين (S) حيث: $(S)\begin{cases}2x-y=-1\\3x+y=21\end{cases}$

2.استنتج حلول الجملة (S') حيث: $(S')\begin{cases}2z^2-t^2=-1\\3z^2+t^2=21\end{cases}$ (ارشاد يمكن وضع: $z^2=x$ و $t^2=y$).

محور

الدوال المرجعية

ملخص الدرس

1.الدالة التآلفية:

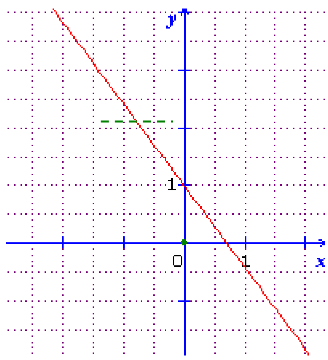
تعريف

نسمّي **دالة تآلفية** كلّ دالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل $f(x)=ax+b$ حيث a و b عددان حقيقيان مفروضان.

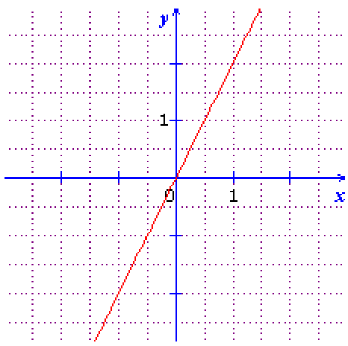
أمثلة:

- الدالة $f:x\mapsto 2x-3$ هي دالة تآلفية حيث $a=2$ هو المعامل الذي يُضرب فيه x و $b=-3$ هو صورة 0 بالدالة f ، بمعنى $f(0)=-3$.
- في حالة $b=0$ ، الدالة $x\mapsto ax$ هي دالة **خطية** ذات معامل التناسبية a .
  $g:x\mapsto \frac{1}{2}x$ دالة خطية حيث $a=\frac{1}{2}$.
- في حالة $a=0$ ، $x\mapsto b$ هي دالة ثابتة.

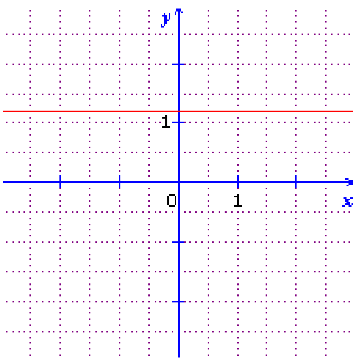
1. الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل $f(x)=-\sqrt{2}x+1$ تمثّل بالمستقيم $(\mathcal{D})$ الذي معادلته $y=-\sqrt{2}x+1$. $(\mathcal{D})$ يمر من النقطة $B(0\,;1)$ ومعامل توجيهه $a=-\sqrt{2}$



2. في حالة دالة خطية $x\mapsto ax$ ، المستقيم $(\mathcal{D})$ الذي معادلته يمرّ من مبدأ المعلم



3. في حالة دالة ثابتة $x\mapsto b$ المستقيم $(\mathcal{D})$ الذي معادلته $y=b$ يوازي محور الفواصل.



اتجاه تغيّر دالة تآلفية

مبرهنة

f دالة تآلفية معرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل $f(x)=ax+b$.

- إذا كان $a<0$ ، فإنّ f متناقصة تماما.
- إذا كان $a>0$ فإنّ f متزايدة تماما.

2.الدّالة "مربّع":

تعريف

الدّالة "مربّع" هي الدّالة التّي ترفق بكل عدد حقيقي x مربّعه x^2 .

إذا رمزنا إلى الدّالة مربع بالرّمز f ، نكتب $f(x)=x^2$ أو $x \xrightarrow{f} x^2$.

مثال:

3 و 3 − لهما نفس الصّورة بالدّالة مربع: $3^2 = (-3)^2 = 9$

اتجاه التغيّر

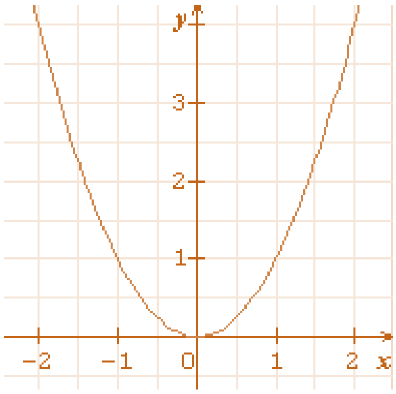
مبرهنة 1

الدّالة مربع متزايدة تماما على $[0,+\infty[$ ، ومتناقصة تماما على $]-\infty,0]$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

التمثيل البياني

عندما نمثل في معلم $(O;I,J)$ النّقط ذات الإحداثيات $(x;x^2)$ نحصل على المنحنى الممثل للدّالة "مربّع".



(C) هو منحنى الدّالة مربّع

معادلة (C) هي : $y = x^2$

يسمّى (C) قطعا مكافئا ذروته

خاصية:

من أجل كلّ عدد حقيقي x، لدينا $(-x)$ عدد حقيقي و $(-x)^2 = x^2$ أي $f(-x)=f(x)$.

نستنتج أنّ الدّالة مربّع زوجية.

ملاحظة

في معلم متعامد يكون بيان الدّالة مربّع متناظرا بالنّسبة إلى محور التّراتيب.

3.الدّالة "مقلوب" :

تعريف

الدّالة المعرفة على المجموعة $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ والتّي ترفق بكلّ عدد حقيقي x غير معدوم مقلوبه $\frac{1}{x}$ هي الدّالة "مقلوب".

مثال: $f(2)=\frac{1}{2}$ و $f\left(-\frac{2}{5}\right)=-\frac{5}{2}$.

- **إتجاه التغيّر**

الدّالة "مقلوب" متناقصة تماماعلى كلّ من المجالين $]0,+\infty[$ و $]-\infty,0[$

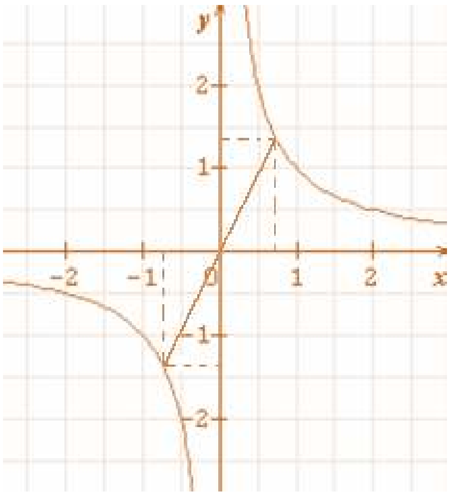
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$0 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 0$

الخط المضاعف في الجدول يعني
أنّ الدّالة "مقلوب" غير معرّفة عند **0**

تذكير : إذا كان $0<x_1<x_2$ فإن $0<\frac{1}{x_2}<\frac{1}{x_1}$

وإذا كان $x_1<x_2<0$ فإن $\frac{1}{x_2}<\frac{1}{x_1}$ (حسب قواعد ترتيب الاعداد)

- **التمثيل البياني**



بما أنّ 0 ليس له صورة بالدّالة مقلوب ، فإنّ منحنيها لا يقطع محور التّراتيب .

يسمّى المنحنى الممثل للدّالة "مقلوب" قطعا زائدا.

خاصية: من أجل كلّ عدد حقيقي x غير معدوم،لدينا $(-x)$ عدد حقيقي غير معدوم

و $\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}$ أي $f(-x)=-f(x)$.

نستنتج أنّ الدّالة مقلوب فردية.

ملاحظة في كلّ معلم يكون منحنى الدّالة مقلوب متناظرا بالنّسبة إلى مبدأ هذا المعلم.

4.الدّالة "الجذر التربيعي" :

تعريف

الدّالة المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ هي الدّالة "الجذر التّربيعي" والتّي ترفق بكلّ عدد حقيقي x جذره التربيعي $\sqrt{x}$.

إذا رمزنا إلى الدّالة "الجذر التّربيعي" بالرّمز f ، نكتب $f(x)=\sqrt{x}$ أو $x \xrightarrow{f} \sqrt{x}$.

مثال: $f(0{,}49)=\sqrt{0{,}49}=0{,}7$ و $f\left(\frac{7}{9}\right)=\sqrt{\frac{7}{9}}=\frac{\sqrt{7}}{3}$

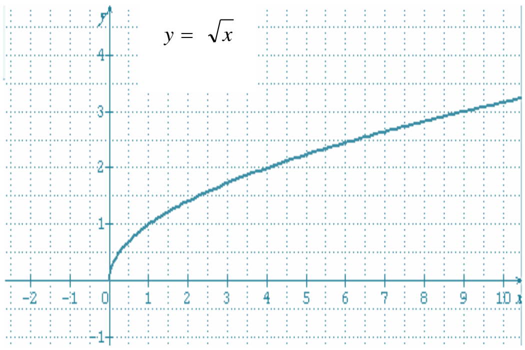
- **اتجاه التغيّر**

الدّالة "الجذر التّربيعي" متزايدة على المجال $[0,+\infty[$.

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\sqrt{x}$	$0 \nearrow +\infty$

- **التمثيل البياني**

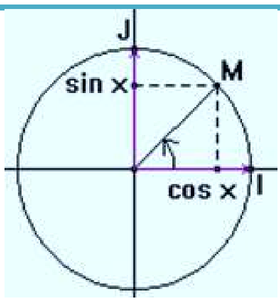
بما أنّ الدّالة "الجذر التّربيعي" معرّفة فقط على المجال $]0;+\infty[$ فإنّ منحنيها يقع في الربع الأول من المعلم كما هو موضّح في الشّكل المقابل



5. الدّالة "جيب" ، الدّالة "جيب التّمام"

تعريف

x عدد حقيقي. M النقطة المرفقة بالعدد x من الدائرة المثلثية .



في المعلم $(O\,;I\,,J)$:

- نسمّي جيب تمام العدد الحقيقي x، فاصلة النقطة M ونرمز إليه بالرّمز $\cos x$. الدالة $\cos$ هي الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي x العدد $\cos x$.
- نسمّي جيب العدد الحقيقي x، ترتيب النقطة M ونرمز إليه بالرّمز $\sin x$. الدالة $\sin$ هي الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي x العدد $\sin x$.

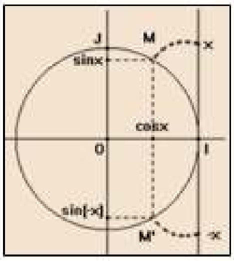
أمثلة

صورة العدد $\frac{\pi}{2}$ هي النقطة $J(0,1)$ إذن $\cos\frac{\pi}{2}=0$ و $\sin\frac{\pi}{2}=1$.

للعددين $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ نفس الصورة $J'(0,-1)$ إذن $\cos\frac{3\pi}{2}=\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right)=0$ و $\sin\frac{3\pi}{2}=\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)=-1$

صورة العدد π هي النقطة $I'(-1,0)$ إذن $\cos\pi=-1$ و $\sin\pi=0$.

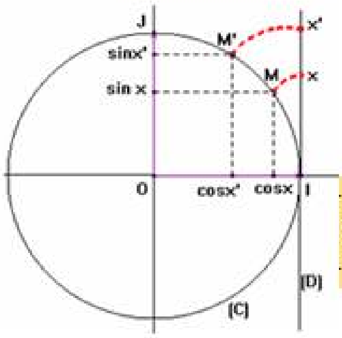
مبرهنة:



من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :

- $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ و $-1\le \sin x\le 1$ و $-1\le \cos x\le 1$
- $\cos(-x)=\cos x$ و $\sin(-x)=-\sin x$

أي أنّ الدّالة جيب تمام زوجية و الدالة جيب فردية.

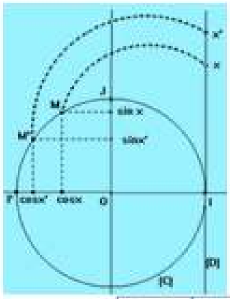


اتجاه تغيّر الدّالتين "جيب تمام" و "جيب" على المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

خاصية 1

- الدالة $\cos x$ متناقصة تماما على المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ • الدالة $\sin x$ متزايدة تماما على المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

خاصية2



- الدالة $\cos$ متناقصة تمام على المجال $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ • الدالة $\sin$ متناقصة تماماعلى المجال $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

- جدول تغيّرات الدّالتين "جيب تمام" و "جيب" على المجال $[0\,;\,\pi]$

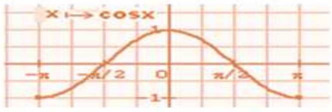
نستنتج من الخاص 1 و من الخاصة 2 :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin$	0	↗	1	↘	0

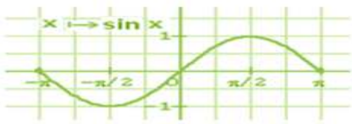
x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos$	1	↘	0	↘	-1

التمثيل البياني

- ننشئ التمثيل البياني للدالة $\cos$ على المجال $[0,\pi]$ انطلاقا من جدول تغيراتها.
ندعم هذا الرسم على $[-\pi,0]$ بالتناظر بالنسبة للمبدأ لأن الدالة $\cos$ زوجية .

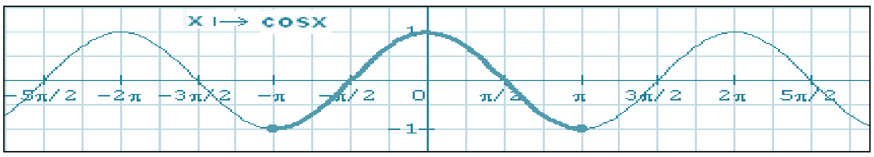


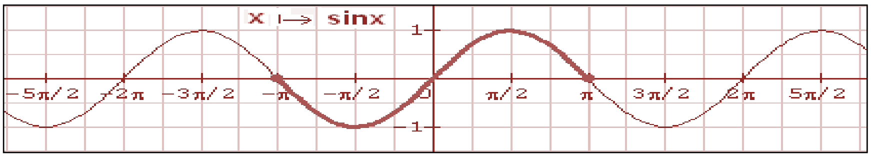
- ننشئ التمثيل البياني للدالة $\sin$ على المجال $[0,\pi]$ انطلاقا من جدول تغيراتها.
ندعم هذا الرسم على $[-\pi,0]$ بالتناظر بالنسبة للمبدأ لأن الدالة $\sin$ فردية .



ملاحظة:

بيان الدالة "جيب تمام" و بيان الدالة "جيب" على $\mathbb{R}$ هما

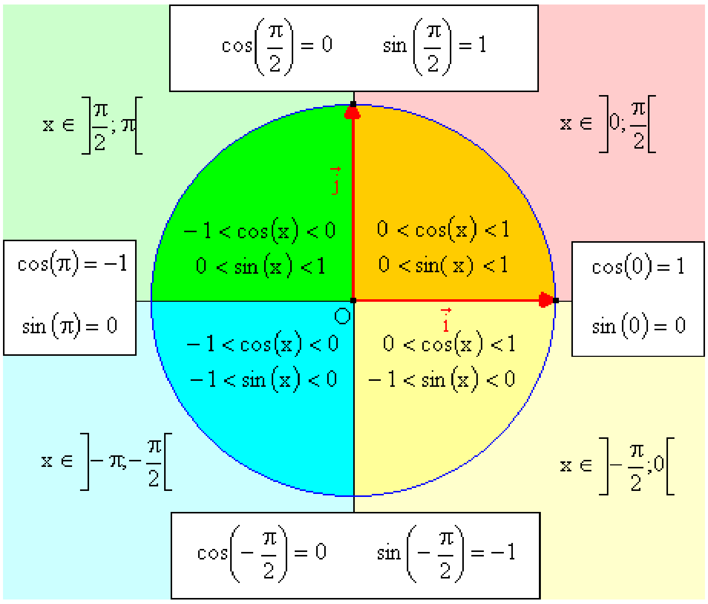


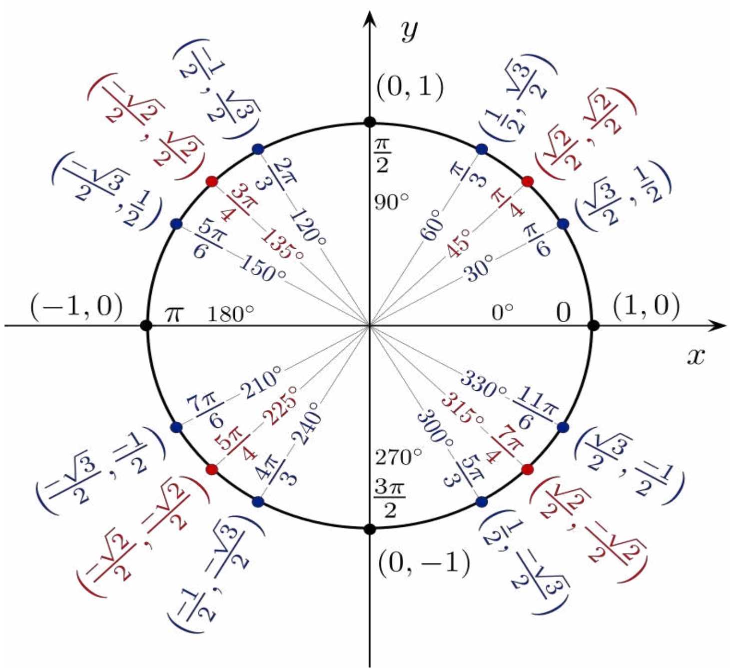


لاحظ انه يمكن استنتاج أي جزء من بيان الدالة "جيب تمام" (أو الدالة "جيب") من الجزء الملون بالأحمر وذلك بانجاز " دوريا" مثيلات له لأن من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $\cos(x+2\pi)=\cos x$ و($\sin(x+2\pi)=\sin x$) نقول إنّ الدالة "جيب تمام" (الدالة "جيب" أيضا) دورية ودورها 2π.

جدول جيب وجيب تمام القيم الشهيرة:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0



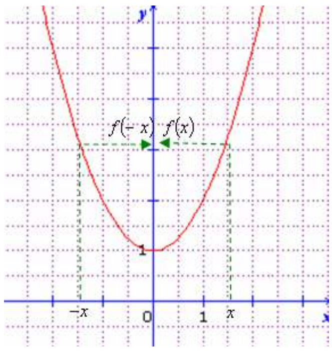


شفعية دالة

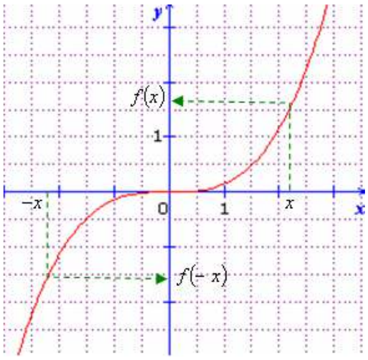
تعريف

D جزء من $\mathbb{R}$، f دالة معرّفة على D.

- نقول إنّ f دالة **زوجية** إذا كان D متناظرا بالنسبة إلى 0 وكان لكلّ x من D، $f(-x)=f(x)$
- نقول إنّ f دالة **فردية** إذا كان D متناظرا بالنسبة إلى 0 وكان لكلّ x من D، $f(-x)=-f(x)$.



بيان الدالة الزوجية في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد يكون متناظرا بالنسبة إلى محور التراتيب.



بيان الدالة فردية في المستوي المنسوب إلى معلم يكون متناظرا بالنسبة إلى مبدأ المعلم.

أمثلة:

1. الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x)=2x^2+1$ دالة زوجية، لأنّ :

مجموعة تعريفها $\mathbb{R}$ متناظرة بالنسبة إلى 0 (بمعنى، لكلّ x من R، $-x\in R$)

ولكلّ x من $\mathbb{R}$، $f(-x)=2(-x)^2+1=2x^2+1=f(x)$.

2. الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة $g(x)=-\dfrac{2}{x}$ فردية، لأنّ:

مجموعة تعريفها $\mathbb{R}^*$ متناظرة بالنسبة إلى 0

ولكلّ x من $\mathbb{R}^*$، $g(-x)=-\dfrac{2}{(-x)}=-\left(-\dfrac{2}{x}\right)=-g(x)$.

3. الدالة h المعرفة على $[0\,;+\infty[$ بالعبارة $f(x)=2x^2+1$ ليست زوجية ولا فردية، لأنّ المجال $[0\,;+\infty[$ غير متناظر بالنسبة إلى 0.

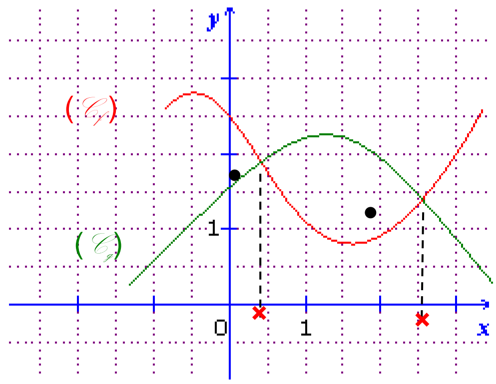
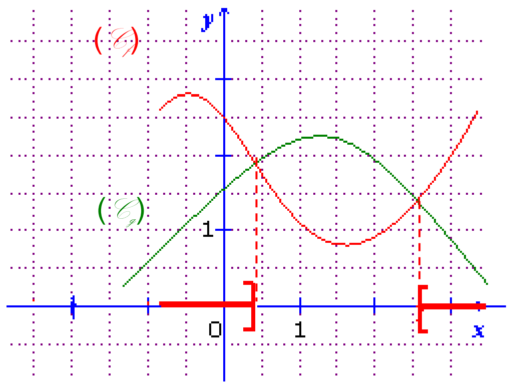
4. الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $u(x)=x+3$ ليست زوجية ولا فردية، لأنّه بالرغم من أنّ مجموعة تعريفها $\mathbb{R}$ متناظرة بالنسبة إلى 0، لكن $u(-x)=-x+3$ لا يساوي $u(x)$ ولا يساوي $-u(x)$.

ملاحظة

للبرهان على أنّ f ليست دالة زوجية (أو دالة فردية)، يكفي إيجاد عنصر a من مجموعة تعريفها حيث $f(-a)\neq f(a)$ (أو $f(-a)\neq -f(a)$). ويعتبر التمثيل البياني للدّالة وسيلة للتحقّق من شفعية الدالة.

حلّ معادلات ومتراجحات بيانيا

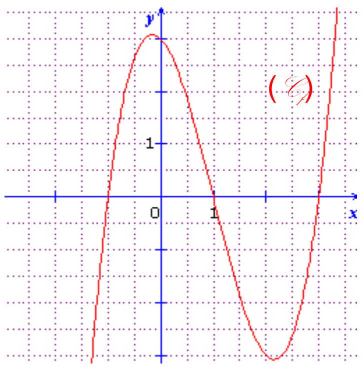
f و g دالتان معرفتان على مجموعة D، ($\mathscr{C}_f$) و ($\mathscr{C}_g$) منحنياهما في معلم للمستوي.

• حلّ المعادلة $f(x)=g(x)$ بيانيا يعني: تعيين فواصل النقط المشتركة للمنحنيين (C_f) و (C_g).	• حلّ المتراجحة $f(x)>g(x)$ بيانيا يعني: تعيين فواصل نقط المنحنى (C_f) الواقعة فوق المنحنى (C_g).
	

أمثلة

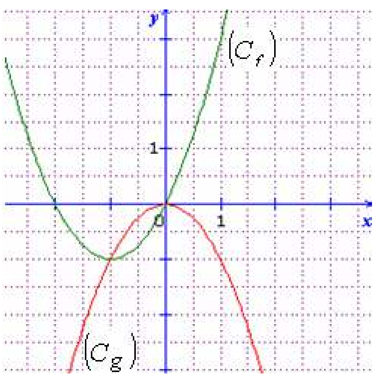
1. نعرّف الدالة f بالمنحني ($\mathscr{C}_f$) المقابل.
حلّ المعادلة $f(x)=0$ بيانيا يؤول إلى تعيين فواصل نقط تقاطع المنحني $\mathscr{C}_f$ مع محور الفواصل.
المنحني ($\mathscr{C}_f$) يقطع ثلاث مرات محور الفواصل.

حلول المعادلة $f(x)=0$ هي فواصل هذه النقط:
$S=\{-1\,;1\,;3\}$



2. f ، g دالتان معرفتان بالمنحنيين ($\mathscr{C}_f$) و ($\mathscr{C}_g$) (الشكل المقابل).
حلّ المتراجحة $f(x)\geq g(x)$ بيانيا يؤول إلى تعيين فواصل نقط المنحنى ($\mathscr{C}_f$) الواقعة فوق المنحنى ($\mathscr{C}_g$) وفواصل النقط المشتركة.

$S=\left]-\infty;-1\right]\cup\left[0;+\infty\right[$



خاصية

جداء و حاصل قسمة عددين غير معدومين ومن نفس الإشارة هو عدد موجب تمام.

جداء و حاصل قسمة عددين غير معدومين ومن إشارتين متعاكستين هو عدد سالب تمام.

مثال

لندرس إشارة $f(x)=(2x+3)(1-x)$ على $\mathbb{R}$.

إنّ $2x+3$ هي عبارة دالة تآلفية، تمثيلها البياني مستقيم معادلته $y=2x+3$ ومعامل التوجيه له 2 موجب تماما. ولدينا كذلك $2x+3=0$ يكافئ $x=-\frac{3}{2}$.

كما أنّ $1-x$ هي عبارة دالة تآلفية، تمثيلها البياني مستقيم معادلته $y=-x+1$ ومعامل التوجيه له -1 سالب تماما. ولدينا كذلك $1-x=0$ يكافئ $x=1$. منه:

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		1		$+\infty$
إشارة $2x+3$		-	0	+		+	
إشارة $1-x$		+		+	0	-	
إشارة $(2x+3)(1-x)$		-	0	+	0	-	

Vrai ou faux

1. إذا كان $x > 2$ فإن $x^2 > 4$.
2. إذا كان $x^2 > 4$ فإن $x > 2$.
3. إذا كان $x \le -2$ فإن $x^2 \le 4$.
4. إذا كان $x \in [-7;-5]$ فإن $x^2 \ge 9$.
5. إذا كان $x^2 \le 9$ فإن $-3 \le x \le 3$.
6. إذا كان $-5 \le x \le -3$ فإن $9 \le x \le 25$.
7. إذا كان $4 \le x^2 \le 36$ فإن $2 \le x \le 6$.
8. إذا كان $x \in [-2,3]$ فإن $x^2 \in [4,9]$
9. مربع كل عدد حقيقي x يكون أكبر من x.

الحل:

1. صحيح

2.خاطئ: لأن اذا أخذنا $x=-3$ **فان :** $x^2=9>4$.

3. صحيح

4. صحيح

5. صحيح

6. صحيح لأن الدلة مربع متناقصة على $\mathbb{R}^-$.

7. خاطئ:

8.صحيح

9. خاطئ: لأن اذا كان $0<x<1$ **الخاصية غير محققة مثال مضاذ:**
$a=0.5$
$a^2=0.25$

تمارين محلولة

تمرين 1:

ادرس اتجاه تغيّر الدالة $f:x\mapsto(x+2)^2+3$ ثم مثّلها بيانيا.

الحل:

- لاحظ أنّ القيمة -2 التي تعدم المقدار $x+2$ هي القيمة التي تقسم $\mathbb{R}$ إلى المجالين المعتمدين في هذه الدراسة.
- لاحظ أيضا أنّ إضافة العدد 3 لا يغيّر من اتجاه المتباينات المستعملة.

<u>دراسة اتجاه تغيّر</u> f

- **الدالة التآلفية $x\mapsto x+2$ متزايدة و سالبة في المجال $]-\infty,-2]$ و متناقصة و موجبة في المجال $[-2,+\infty[$.**
- **دراسة اتجاه تغيّر الدالة f في الجال $]-\infty,-2]$:**

x_1 و x_2 عددان حقيقيان حيث $x_1\prec x_2\prec -2$ ...(أ) .

نضيف 2 لأطراف (أ) و نجد $x_1+2\prec x_2+2\prec 0$

إذن $(x_1+2)^2\succ(x_2+2)^2$ ...(ا) لأن الدّالة مربع متناقصة على $]-\infty,0]$ و $]-\infty,-2]\subset]-\infty,0]$.

نضيف 3 لطرفي (ا) و نجد $(x_1+2)^2+3\succ(x_2+2)^2+3$ أي

$f(x_1)\succ f(x_2)$.

الخلاصة : إذا كان $x_1\prec x_2$ فإن $f(x_1)\succ f(x_2)$ أي f

متناقصة على $]-\infty,-2]$.

- **دراسة اتجاه تغيّر الدالة f في الجال $[-2,+\infty[$:** **x_1 و x_2 عددان حقيقيان حيث $-2\prec x_1\prec x_2$ ...(ب) .**

نضيف 2 لأطراف (ب) و نجد $0\prec x_1+2\prec x_2+2$

إذن $(x_1+2)^2\prec(x_2+2)^2$ ...(ب ب) لأن الدّالة مربع متزايدة على $[0,+\infty[$ و $[-2,+\infty[\subset[0,+\infty[$.

نضيف 3 لطرفي (ب ب) و نجد $(x_1+2)^2+3\prec(x_2+2)^2+3$ أي

$f(x_1)\prec f(x_2)$.

الخلاصة: إذا كان $x_1\prec x_2$ فإن $f(x_1)\prec f(x_2)$ أي f متزايدة على $[-2,+\infty[$.

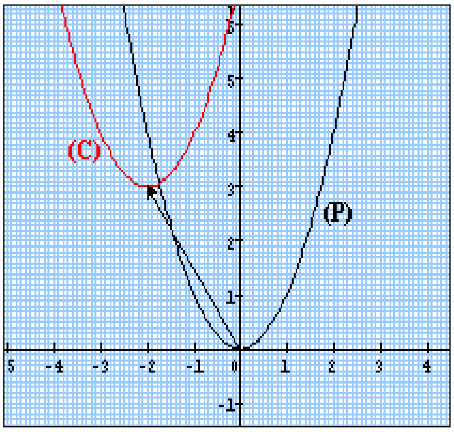
نستنتج جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
f	↘	3	↗

2) تمثيل f بيانيا

نسمي (□) التمثيل البياني للدالة f و (□) التمثيل البياني للدالة $g : x \to x^2$. النقطة $M(x, y)$ تنتمي إلى (□) إذا و فقط إذا كان $y = (x+2)^2 + 3$ أي $y - 3 = (x+2)^2$. النقطة $N(x+2, y-3)$ تنتمي إلى القطع المكافئ (□) إذن نمر من

(P) إلى (C) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$.



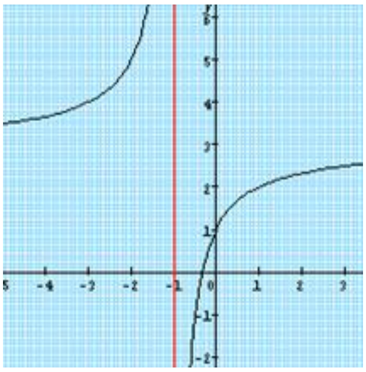
يمكن دراسة اتجاه تغيّر الدوال من الشكل $x \to m(x+a)^2 + b$ بنفس الكيفية.

تمرين 2:

ادرس تغيرات الدالة $f : x \mapsto 3 - \dfrac{2}{x+1}$.

الحل:

1) الدالة f تكون معرفة من أجل $x \neq -1$ إذن مجموعة تعريفها هي $\mathbb{R}$ ماعدا 1- أي $]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$.



2) تخمين تغيرات الدالة f : يظهر ان f متزايدة على $]-\infty,-1[$ و متزايدة على $]-1,+\infty[$.

3) لنبرهن المخمّنة في المجال $]-\infty,-1[$:

x_1 و x_2 عددان حقيقيان ينتميان إلى $]-\infty,-1[$ أي $x_1 \prec x_2 \prec -1$ ... (i)

• نضيف 1 لطرفي (i) و نجد $x_1 + 1 \prec x_2 + 1 \prec 0$.

4) العددان $x_1 + 1$ و $x_2 + 1$ سالبان تماما إذن $\dfrac{1}{x_2+1} \succ \dfrac{1}{x_1+1}$ ... (ii) لأن الدّالة مقلوب متناقصة على $]-\infty,0[$.

• نضرب طرفي (ii) في 2− و نجد $\dfrac{-2}{x_2+1} \prec \dfrac{-2}{x_1+1}$ ... (iii) .

• نضيف 3 لطرفي (iii) ونجد $3 - \dfrac{2}{x_2+1} \prec 3 - \dfrac{2}{x_1+1}$ أي $f(x_1) \prec f(x_2)$

• الخلاصة:

• إذا كان $x_1 \prec x_2$ فإن $f(x_1) \prec f(x_2)$ إذن f متزايدة على $]-\infty,-1[$

5) لنبرهن المخمنة في المجال $]-1,+\infty[$:

بإتباع نفس الخطوات نجد ان من أجل كل x_1 و x_2 حيث $-1 \prec x_1 \prec x_2$ لدينا $f(x_1) \prec f(x_2)$ أي f متزايدة على $]-1,+\infty[$.

تمرين 3:

1.) ضع على الدائرة المثلثية النقط A و B و C التي صورها $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{2\pi}{3}$ و $-\frac{\pi}{3}$ على الترتيب.

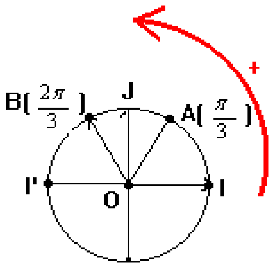
2) جد عددا يختلف عن $\frac{\pi}{3}$ و صورته A .

3.) ضع على الدائرة المثلثية النقطة E التي صورتها $\frac{197\pi}{4}$ ثم النقطة F التي صورتها $-\frac{35\pi}{4}$.

الحل:

نتصورأنّ نقطة M تتحرك على الدائرة المثلثية منطلقة من النقطة $I(1,0)$.

النقط A و B و C هي وضعيات مختلفة للنقطة M .



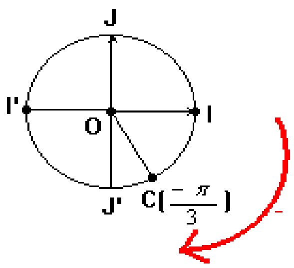
آ) $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{2\pi}{3}$ عددان موجبان إذن M تتحرك في الاتجاه المباشر.

لتحديد الوضعية A :

ننشئ المثلث المتقايس الأضلاع IOA بالمدور.

لتحديد الوضعية B : ننقل القوس IA مرتين.

$-\frac{\pi}{3}$ عدد سالب إذن M تتحرك في الاتجاه غير المباشرلتحديد الوضعية C : ننشئ المثلث المتقايس الأضلاع IOC بالمدور.

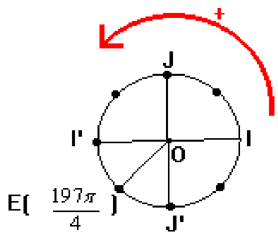


ب)لإيجاد عدد أخر يكون صورة للنقطة A نضيف 2π للعدد $\frac{\pi}{3}$.

A هي صورة $\frac{\pi}{3}$ و كذلك صورة $\frac{\pi}{3}+2\pi$ أي $\frac{7\pi}{3}$.

جـ) • $\frac{197\pi}{4}$ عدد موجب إذن M تتحرك في الاتجاه المباشر و

تقطع قوسا IE طوله $\frac{197\pi}{4} rad$ بعد عدة دورات.

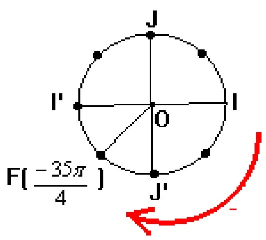


نقسم 197على 4 و نجد $197 = 49\times4+1$ و منه

$\frac{197\pi}{4} = 49\pi+\frac{\pi}{4}$. العدد 49π يعبرعن " 24دورة و نصف دورة ".

بعد 24 دورة ونصف دورة ، M تنطبق على I' و يبقى لها قطع القوس I' E الذي طوله $\frac{\pi}{4}$)

E هي منتصف القوس I' J').



- $\frac{-35\pi}{4}$ عدد سالب إذن M تتحرك في الاتجاه غير المباشر و تقطع قوسا طوله $\frac{35\pi}{4}$.

$\frac{35\pi}{4}=8\pi+\frac{3\pi}{4}$ و بالتالي M تنطلق من I و تقطع 4 دورات و قوس طوله $\frac{3\pi}{4}$ ، منه F تنطبق على E .

تمرين 4:

I) f الدالة المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\sqrt{x}$.
(C_f) تمثيلها البياني في مستو المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أدرس إتجاه تغيّر الدالة f ، ثم شكل جدول تغيّراتها.

2) أنشئ المنحنى (C_f) .

II) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]-\infty;0]$ بـ : $g(x)=\sqrt{-x}$.
(C_g) تمثيلها البياني في المستو المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أدرس إتجاه تغيّر الدالة g ، ثم شكل جدول تغيّراتها.

2) أنشئ المنحنى (C_g) .

III) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x)=\sqrt{|x|}$.
(C_h) تمثيلها البياني في المستو المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بيّن أن الدالة h زوجية .

2) أكتب h دون رمز القيمة المطلقة .

3) شكل جدول تغيّرات الدالة h.

4) إعتمادا على ما سبق ،أنشئ المنحنى (C_h) .

حل مقترح:

I) $f(x)=\sqrt{x}$ ، $D_f=[0;+\infty[$

1) دراسة إتجاه تغيّر الدالة f:

ليكن a و b عددان حقيقيان حيث $0\leq a<b$ و منه $\sqrt{a}<\sqrt{b}$ أي : $f(a)<f(b)$

إذن: الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

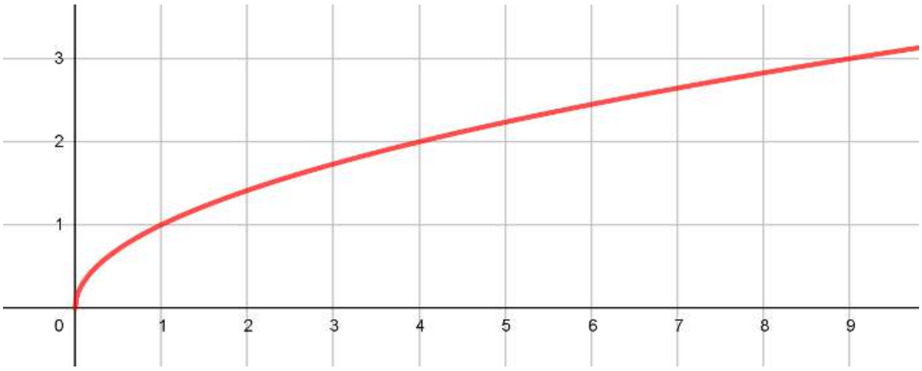
جدول تغيّرات الدالة " f:

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	0 $\nearrow$

2) التمثيل البياني للدالة f :

جدول لبعض القيم :

x	0	1	2	4	9
$f(x)$	0	1	$\sqrt{2}$	2	3



II) $g(x)=\sqrt{-x}$ ، $D_f=]-\infty;0]$

1) دراسة إتجاه تغيّر الدالة g :

ليكن a و b عددان حقيقيان حيث $a<b\le 0$ و منه $-a>-b\ge 0$ و منه $\sqrt{-a}>\sqrt{-b}$

$g(a)>g(b)$

إذن : الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$.

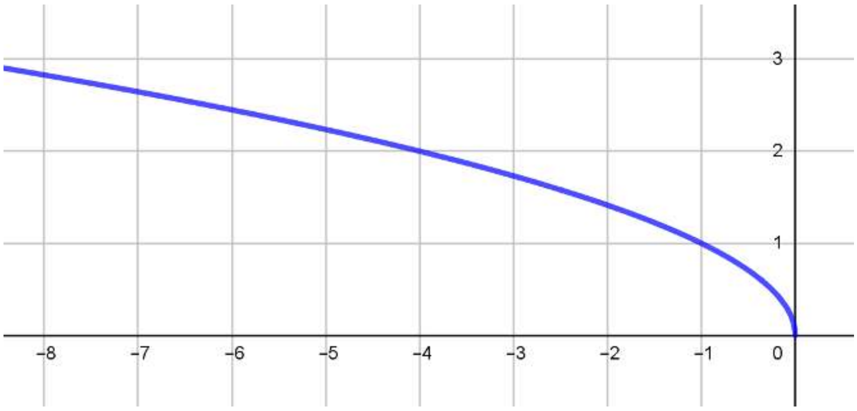
جدول تغيّرات الدالة " g :

x	$-\infty$	0
$g(x)$	$\searrow$	0

2) التمثيل البياني للدالة g :

جدول لبعض القيم :

x	-9	-4	-2	-1	0
$g(x)$	3	2	$\sqrt{2}$	1	0



III) $h(x)=\sqrt{|x|}$ ، $D_h=\mathbb{R}$

1) المجموعة $\mathbb{R}$ متناظرة بالنسبة إلى الصفر ، و من أجل كل عدد حقيقي x ،

$h(-x)=\sqrt{|-x|}=\sqrt{|x|}=h(x)$ إذن h زوجية .

2) كتابة h دون رمز القيمة المطلقة :

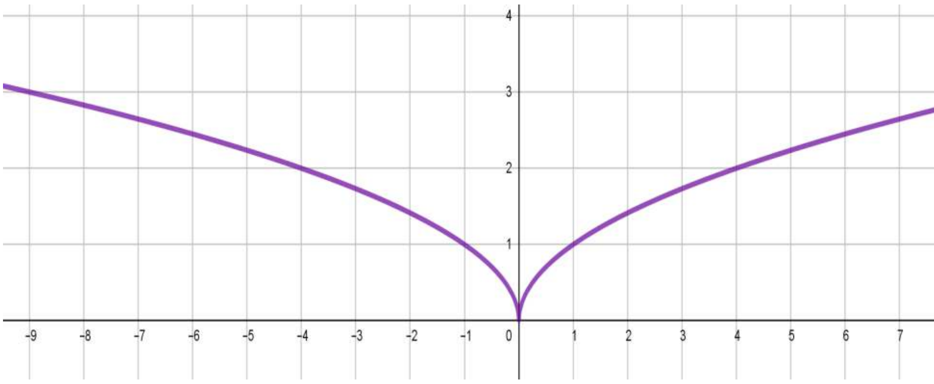
نذكر أن : $|x| = \begin{cases} x & ; x \in [0;+\infty[\\ -x & ; x \in]-\infty;0] \end{cases}$ **و بالتالي** $h(x) = \sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \in [0;+\infty[\\ \sqrt{-x} & ; x \in]-\infty;0] \end{cases}$ أ

$h(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \in [0;+\infty[\\ g(x) & ; x \in]-\infty;0] \end{cases}$.

3) جدول تغيّرات الدالة h.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h(x)$		0	

4) **إنشاء المنحنى** (C_h) **:** (C_h) **هو نفسه** (C_f) **على المجال** $[0;+\infty[$ **و نكمل إنشاء الباقي**



تمرين 5:

I) أنقل و أكمل الجدول التالي:

القيس بالدرجات	20°	....	140°	....
القيس بالراديان	....	$\frac{3\pi}{5}$	....	$\frac{5\pi}{12}$

II) أ- ضع على الدائرة المثلثية النقط A ، B **و** C **التي صورها** 2019π ، $\frac{19\pi}{3}$ **و** $\frac{31\pi}{4}$ **على الترتيب**

ب - أحسب القيم المضبوطة لجيب تمام و جيب القيم السابقة .

III) إذا علمت أن : $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

1) **عيّن القيمة المظبوطة لـ :** $\sin\frac{\pi}{8}$ ، $\tan\frac{\pi}{8}$.

2) **استنتج القيم المضبوطة لكل من :** $\sin\frac{7\pi}{8}$ ، $\cos\frac{15\pi}{8}$ **و** $\tan\frac{2017\pi}{8}$.

IV) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

(1 $\sin^2(x)-\cos^2(x)=1-2\cos^2(x)$

(2 $\cos^2(x)-\sin^2(x)=1-2\sin^2(x)$

(3 $\sin^4(x)-\cos^4(x)=\sin^2(x)-\cos^2(x)$

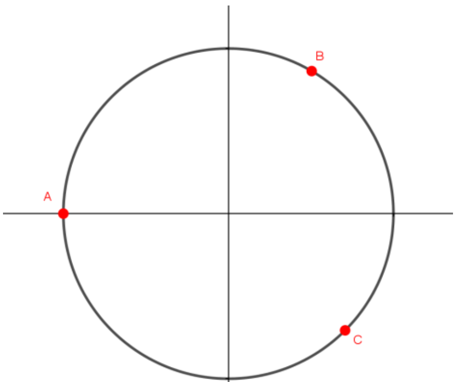
$(\cos x+\sin x)^2-(\cos x-\sin x)^2=4\cos x.\sin x$.

☜ **حل مقترح:**

I) الجدول :

القيس بالدرجات	20°	108°	140°	75°
القيس بالراديان	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{3\pi}{5}$	$\frac{7\pi}{9}$	$\frac{5\pi}{12}$

II) أ- تعليم على الدائرة المثلثية النقط A ، B و C التي صورها -2019π ، $\frac{19\pi}{3}$ و $\frac{31\pi}{4}$ على الترتيب :



لدينا :

$$-2019\pi=-2020\pi+\pi=-2\times1010\pi+\pi$$

$$\frac{19\pi}{3}=\frac{18\pi+\pi}{3}=6\pi+\frac{\pi}{3}=3\times2\pi+\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{31\pi}{4}=\frac{32\pi-\pi}{4}=8\pi-\frac{\pi}{4}=4\times2\pi-\frac{\pi}{4}$$

ب- حساب القيم المضبوطة لجيب تمام و جيب القيم :

$\cos(-2019\pi)=\cos(-2\times1010\pi+\pi)=\cos(\pi)=-1$ ، $\sin(-2019\pi)=\sin(-2\times1010\pi+\pi)=\sin(\pi)=0$

$\cos\left(\frac{19\pi}{3}\right)=\cos\left(3\times2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$ ، $\sin\left(\frac{19\pi}{3}\right)=\sin\left(3\times2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cos\left(\frac{31\pi}{4}\right)=\cos\left(4\times2\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{31\pi}{4}\right)=\sin\left(4\times2\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

III) علما أن : $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

1) تعيين القيمة المضبوطة لـ : $\sin\frac{\pi}{8}$ و $\tan\frac{\pi}{8}$

لدينا: $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=1$ و منه $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=1-\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)^2$ أي: $\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. (لأن $\frac{\pi}{8}\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$)

$$\tan\frac{\pi}{8}=\frac{\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}}=\frac{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}}=\sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})^2}{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$$

2) نتائج :

$$\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)=\sin\left(\frac{8\pi-\pi}{8}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{15\pi}{8}\right)=\cos\left(\frac{16\pi-\pi}{8}\right)=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{8}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\tan\left(\frac{2017\pi}{8}\right)=\tan\left(\frac{2016\pi+\pi}{8}\right)=\tan\left(252\pi+\frac{\pi}{8}\right)=\tan\left(126\times 2\pi+\frac{\pi}{8}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}-1 .$$

IV) البرهان على صحة المساويات :

من أجل كل عدد حقيقي x :

نعلم أن $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$ **و منه :**

1) $1-2\cos^2(x)=\cos^2(x)+\sin^2(x)-2\cos^2(x)=\sin^2(x)-\cos^2(x)$

2) $1-2\sin^2(x)=\cos^2(x)+\sin^2(x)-2\sin^2(x)=\cos^2(x)-\sin^2(x)$

3) $\sin^4(x)-\cos^4(x)=\left(\sin^2(x)-\cos^2(x)\right)\left(\sin^2(x)+\cos^2(x)\right)=\sin^2(x)-\cos^2(x)$

$$(\cos x+\sin x)^2-(\cos x-\sin x)^2=(2\sin x)\times(2\cos x)=4\cos x.\sin x .$$

تمارين مقترحة

.1

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^2+4x+7$

1- عين العددين الحقيقيين a و b بحيث : $f(x)=(x+a)^2+b$

2- عين اتجاه تغير الدالة f ثم ضع جدول تغيراتها

3- أحسب $f(1), f(0), f(-1), f(2), f(-2)$,ثم أنشئ المنحنى (C_f) في معلم متعامد متجانس

4 -ماذا يمثل المنحنى (C_f) بالنسبة إلى منحنى الدالة " مربّع ".

.2

1- حول أقياس الزوايا التالية من الدرجات الى الراديان : 10° ، 315° .

2- حول أقياس الزوايا التالية من الراديان الى الدرجات : $\frac{\pi}{5},\frac{3\pi}{8}$.

3- أحسب جيب و جيب تمام الأعداد : $-\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}$.

4-علم على الدائرة المثلثية النقط A, B التي صورها : $\frac{115\pi}{4}$ ، $\frac{-2467\pi}{6}$ على الترتيب.

.3

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x^2-ax-b$ حيث a و b عددان حقيقيان، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي منسوب الى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.عين العددين الحقيقيين a و b علما أن : $f(0)=-3$ و $f(-1)=0$.

2.نضع فيما يلي : $a=2$ و $b=3$.

أ-احسب $f(2)$ و $f(-2)$.

ب-ما قولك حول شفعية الدالة f ؟ برر اجابتك.

3- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x)=(x-1)^2-4$.

4-أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-\infty;1]$ ثم على المجال $[1;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

5- (P) التمثيل البياني للدالة "مربع" في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ- عين احداثيا شعاع الانسحاب $\vec{u}$ الذي يسمح برسم (C_f) انطلاقا من (P).

ب-في نفس المعلم أرسم بعناية (P) و (C_f).

.4

نعتبر المثلث ABC القائم في A حيث: $AC=8cm$ ، $AB=6cm$

لتكن M نقطة من القطعة $[AB]$

نرمز للمسافة AM ب: x . (الوحدة cm)

نرمز للمسافة CM ب: $g(x)$. (الوحدة cm)

نرفق بكل عدد حقيقي x ، العدد الحقيقي $g(x)$.

1.ما هي مجموعة تعريف الدالة g ؟

2.أكتب الدستور المعرف للدالة g .

3.عين القيم الحدية للدالة g .

4.ما هي مجموعة قيم الدالة g .

.5

لتكن الدالة f المعرفة كما يلي: $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-2}$ ، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي منسوب الى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1. عين مجموعة تعريف الدالة f ؟

2.هل النقط التالية تنتمي الى المنحنى (C_f): $C(3;1), B(2;3), A\left(-2;\dfrac{5}{4}\right)$

3.عين النقطة من المنحنى التي ترتيبها 1.

4.أثبت أن مهما يكن من فان: $4-x\in D_f$ و $f(4-x)+f(x)=6$

5.استنتج $f(6), f(1)$.

.6

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي منسوب الى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

باستعمال الترميز: $f(a)=b$ ، عبرعن الجمل التالية:

1.صورة العدد 5 بالدالة f هي 4.

2.للعدد 2- سابقتان وفق الدالة f هما: 2 و 3.

3.المنحنى (C_f) يشمل النقطة $A(-1;10)$.

4.المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل $(x'x)$ في نقطتان فاصلتهما 1 ، 4.

5.المنحنى (C_f) يقطع محور االتراتيب $(y'y)$ في نقطتان فاصلتهما 4.

.7

لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالدستور: $f(x)=2x^2-4x-6$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي منسوب الى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1.أ-أثبت أن مهما يكن من فان : $f(x)=2(x-1)^2-8$.

ب-استنتج أن للدالة f قيمة حدية يطلب تعينها .

2.نعتبر النقطة $\Omega(1;-8)$.

أ-أكتب معادلة ديكارتية للمنحنى (C_f) في المعلم $(\Omega;\vec{i},\vec{j})$.

ب-استنتج رسم المنحنى (C_f) .

3.عين نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (D) ذو المعادلة : $y=-8x-8$.

.8

لتكن الدالة العددية f المعرفة على $]1;+\infty[$ بالعبارة: $f(x)=\sqrt{x-1}$ ، و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي منسوب الى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1.أثبت أن المنحنى (C_f) محول المنحنى (C) الممثل للدالة $x\mapsto\sqrt{x}$ بانسحاب يطلب تحديده ثم أرسم المنحنى (C_f) .

2.أ-بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $x^2-7x+10=(x-2)(x-5)$

ب-عين نقطتي تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (D) ذو المعادلة : $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$

3.لتكن الدالة g المعرفة على $]-\infty-1[\cup]1;+\infty[$ ب: $g(x)=\sqrt{|x|-1}$

أ-أكتب الدالة g دون رمز القيمة المطلقة.

ب-بين أن الدالة g دالة زوجية.

ج-كيف يمكن رسم المنحنى (C_g) الممثل للدالة g من خلال المنحنى (C_f).

.9

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$

x	-3		1	2	4
$g(x)$	3 ↘	-4 ↗	2 ↘		0

1. أدرس شفعية الدالة f..

2. أحسب $f(-1), f(2)$ ثم استنتج قيمتي $f(1)$ و $f(-2)$.

3. حل في $\mathbb{R}^*$ المعادلة : $f(x)=2x$

4. إذا كان جدول تغيرات الدالة g موضح كما يلي :

أ-أذكر المجالات التي تقبل فيها الدالة g قيما حدية وما هي؟

ب-حل المعادلة $g(x)=0$ ، ثم أنشئ المنحنى (C_g) الممثل للدالة g في معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

10.

لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ ب: $f(x)=\frac{2x+3}{x-1}$ ، و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي منسوب الى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أثبت أن مهما يكن x من $\mathbb{R}-\{1\}$ فان : $f(x)=a+\frac{b}{x-1}$ حيث: b,a عددان حقيقيان يطلب تعينهما.

2. نعتبر النقطة $\Omega(1;-a)$.

أ- أكتب معادلة ديكارتية للمنحنى (C_f) في المعلم $(\Omega;\vec{i},\vec{j})$.

ب-استنتج رسم المنحنى (C_f).

3. ليكن وسيط حقيقي. ناقش بيانيا حسب قيم ، عدد و اشارة حلول المعادلة ذات المجهول: $(2-m)x+m+3=0$

(غير مقررة على 1ج م ع)

11.

لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x)=\sin 2x$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي منسوب الى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أدرس شفعية الدالة f .

2. أثبت أن الدالة f دورية دورها π .

3. أدرس تغيرات الدالة f على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

4.أرسم المنحنى (C_f)

12.

لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x)=\cos^2 x$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي منسوب الى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.أثبت أن الدالة f زوجية.

2.أثبت أن الدالة f دورية دورها π .

3.أدرس تغيرات الدالة f على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. 4.أرسم المنحنى (C_f)

13.

$ABCD$ مربع ضلعه $4cm$. نضع النقط E, F, G و H على القطع $[AB],[BC],[CD]$ و $[AD]$ على الترتيب حيث:
$AE=BF=CG=DH$. نضع: $AE=x$ نقبل أن $EFGH$ مربع.

1.احسب EH بدلالة x .

2.عبر بدلالة x عن مساحة المربع $EFGH$.

3.نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;4]$ ب: $f(x)=2(x-2)^2+8$.

أثبت أن مساحة $EFGH$ تساوي $f(x)$.

4.أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0;4]$.

5.أ-ضع جدول تغيرات الدالة f .

ب-أنشئ (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي منسوب الى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

6.أ-استنتج مما سبق قيمة x التي من أجلها تكون مساحة $EFGH$ صغرى.

ب-أوجد هذه النتيجة جبريا.

7.أ-عين بيانيا قيم x التي من أجلها تكون مساحة $EFGH$ هي: $10cm^2$.

ب-أوجد هذه النتيجة حسابيا.

8.أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;2]$ يكون: $f(a+2)=f(2-a)$.

محور

المعادلات و المتراجحات

ملخص الدرس

المتطابقات الشهيرة:

A ، B عبارتان جبريتان.

- $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
- $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
- $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$

أمثلة:

$$(2x+1)^2 = (2x)^2 + 2\times 2x\times 1 + 1^2 = 4x^2 + 4x + 1$$

$$(x-3)^2 = x^2 - 2\times x\times 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9$$

$$\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right) = \left(\sqrt{3}\right)^2 - 1 = 3 - 1 = 2$$

معادلة جداء:

يكون جداء عدّة عوامل معدوما إذا وفقط إذا كان أحد العوامل على الأقّل معدوما.

$A(x)\times B(x)=0$ *تكافئ* $A(x)=0$ *أو* $B(x)=0$

مثال: حلّ في $\mathbb{R}$ *المعادلة:*

$(2x-1)^2+x(1-2x)=4x^2-1 \qquad (1)$

بعد تحليل $4x^2-1$ في المعادلة *(1)*، نلاحظ وجود عامل مشترك هو $(2x-1)$. مما يسمح لنا بكتابة *(1)* على شكل معادلة جداء:

$$(2x-1)^2+x(1-2x)=4x^2-1$$
$$(2x-1)^2+x(1-2x)=(2x-1)(2x+1)$$
$$(2x-1)^2+x(1-2x)-(2x-1)(2x+1)=0$$
$$(2x-1)\ [(2x-1)-x-(2x+1)]=0$$
$$(2x-1)(-x-2)=0$$

منه $2x-1=0$ أو $-x-2=0$

أي: $x=\frac{1}{2}$ أو $x=-2$

إذن، مجموعة حلول المعادلة هي: $S=\left\{-2\ ;\ \frac{1}{2}\right\}$

نتيجة

n عدد طبيعي غير معدوم.

$[A(x)]^n=0$ تكافئ $A(x)=0$

مثال: المعادلة $(2x+3)^2=0$ تكافئ $2x+3=0$ أي $x=-\frac{3}{2}$

معادلة حاصل قسمة:

المعادلة $\frac{A(x)}{B(x)}=0$ تكافئ $A(x)=0$ و $B(x)\neq 0$

مثال: حلّ، في $\mathbb{R}$، المعادلة: $\frac{4x^2-1}{2x+1}=0$ (2)

المعادلة (2) تكافئ: $4x^2-1=0$ و $2x+1\neq 0$

(يسمح الشرط $2x+1\neq 0$ بتعيين المجموعة المرجعية للمعادلة).

أي $(2x-1)(2x+1)=0$ و $x\neq -\frac{1}{2}$ أي $(x=\frac{1}{2}$ أو $x=-\frac{1}{2})$ و $x\neq -\frac{1}{2}$

بما أنّ $x\neq -\frac{1}{2}$، ينتج $x=\frac{1}{2}$ الحلّ الوحيد للمعادلة.

إذن مجموعة حلول المعادلة (2) هي: $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

1- معادلات و متراجحات من الدرجة الأولى:

-حل معادلة من الدرجة الأولى من الشكل: $ax+b=0$، حيث a,b أعداد حقيقية و $a\neq 0$ هو : $x=-\frac{b}{a}$

-اشارة العبارة $ax+b$ نلخصها في الجدول التالي:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	عكس اشارة a	0	نفس اشارة a

مثال:

حل في المعادلة: $-2x+1=0$ ، $x=\frac{1}{2}$ هو حل لهذه المعدلة واشهرتها هي من الشكل:

حلول متراجحة $-2x+1\leq 0$ هي : $x\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$.

حلول متراجحة $-2x+1>0$ هي : $x\in\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$-2x+1$	+	0	--

مثال: حلّ في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $\frac{x-2}{2x+3}\geq 0$ (2)

تكون العبارة $\frac{x-2}{2x+3}$ معرفة عندما يكون $2x+3$ غير معدوم، بمعنى $x\neq -\frac{3}{2}$

لدراسة إشارة حاصل القسمة هذا، ندرس إشارة الجداء $(x-2)(2x+3)$ باستعمال جدول الإشارات:

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		2	$+\infty$
$x-2$	-	|	-	0	+
$2x+3$	-	0	+		+
$\frac{x-2}{2x+3}$	+	||	-	0	+

نقرأ في السّطر الأخير للجدول أنّ $\frac{x-2}{2x+3}$ يكون موجبا (أكبر من 0 أو يساويه) على المجموعة $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right[\cup\left[2;+\infty\right[$. مجموعة حلول المتراجحة (2) هي: $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[\cup\left[2;+\infty\right[$.

2- معادلات و متراجحات من الدرجة الثانية:

لحل معادلة من الدرجة الثانية من الشكل: $ax^2+bx+c=0$ حيث، a,b,c أعداد حقيقية و $a\neq 0$ يتطلب علينا اتباع مايلي:

حساب المميز Δ $(\Delta=b^2-4ac)$

الحالة(1)

اذا كان $\Delta>0$ يوجد

حلان هما: x_1 و x_2

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ، } x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

التحليل:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

ش. النموذجي:

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

الحالة(2)

اذا كان $\Delta=0$ يوجد

حل مضاعف هو : $x_{1,2}$

$$x_{1,2}=\frac{-b}{2a}$$

التحليل:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_{1,2})^2$$

ش. النموذجي

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\right]$$

الحالة(3)

اذا كان $\Delta<0$ لا يوجد

حلول في $\mathbb{R}$

التحليل: لا يمكن التحليل

ش. النموذجي:

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

مثال1:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التالية : $2x^2-3x+1=0$

علينا حساب المميز Δ نجد: $\Delta=(-3)^2-4(2)(1)=1>0$

$\Delta>0$ اذن يوجد حلان هما:

$$x_2=\frac{3-\sqrt{1}}{2(2)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \text{ ، } x_1=\frac{3+\sqrt{1}}{2(2)}=\frac{4}{4}=1$$

التحليل: $x^2-4x+4=(x-2)^2$

ش.النموذجي: $2x^2-3x+1=2\left[\left(x+\frac{-3}{2(2)}\right)^2-\frac{1}{4(4)}\right]$

مثال2:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التالية : $x^2-4x+4=0$

علينا حساب المميز Δ نجد: $\Delta=(-4)^2-4(1)(4)=0$

$\Delta=0$ اذن يوجد حل مضاعف هو:

$$x_{1,2}=-\frac{-4}{2(1)}=\frac{4}{2}=2$$

ش.النموذجي: $x^2-4x+4=1\left[(x+\frac{-4}{2})^2\right]$

مثال3:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التالية : $x^2+1=0$

علينا حساب المميز Δ نجد: $\Delta=(0)^2-4(1)(1)=-4$

$\Delta<0$ اذن: لايوجد حلول في $\mathbb{R}$

التحليل: $2x^2-3x+1=2(x-1)(x-\frac{1}{2})$

Vrai ou Faux

1. من أجل كلّ عدد حقيقي x ، $(-2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$

2. من أجل كلّ عدد حقيقي غير معدوم x ، $\frac{1}{x^2+2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}$

3. من أجل كلّ عدد حقيقي x ، $(x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$

4. A عبارة جبرية حيث $A = (-x+2)^2$ الشكل المنشور والمبسط للعبارة A هو: $x^2 + 4$

5. تحليل العبارة $9 - x^2$ هو $(x-3)(x+3)$

6. حلول المعادلة $x^2 + 49 = 0$ هما: 7 ، -7

7. من أجل كلّ عدد حقيقي x ، $-x-1 \leq 0$

8. المتراجحة : $\frac{x-3}{x-1} \geq \frac{2}{3}$ تكافئ $3(x-3) \geq 2(x-1)$

9. الشكل النموذجي للعبارة $A = x^2 + 4x - 12$ هو: $(x+2)^2 - 16$

10. المعادلة $-x^2 - x - 1 = 0$ لا تقبل حلولا في R

✍ **حل:**

1. من أجل كلّ عدد حقيقي x ، $(-2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$ ... **خاطئ** $(-2x-1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$

2. من أجل كلّ عدد حقيقي غير معدوم x ، $\frac{1}{x^2+2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}$ **خاطئ**

3. من أجل كلّ عدد حقيقي x ، $(x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$ **صحيح**

4. A عبارة جبرية حيث $A = (-x+2)^2$ الشكل المنشور والمبسط للعبارة A هو: x^2+4 **خاطئ**

5. تحليل العبارة $9 - x^2$ هو $(x-3)(x+3)$ **خاطئ**

6. حلول المعادلة $x^2 + 49 = 0$ هما: 7 ، -7 **صحيح**

7. من أجل كلّ عدد حقيقي x ، $-x - 1 \leq 0$ **خاطئ**

8. المتراجحة $\frac{x-3}{x-1} \geq \frac{2}{3}$ تكافئ $3(x-3) \geq 2(x-1)$ **صحيح**

9. الشكل النموذجي للعبارة $A = x^2 + 4x - 12$ هو: $(x+2)^2 - 16$ **صحيح**

10. المعادلة $-x^2 - x - 1 = 0$ لا تقبل حلولا في R **صحيح**

تمارين محلولة

تمرين 1:

حلّ كلا من المتراجحتين الآتيتين:

$$(3x-2)^2 \geq (x-1)^2 \quad (1) \qquad\qquad (2) \quad \frac{4x+1}{(2x-1)^2} < \frac{1}{2x-1}$$

الحل:

(1) ننقل كلّ الحدود إلى نفس الطرف:

$$(3x-2)^2-(x-1)^2 \geq 0$$

نحلّل الطرف الأوّل:

$$[(3x-2)-(x-1)][(3x-2)+(x-1)] \geq 0$$

$$(3x-2-x+1)(3x-2+x-1) \geq 0$$

$$(2x-1)(2x-3) \geq 0$$

ندرس إشارة $(2x-1)(2x-3)$:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		-	0	+		+	
$2x-3$		-		-	0	+	
$(2x-1)(2x-3)$		+	0	-	0	+	

نستخلص، مجموعة حلول المتراجحة هي:

$$S = \left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$$

(2) المقامات تتضمن المجهول، نبحث إذن عن الشروط:

$2x-1=0$ تكافئ $x=\frac{1}{2}$. وبالتالي يكون $\frac{1}{2}$ قيمة ممنوعة. ننقل كلّ الحدود إلى نفس الطرف: $\frac{4x+1}{(2x-1)^2} - \frac{1}{2x-1} < 0$

نوّحد المقامات:

$$\frac{4x-1-(2x-1)}{(2x-1)^2} < 0 \quad \text{أي} \quad \frac{2x}{(2x-1)^2} < 0$$

ندرس إشارة $\frac{2x}{(2x-1)^2}$:

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x$	-	0 +		+
$(2x-1)^2$	+	+	0	+
$\frac{2x}{(2x-1)^2}$	-	0 +	‖	+

نستخلص، مجموعة حلول المتراجحة هي: $S=]-\infty\ ;\ 0[$

تمرين 2:

x عدد حقيقي ، $E(x)=(x-1)^2-16$

1. تحقّق من أنّ:

أ) $E(x)=x^2-2x-15$ ب) $E(x)=(x-5)(x+3)$

2. استعمال الصيغة الأنسب للعبارة $E(x)$:

أ) احسب $E(0)$

ب) حلّ المعادلات: $E(x)=0$ ؛ $E(x)=9$ ؛ $E(x)=-15$

☜**الحل:**

1. أ) ننشر العبارة $E(x)$ في صيغتها المفروضة ونجد:

$$(x-1)^2-16=x^2-2x+1-16=x^2-2x-15$$

ب) نحلّل العبارة $E(x)$ في صيغتها المفروضة ونجد:

$$(x-1)^2-16=(x-1-4)(x-1+4)=(x-5)(x+3)$$

2. أ) لحساب $E(0)$، نستعمل الصيغة المنشورة للعبارة ونجد:

$$E(0)=0^2-2\times 0-15=-15$$

ب) لحلّ المعادلة $E(x)=0$ ، نستعمل الصيغة المحللة للعبارة ونجد:

$E(x)=0$ تكافئ $(x-5)(x+3)=0$

تكافئ $x-5=0$ أو $x+3=0$

أي $x=5$ أو $x=-3$

ومنه مجموعة حلول المعادلة: $\boxed{S=\{-3\ ;\ 5\}}$

لحلّ المعادلة $E(x)=9$، نستعمل الصيغة المفروضة للعبارة ونجد:

$E(x)=9$ تكافئ $(x-1)^2-16=9$

تكافئ $(x-1)^2=25$

تكافئ $x-1=5$ أو $x-1=-5$

أي $x=6$ أو $x=-4$

ومنه مجموعة حلول المعادلة: $\boxed{S=\{-4\,;6\}}$

لحلّ المعادلة $E(x)=-15$، نختار الصيغة المنشورة للعبارة ونجد:

$E(x)=-15$ تكافئ $x^2-2x-15=-15$

تكافئ $x^2-2x=0$

تكافئ $x(x-2)=0$

تكافئ $x=0$ أو $x-2=0$

أي $x=0$ أو $x=2$

ومنه مجموعة حلول المعادلة: $\boxed{S=\{0\,;2\}}$

تمرين 3:

$ABCD$ مستطيل حيث $AB=10\,cm$ ، $AD=4\,cm$ ، I منتصف $[AB]$ ، J منتصف $[CD]$.

M نقطة متغيرة من $[CD]$.

عيّن مواضع M التي يكون من أجلها المثلث AMB قائما في M.

الحل:

- نضع $MJ=x$.

الدائرة ذات القطر $[AB]$ المحيطة بالمثلث القائم AMB تقطع $[CD]$ في نقطتين متناظرتين بالنسبة إلى J تجيبان عن السؤال.

- نعبّر عن DM و MC بدلالة x، نجد:

$DM=5-x$ ، $MC=5+x$

حسب مبرهنة فيثاغورس، المثلث AMB قائم في M يكافئ:

$$AM^2+MB^2=AB^2$$

لكن، $AM^2=AD^2+DM^2$ ، $MB^2=MC^2+CB^2$

منه $MC^2+CB^2+AD^2+DM^2=AB^2$

أي $(5+x)^2+4^2+4^2+(5-x)^2=10^2$

بالنشر والتبسيط، نجد: $2x^2+82=100$ أي $x^2=9$

- وبما أنّ $0\le x\le 5$ ، فإنّ $x=3$.

نعيد نفس العمل عندما تكون M من JC ، نجد أيضا $x=3$.

- توجد، إذن، نقطتان تحققان المطلوب.

لإنشائهما، نرسم الدائرة التي قطرها $[AB]$.

تمرين 4:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

أ) $x^2+2x=0$ ب) $x^2+x+1=0$ ج) $x^2-4x+4=0$ د) $x^2+x-6=0$

الحل:

أ) $x^2+2x=0$ تعني $x(x+2)=0$ أي $x=0$ أو $x=-2$ ومنه مجموعة الحلول هي $S=\{-2,0\}$

ب) لدينا $a=1$، $b=1$ و $c=1$ ومنه $\Delta=(1)^2-4(1)(1)=-3$ إذن ليس للمعادلة حلول ومنه $S=\varnothing$

ج) $x^2-4x+4=0$ تكافئ $(x-2)^2=0$ إذن للمعادلة حل مضاعف $x=2$ ومنه $S=\{2\}$

د) لدينا $a=1$، $b=1$ و $c=-6$ ومنه $\Delta=(1)^2-4(1)(-6)=25$ إذن للمعادلة حلان متمايزان:

$x_1=\dfrac{-1+\sqrt{25}}{2}=2$ و $x_2=\dfrac{-1-\sqrt{25}}{2}=-3$ ومنه $S=\{-3,2\}$.

تمرين 5:

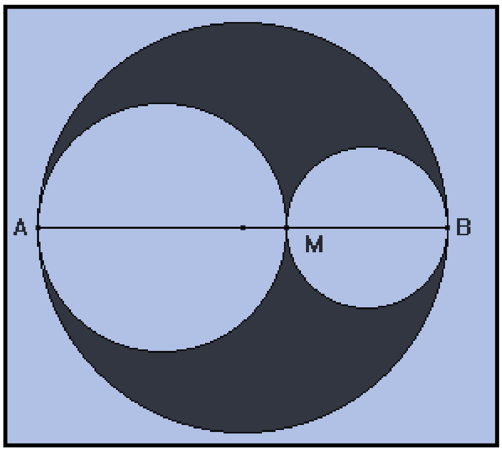
نعتبر دائرة قطرها $[AB]$ حيث $AB=4$. M نقطة من $[AB]$

ننشئ الدائرتين اللتين قطراهما $[AM]$ و $[MB]$.

نرمز بِـ S إلى مساحة الحيز الملون و بِـ a إلى مساحة القرص

الذي قطره $[AB]$. نضع $AM=x$

1. أحسب S بدلالة x.
2. هل توجد وضعية للنقطة M يكون من أجلها: $S=\dfrac{1}{2}a$ ؟



الحل:

1. حساب S بدلالة x

إذا رمزنا إلى مساحة القرص الذي قطره $[AM]$ بِـ a_1 و إلى مساحة القرص الذي قطره $[MB]$ بِـ a_2 فإن:

$$S=a-a_1-a_2$$

لدينا: $a=\pi\left(\dfrac{4}{2}\right)^2=4\pi$ ، $a_1=\pi\left(\dfrac{x}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}\pi x^2$ و $a_2=\pi\left(\dfrac{4-x}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}\pi(4-x)^2$ ومنه:

$$S=4\pi-\frac{1}{4}\pi x^2-\frac{1}{4}\pi(4-x)^2$$

بعد النشر و التبسيط نجد: $S=\dfrac{\pi}{2}\left(-x^2+4x\right)$

2. **تعيين وضعية** M **حيث:** $S=\frac{1}{2}a$

$S=\frac{1}{2}a$ يكافئ $\frac{\pi}{2}\left(-x^2+4x\right)=\frac{1}{2}\left(4\pi\right)=2\pi$ أي: $-x^2+4x-4=0$ أي: $x^2-4x+4=0$

لدينا: $x^2-4x+4=0$ يكافئ $\left(x-2\right)^2=0$ و منه: $x=2$

وضعية النقطة M **التي** يكون من أجلها: $S=\frac{1}{2}a$ هي منتصف القطعة $[AB]$.

تمارين مقترحة

.1

دون حساب المميز ، حل في $\mathbb{R}$ كلا من المعادلات ذات المجهول x التالية :

1) $x^2-3x=0$ 2) $x^2-4=0$

3) $3x^2-3=0$ 4) $4x^2-7=0$

5) $x^2+9=0$ 6) $x^2+2x+1=0$

7) $-x^2+6x-9=0$ 8) $(x-3)^2=4$

.2

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول x التالية : $ax^2+bx+c=0$

حيث a ، b ، c أعداد حقيقية و a غير معدوم. نضع $b'=\frac{b}{2}$

1) أحسب Δ ، مميز المعادلة (E) ، بدلالة a ، b' ، c .

2) نضع $\Delta'=\frac{\Delta}{4}$ ، أحسب Δ' بدلالة a ، b' ، c .

3) أثبت أنه إذا كان $\Delta'\geq 0$ فإن المعادلة (E) تقبل حلين هما $\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}$ ؛ $\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}$.

.3

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات الآتية :

1) $t^2-5t+6=0$

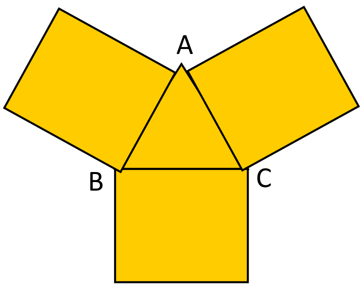
2) $-u^2-16u+17=0$

3) $x^2-(3+\sqrt{2})x+3\sqrt{2}=0$

4) $1+r+r^2=0$.

.4

ABC مثلث متقايس الأضلاع ارتفاعه $\sqrt{3}\,m$ ، محاط بثلاث مربعات.

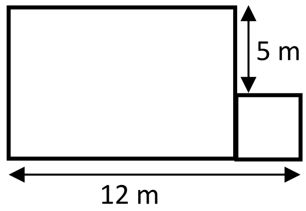


1 . أنشر العبارة $\left(1+\sqrt{3}\right)^2$

2 . أحسب طول ضلع المثلث ،علماً أن

مساحة الشكل الملون هي $\left(12+\sqrt{3}\right)m^2$.

.5



في الشكل أدناه مساحة المستطيل هي 8 مرات مساحة المربع ،

أحسب طول ضلع المربع.

.6

ABC **مثلث قائم في** B **حيث** $AB = 4\,cm$ **،** $BC = 3\,cm$**.** (Δ) **مستقيم يوازي** (BC) **ويقطع** (AB) **في** M **و** $[AC]$ **في** N **.**

أ) أرسم شكلا يترجم المعطيات السابقة.

ب) هل يوجد وضع للمستقيم (Δ) **الذي من لأجله تكون مساحة المثلث** NMC **نصف مساحة المثلث** ABC **؟**

.7

هل توجد ثلاثة أعداد طبيعية متتالية هي أطوال أضلاع مثلث قائم؟

.8

عائلة تنظم مصاريفها الشهرية كالآتي:

نصف الدخل الشهري للإطعام وربع الباقي للإيجار والمصاريف الأخرى (ماء، كهرباء) والباقي يخصص منه 10% **للتنزه وشراء الملابس والمبلغ الباقي للادخار أي** 1400 **د.ج.**

ما هو الدخل الشهري لهذه العائلة ؟

.9

. $ABCD$ **مربع.** E **نقطة من** $[AB]$ **,** F **نقطة من** (AD) **حيث** $EB = DF = 5\,cm$ **.**

عيّن طول ضلع المربع الذي من أجله تكون مساحة المثلث AEF **مساوية ربع مساحة المربع** $ABCD$ **.**

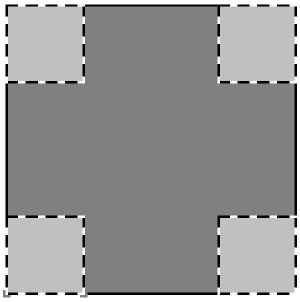
.10

ورقة مربعة الشكل ضلعها $6\,cm$**.نقتطع من كلّ ركن من أركانها نفس المربع الصغير كما في الشكل.**

كيف نختار ضلع المربع

الصغير حتى تكون مساحة

الجزء الملوّن ثلاث أرباع مساحة الورقة المربعة ؟



نموذج ① اختبار الفصل الثاني

التمرين الأول: 09 نقاط

لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي : $f(x)=\frac{-2x+3}{x-1}$ ، و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.أثبت أن مهما يكن x من $\mathbb{R}-\{1\}$ فان : $f(x)=a+\frac{b}{x-1}$ حيث: b,a عددان حقيقيان يطلب تعينهما.

2.نضع : $a=-2$ و $b=1$.

أ- أدرس تغيرات الدالة f على المجال $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$.

ب- شكل جدول تغيرات الدالة f .

3- بين أن النقطة $\Omega(0;-3)$ تنتمي الى (C_f). ماذا تمثل هذه النقطة بيانيا؟

4- عين نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل $(x'x)$.

5 -أ-بين أنه يمكن استنتاج رسم المنحنى (C_f) انطلاقا من (H) منحنى الدالة مقلوب بانسحاب يطلب تعين شعاعه.

ب- أنشئ (C_f).

التمرين الثاني: 06 نقاط

1.ضع على الدائرة المثلثية النقط B,A و C صور الأعداد $\frac{106\pi}{4}, -\frac{112\pi}{3}$ و $\frac{2009\pi}{6}$ على الترتيب .

2.احسب القيم المضبوطة لجيب و جيب تمام كل من B,A و C .

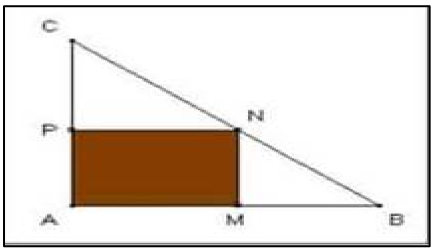
3.ليكن $0\le x\le\frac{\pi}{2}$. عين العدد الحقيقي x حتى يكون حل للمعادلة التالية: $\cos(x)=2$.

4.أ- بسط العبارة T حيث: $T=(\cos x+\sin x)^2-(\cos x-\sin x)^2$.

ب- من أجل: $x=-\pi$ عين قيمة T.

التمرين الثالث: 05نقاط

ABC مثلث قائم في A ومتساوي الساقين حيث: $AB=AC=6cm$ ، M نقطة متغيرة من الضلع $[AB]$ حيث: $AM=x$. و $(x\in[0;6])$ كما هو موضح في الشكل المقابل. لتكن N نقطة من الضلع $[BC]$ و نقطة P من الضلع $[AC]$ بحيث يصبح الرباعي $AMNP$ مستطيل.



1.نضع $S(x)$ مساحة المستطيل $AMNP$.

أ- تحقق أن : $S(x)=-x^2+6x$.

ب- باستعمال الشكل النموذجي بين أن : $S(x)=-(x-3)^2+9$

2.عين قيمة العدد الحقيقي x حتى تكون مساحة المستطيل $AMNP$ تساوي $5cm^2$.

3. عين قيمة العدد الحقيقي x حتى تكون مساحة المستطيل $AMNP$ تساوي نصف مساحة المثلث ABC .

نموذج ② اختبار الفصل الثاني

التمرين الأول : (06 نقاط)

المستوي منسوب الى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، نعتبر النقط $C(3,2)$ ، $B(\alpha,-1)$ ، $A(2,3)$ حيث α عدد حقيقي .

1- عين α حتى تكون النقط O,A,B في استقامية.

2- نعتبر الآن أن $\alpha=2$:

- عين احداثيتي النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع.

3- نعتبر النقطة $E(\frac{5}{2},\frac{5}{2})$ من هذا المستوي .

- بين أن النقطة E مركز متوازي الأضلاع $ABCD$.

4- أ- أكتب معادلة المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A و يوازي المستقيم (BC).

ب-عين احداثيي M نقطة تقاطع (Δ) مع حامل محور الفواصل.

ج- ليكن (Δ') مستقيم معادلته : $y=x+1$ ، أوجد نقطة تقاطع (Δ) و (Δ').

التمرين الثاني : (06 نقاط)

1- حول أقياس الزوايا التالية من الدرجات الى الراديان : $10°$ ، $315°$.

2- حول أقياس الزوايا التالية من الراديان الى الدرجات : $\frac{\pi}{5},\frac{3\pi}{8}$.

3- أحسب جيب و جيب تمام الأعداد : $-\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}$.

4- علم على الدائرة المثلثية النقط B,A التي صورها : $\frac{115\pi}{4}$ ، $\frac{-2467\pi}{6}$ على الترتيب.

التمرين الثالث : (08 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x^2-ax-b$ حيث a و b عددان حقيقيان، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي منسوب الى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- عين العددين الحقيقيين a و b علما أن : $f(0)=-3$ و $f(-1)=0$.

2- نضع فيما يلي : $a=2$ و $b=3$.

أ- أحسب $f(2)$ و $f(-2)$.

ب- ما قولك حول شفعية الدالة f ؟ برر اجابتك.

3- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x)=(x-1)^2-4$.

4- أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-\infty;1]$ ثم على المجال $[1;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

5- (P) التمثيل البياني للدالة "مربع" في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ- عين احداثيا شعاع الانسحاب $\vec{u}$ الذي يسمح برسم (C_f) انطلاقا من (P).

ب- في نفس المعلم أرسم بعناية (P) و (C_f).

مع تمنياتي لكم بالنجاح و التوفيق

أستاذ شعبان

تجدون هذا الملف على صفحة: *5min Maths*