

1AS



رياضيات

# ملخصات الأستاذ مصطفى

للسنة الأولى ثانوي



Prof Mustapha  
KHA-LDJI



## الفهرس

الرقم	الدرس	الصفحة
①	الأعداد والحساب	1
②	المقارنة، الترتيب، المجالات والحصص	4
③	القيمة المطلقة والمسافة	6
④	العلاقة بين المجال، الحصر، المسافة والقيمة المطلقة	7
⑤	مجموعة التعريف $D$	8
⑥	عموميات على الدوال	10
⑦	الدالة التآلفية	14
⑧	الدوال المرجعية	16
⑨	الدالة "جيب" والدالة "جيب التمام"	17
⑩	المعادلات والمترجمات	19
⑪	الإحصاء	23
⑫	الحساب الشعاعي والهندسة التحليلية	27
⑬	المعلم للمستوي	28
⑭	معادلة مستقيم	29
⑮	حل جملة معادلتين (تقاطع مستقيمين)	31
⑯	الهندسة المستوية	32
⑰	تقايس وتشابه مثلثين	39
⑱	الهندسة الفضائية	41
⑲	المحيط والمساحة	44
⑳	الحجم، المساحة الجانبية والمساحة الكلية	45

## الأعداد والحساب

### 1. المجموعات الأساسية للأعداد:

#### ① الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ :

هي أعداد لا تحتوي على إشارة و لا فاصلة و لا كسر و لا جذر و لا  $\pi$  مثل: ... 3 ; 2 ; 1 ; 0

#### ② الأعداد الصحيحة النسبية $\mathbb{Z}$ :

هي الأعداد الطبيعية + الأعداد السالبة (لا تحتوي على فاصلة و لا كسر و لا جذر و لا  $\pi$ )  
مثل: ... 3 ; 2 ; 1 ; 0 ; -1 ; -2 ; -3 ; ...

#### ③ الأعداد العشرية $\mathbb{D}$ :

- هي الأعداد الصحيحة النسبية + الأعداد التي تحتوي على فاصلة منتهية أي لا تتضمن دورا
- يمكن كتابتها على الشكل:  $\frac{p}{10^n}$  أو  $\frac{p'}{2^\alpha \times 5^\beta}$  حيث  $\{p; p'\} \in \mathbb{Z}$  و  $\{n; \alpha; \beta\} \in \mathbb{N}$ .
- لا تحتوي على جذر و لا  $\pi$

مثال:  $0,45$  ;  $\frac{1}{4}$  ;  $0,2$  ;  $\frac{53}{10^7}$  ;  $9,005$  ;  $\frac{41}{8}$

#### ④ الأعداد الناطقة $\mathbb{Q}$ :

- هي الأعداد العشرية + الأعداد التي تتضمن دورا (أي فاصلة غير منتهية)
- كل عدد ناطق يقبل كتابة على الشكل  $\frac{p}{q}$  (حيث  $p$  و  $q$  عدنان صحيحان نسبيا و  $q \neq 0$ )

مثال:  $\frac{1}{9}$  ;  $3,242424\dots$  ;  $\frac{76}{111}$  ;  $0,267267267\dots$  ;  $\frac{34}{22}$  ;  $2,333333\dots$

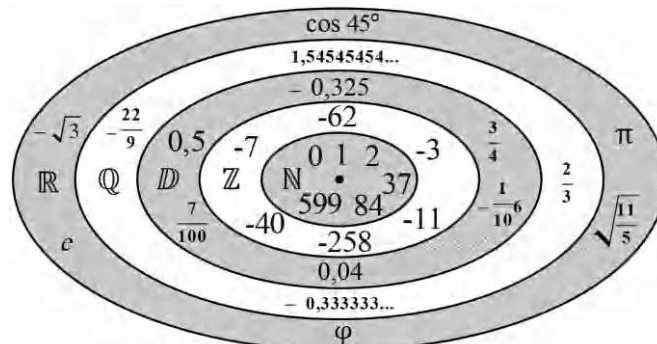
#### ⑤ الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ :

- هي أكبر مجموعة و تحتوي كل الأعداد السابقة  $\mathbb{N} + \mathbb{Z} + \mathbb{D} + \mathbb{Q}$  + الأعداد الصماء
- \* الأعداد الصماء: هي الأعداد التي لا يمكن التعبير عنها بعدد كامل أو كسر ك  $\pi$  و الجذور

◆ الأعداد الأولية: العدد الأولي هو عدد طبيعي أكبر من 1 يقبل القسمة على نفسه وعلى الواحد فقط

مثال: ... 101, 97, 89, 83, 79, 73, 71, 67, 61, 59, 53, 47, 43, 41, 37, 31, 29, 23, 19, 17, 13, 11, 7, 5, 3, 2  
(عكس العدد الأولي هو عدد مؤلف ويكتب على شكل جداء عوامل أولية)

\* مقارنة مجموعات الأعداد:



$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Prof Mustapha  
KHA-LD9

## 2. قوانين القوى:

العلاقات الخاصة	
$a^1 = a$	①
$a^0 = 1$	②
$a^n \times a^{-n} = 1$	③
$\frac{a^n}{a^n} = 1$	④
$(-1)^n = 1$ إذا كان $n$ زوجيا	⑤
$(-1)^n = -1$ إذا كان $n$ فرديا	⑥
$(a)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$	⑦

العلاقات العامة	
$a^m \times a^n = a^{m+n}$	①
$(a^m)^n = a^{m \times n}$	②
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	③
$(a \times b)^m = a^m \times b^m$	④
$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$	⑤
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	⑥

## 3. الجذور التربيعية:

$$a \geq 0 \text{ و } b > 0$$

- $b^2 = a \Rightarrow \sqrt{a} = b$
- $(\sqrt{a})^2 = a$
- $\sqrt{a} \geq 0$

- $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

## 4. القيمة المضبوطة، القيمة المقربة:

(a) المدور

$A$  عدد حقيقي مكتوب في شكله العشري، وليكن  $d$  رقمه العشري ذا الرتبة  $1 + p$

نسمي مدور  $A$  إلى  $10^{-p}$  العدد الذي نحصل عليه كما يلي:

- إذا كان  $d \geq 5$  نأخذ العدد بأرقامه العشرية إلى الرقم العشري الذي رتبته  $p$  ونضيف 1 إلى هذا الرقم
- إذا كان  $d < 5$  نأخذ العدد بأرقامه العشرية إلى الرقم العشري الذي رتبته  $p$

(b) الكتابة العلمية

هي كتابة عدد عشري بحيث يكون هناك رقم واحد غير معدوم قبل الفاصلة أو كتابته على الشكل  $a \times 10^n$

حيث  $a \in \mathbb{D}$  و  $1 \leq a < 10$  و  $n \in \mathbb{Z}$

(c) رتبة مقدار

① نكتب العدد على الشكل العلمي

② نحفظ بقوة 10 ثم ندور العدد إلى العدد الصحيح الأقرب منه (التدوير إلى الوحدة)

Prof Mustapha  
KHA-LDJ

## 5. الأولوية في الحساب:

- ① الحسابات داخل الأقواس
- ② الحسابات المتعلقة بالقوى و الجذور
- ③ عمليات الضرب و القسمة حسب ترتيب كتابتها
- ④ عمليات الجمع و الطرح حسب ترتيب كتابتها

## 6. من الكتابة العشرية الدورية لعدد ناطق إلى الكتابة الكسرية له

- ① نسمي العدد  $A$  و نكتبه على الشكل  $A = a + x$  حيث  $a$  هو الجزء الصحيح و  $x$  هو الجزء العشري
- ② نكتب المعادلة "الجزء العشري  $x$ " ثم نضرب طرفيها في  $10^n$  حيث  $n$  عدد أرقام الدور
- ③ نكتب العدد العشري الجديد كمجموع جزئيه الصحيح و العشري
- ④ نعوض الجزء العشري ب  $x$  ثم نحل المعادلة ذات المجهول  $x$
- ⑤ أخيرا نعوض  $x$  في المعادلة  $A = a + x$  ثم نحسب  $A$

## 7. اختبار أولية عدد طبيعي

- ① نختبر قابلية قسمة العدد على كل من الأعداد الأولية حسب ترتيبها التصاعدي
- ② نتوقف عن عمليات القسمة عند أول باق معدوم أو عندما نصادف أول حاصل قسمة أصغر من القاسم
- ③ في الأخير إذا كان الباقي معدوم فإن العدد غير أولي وإلا فهو أولي.

## 8. تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية

- ① نقسم العدد على أصغر عدد أولي يكون قاسما له
  - ② نقسم حاصل القسمة على أصغر عدد أولي يكون قاسما له
  - ③ نكرر العملية ② حتى نصل إلى حاصل قسمة يساوي 1
- كتابة جداء هذه القواسم هو تحليل العدد إلى جداء عوامل أولية

## 9. استعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية

- 1.9. لحساب المضاعف المشترك الأصغر  $PPCM$  لعددتين أو عدة أعداد  
نحسب جداء العوامل الأولية الغير مشتركة و المشتركة لها مأخوذة مرة واحدة بأكبر أس
- 2.9. لحساب القاسم المشترك الأكبر  $PGCD$  لعددتين أو عدة أعداد  
نحسب جداء العوامل الأولية المشتركة لها مأخوذة مرة واحدة بأصغر أس
- 3.9. للاختزال (كتابة كسر على شكل غير قابل للاختزال)  
نحل كلا من البسط و المقام إلى جداء عوامل أولية ثم نطبق قوانين القوى للاختزال الكسر  
طريقة 2: نحسب  $PGCD$  للبسط و المقام بقسمة خوارزمية إقليدس ثم نقسمهما عليه

## 10. معرفة هل الكسر عدد عشري أو ناطق

- ① نكتب الكسر على شكل غير قابل للاختزال
- ② نحلل المقام إلى جداء عوامل أولية
- ③ إذا كان هذا التحليل لا يشمل إلا قوى 2 أو 5 فالعدد عشري وإلا فهو ناطق

## المقارنة، الترتيب، المجالات والحصص

### 1. المقارنة في $\mathbb{R}$

$$a > b \Rightarrow a - b > 0$$

$$a < b \Rightarrow a - b < 0$$

$$a = b \Rightarrow a - b = 0$$

$$\begin{cases} a \leq b \\ b \leq c \end{cases} \Rightarrow a \leq c$$

### 2. عمليات و قواعد على الترتيب

#### ① الجمع

$$a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$$

$$\begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases} \Rightarrow a + c \leq b + d$$

#### ② الضرب

$$a \leq b \Rightarrow a \times c \leq b \times c \quad \text{إذا كان } c > 0 \text{ فإن:}$$

$$a \leq b \Rightarrow a \times c \geq b \times c \quad \text{إذا كان } c < 0 \text{ فإن:}$$

$$\begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases} \Rightarrow a \times c \leq b \times d \quad \text{إذا كان } \{a; b; c; d\} \in \mathbb{R}^+ \text{ فإن:}$$

$$\begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases} \Rightarrow a \times c \geq b \times d \quad \text{إذا كان } \{a; b; c; d\} \in \mathbb{R}^- \text{ فإن:}$$

#### ③ التربيع

$$a \leq b \Rightarrow a^2 \leq b^2 \quad \text{إذا كان } \{a; b\} \in \mathbb{R}^+ \text{ فإن:}$$

$$a \leq b \Rightarrow a^2 \geq b^2 \quad \text{إذا كان } \{a; b\} \in \mathbb{R}^- \text{ فإن:}$$

#### ④ الجذر

$$a \leq b \Rightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b} \quad \text{إذا كان } \{a; b\} \in \mathbb{R}^+ \text{ فإن:}$$

#### ⑤ المقلوب

إذا كان  $a$  و  $b$  عدنان حقيقيان غير معدومين و من نفس الإشارة فإن:

$$a \leq b \Rightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$$

#### ⑥ القوة

$$a \geq 1 \Rightarrow a \leq a^2 \leq a^3$$

$$0 \leq a \leq 1 \Rightarrow a \geq a^2 \geq a^3$$

### 3. المجالات

#### ① رموز بعض المجالات

الرمز	المجال
$\mathbb{R}^+$	$[0; +\infty[$
$\mathbb{R}^-$	$] -\infty; 0]$
$\mathbb{R}^*$	$] -\infty; 0[ \cup ] 0; +\infty[$
$\mathbb{R}^{*+}$	$] 0; +\infty[$
$\mathbb{R}^{*-}$	$] -\infty; 0[$
$\mathbb{R} - \{a\}$	$] -\infty; a[ \cup ] a; +\infty[$
$\mathbb{R} - \{a; b\}$	$] -\infty; a[ \cup ] a; b[ \cup ] b; +\infty[$

② أنواع المجالات

التمثيل	الحصص	المجال
	$a \leq x \leq b$	$[a; b]$
	$a \leq x < b$	$[a; b[$
	$a < x \leq b$	$]a; b]$
	$a < x < b$	$]a; b[$
	$x \leq b$	$] -\infty; b]$
	$x < b$	$] -\infty; b[$
	$x \geq a$	$[a; +\infty[$
	$x > a$	$]a; +\infty[$

③ تقاطع و اتحاد مجالين

تقاطع مجالين  $I \cap J$ : هي مجموعة الأعداد التي تنتمي إلى  $I$  و  $J$  (أي العناصر المشتركة بينهما فقط)

اتحاد مجالين  $I \cup J$ : هي مجموعة الأعداد التي تنتمي إلى  $I$  أو  $J$  (أي العناصر المشتركة و الغير مشتركة)

4. الحصر \*

$$c \leq y \leq d \quad ; \quad a \leq x \leq b$$

① المجموع:

$$a + c \leq x + y \leq b + d$$

② الجداء:

$$\{a; b; c; d; x; y\} \in \mathbb{R}^+ \quad \text{حيث} \quad a \times c \leq x \times y \leq b \times d$$

\*ملاحظة: لا توجد قاعدة عامة لعملية الطرح والقسمة ما بين حصرين لذلك نقوم بما يلي:

③ الطرح:  $x + (-y)$

(a) نضرب الحصر المراد طرحه في (-1) فيصبح:  $-d \leq -y \leq -c$

(b) نجمع الحصرين طرفا لطرف:  $a + (-d) \leq x + (-y) \leq b + (-c)$

④ القسمة:  $x \times \left(\frac{1}{y}\right)$  إذا كان  $\{c; d; y\} \in \mathbb{R}^{*+}$  و  $\{a; b; x\} \in \mathbb{R}^+$

(a) نقوم بعملية المقلوب على الحصر المراد القسمة عليه فيصبح:  $\frac{1}{d} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{c}$

(b) نضرب الحصرين طرفا لطرف:  $a \times \left(\frac{1}{d}\right) \leq x \times \left(\frac{1}{y}\right) \leq b \times \left(\frac{1}{c}\right)$

تغير اتجاه المتباينة (المراجعة):

① عندما نضرب في عدد سالب

② عندما نقسم على عدد سالب

③ مقلوب طرفين من نفس الإشارة

④ مربع طرفين سالبين

⑤ القيمة المطلقة لطرفين سالبين

Prof Mustapha  
KdHA-LDS

## القيمة المطلقة والمسافة

### I. القيمة المطلقة $|x|$

#### (1) تعريف القيمة المطلقة:

• الهدف من القيمة المطلقة هو جعل جميع القيم موجبة  
\* ومنه نستنتج أن القيمة المطلقة تترك العدد الموجب لحاله بينما تسبق العدد السالب بإشارة (-) ليصبح موجب.

مثال:

$$\begin{aligned} |3| &= 3 \\ |-5| &= -(-5) = 5 \end{aligned}$$

\* إذن القاعدة: بما أن  $x$  مجهول فهناك حالتان إما موجب أو سالب

$$|x| = \begin{cases} x & \text{لما } x \geq 0 \text{ (موجب)} \\ -x & \text{لما } x \leq 0 \text{ (سالب)} \end{cases}$$

$$|x| = \begin{cases} x & ; x \in [0; +\infty[ \\ -x & ; x \in ]-\infty; 0] \end{cases}$$

#### (2) خواص القيمة المطلقة:

- $|x| = |-x|$
- $|x| \times |y| = |x \times y|$
- $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} ; y \neq 0$
- إذا كان  $x$  و  $y$  مختلفين في الإشارة ;  $|x + y| < |x| + |y|$
- إذا كان  $x$  و  $y$  من نفس الإشارة ;  $|x + y| = |x| + |y|$
- $\sqrt{x^2} = |x|$

### II. المسافة

$$\text{(1) المسافة بين نقطتين: } \begin{array}{ccccccc} & a & & 0 & & 1 & & b \\ & \times & & \bullet & & \times & & \times \\ & A & & O & & I & & B \end{array}$$

المسافة بين نقطتين  $A$  و  $B$  فاصلتهما  $a$  و  $b$  على الترتيب من مستقيم مزود بمعلم  $(O; \vec{I})$  هي:

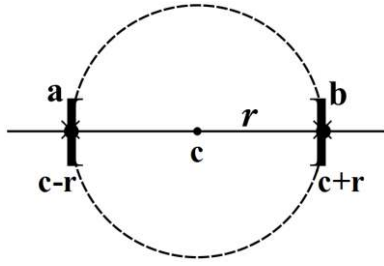
$$AB = |a - b| = |b - a|$$

#### (2) المسافة بين عددين:

المسافة بين عددين  $x$  و  $y$  هي:  $d(x; y) = |x - y| = |y - x|$

Prof Mustapha  
KHA-LD9

## العلاقة بين المجال، الحصر، المسافة والقيمة المطلقة



❖ عناصر المجال:  $[a; b]$

• مركزه:  $c = \frac{a+b}{2}$

• طوله (قطره):  $b - a$

• نصف قطره:  $r = \frac{b-a}{2}$

• حده:  $a = c - r$

• حده:  $b = c + r$

Prof Mustapha  
KdH.A.L.D.J

❖ من أجل كل  $x \in [a; b]$ :

▪  $x \in [c - r; c + r]$

▪  $c - r \leq x \leq c + r$

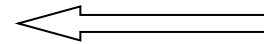
▪  $d(x; c) \leq r$

▪  $|x - c| \leq r$

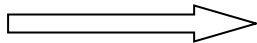
❖ الجدول:

القيمة المطلقة	المسافة	الحصر	المجال
$ x - c  \leq r$	$d(x; c) \leq r$	$a \leq x \leq b$	$x \in [a; b]$

❖ ملأ الجدول:



القيمة المطلقة	المسافة	الحصر	المجال
$\left  x - \frac{a+b}{2} \right  \leq \frac{b-a}{2}$	$d\left(x; \frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{b-a}{2}$	$a \leq x \leq b$	$x \in [a; b]$



القيمة المطلقة	المسافة	الحصر	المجال
$ x - c  \leq r$	$d(x; c) \leq r$	$c - r \leq x \leq c + r$	$x \in [c - r; c + r]$

الطريقة:

$$\begin{cases} a = c - r \\ b = c + r \end{cases} ; \begin{cases} c = \frac{a+b}{2} \\ r = \frac{b-a}{2} \end{cases}$$



## إذن القاعدة:

- 1 لا كسر و لا جذر:  $D_f = \mathbb{R} = ]-\infty; +\infty[$
- 2 في الكسر نكتب:  $0 \neq$  المقام
- 3 في الجذر نكتب:  $0 \geq$  ما داخل الجذر
- 4 في مجموع، طرح، جداء أو قسمة دالتين فأكثر:  $D_f$  هي تقاطع مجالات تعريف كل هذه الدوال

## 3 الملخص:

الدالة	مجموعة التعريف
كثير الحدود $f(x)$	$D_f = \mathbb{R} = ]-\infty; +\infty[$
$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / h(x) \neq 0\}$
$f(x) = \sqrt{g(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / g(x) \geq 0\}$
$f(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{h(x)}}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / h(x) > 0\}$
$f(x) = \sqrt{g(x)} + \frac{h(x)}{k(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / g(x) \geq 0 \wedge k(x) \neq 0\}$
$f(x) = \frac{\sqrt{g(x)}}{\sqrt{h(x)}}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / g(x) \geq 0 \wedge h(x) > 0\}$
$f(x) = \sqrt{\frac{g(x)}{h(x)}}$	$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{g(x)}{h(x)} \geq 0 \wedge h(x) \neq 0 \right\}$

حيث  $g(x)$ ،  $h(x)$  و  $k(x)$  كلها دوال كثيرات حدود

## 4 العمليات على الدوال ومجموعة التعريف:

$f$  و  $g$  دالتان معرفتان على  $D_f$  و  $D_g$  على الترتيب.  $e$  و  $k$  عدنان حقيقيان.

العملية	مجموعة التعريف
$f + k$	$D_f$
$kf$	$D_f$
$f + g$	$D_f \cap D_g$
$f \times g$	$D_f \cap D_g$
$\frac{f}{g}$	$\{x \in D_f \cap D_g \wedge g(x) \neq 0\}$
$f \circ g$ أي $f[g(x)]$	$D_{f \circ g} = \{x / x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}$

Prof Mustapha  
KdH.A.S.DG

## عموميات على الدوال

### I. تعريف ومصطلحات

Prof Mustapha

KHA-LD

- الدالة ببساطة هي العبارة التي ترفق بكل عدد  $x$  صورة له  $y$
- نرسم للدوال بالرمز  $f(x)$ ،  $g(x)$ ،  $h(x)$ ... الخ
- تسمى  $f(x)$  أو  $y$  حيث  $f(x) = y$  الدالة أو الصورة أو الترتيبية
- يسمى  $x$  المتغير أو السابقة أو الفاصلة
- كل دالة معرفة على مجال يسمى مجموعة التعريف  $D$

\*ملاحظة مهمة

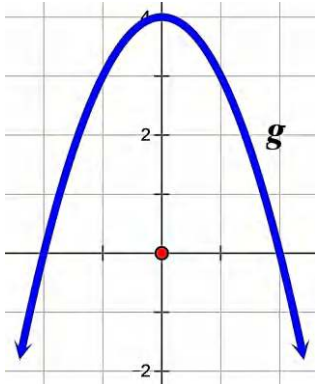
يمكن للصورة أن يكون لها عدة سوابق لكن العكس غير صحيح للسابقة صورة وحيدة فقط

### II. طرق تعريف الدوال

① دالة معرفة بدستور

مثال:  $f(x) = x^2 + 2x + 1$

- مجموعة تعريف الدالة  $f$  هي  $D_f = \mathbb{R} = ]-\infty; +\infty[$
- صورة العدد 3 بالدالة  $f$  هي  $f(3) = 3^2 + 2(3) + 1 = 16$
- سوابق العدد 1 بالدالة  $f$  هي  $f(x) = 1$  أي  $x^2 + 2x + 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0$
- $x(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  أو  $x = -2$



② دالة معرفة بتمثيل بياني

مثال: الشكل المقابل يمثل تمثيل بياني لدالة  $g$

- مجموعة تعريف الدالة  $g$  هي  $D_g = ]-3; 3[$
- صورة العدد 1 بالدالة  $g$  هي 3 و صورة 0 هي 4
- سوابق العدد 3 بالدالة  $g$  هي 1 و -1 و سوابق 0 هي 2 و -2
- العدد 5 ليس له سوابق بالدالة  $g$

③ دالة معرفة بجدول تغيرات

مثال: الجدول المقابل يمثل جدول تغيرات لدالة  $h$

$x$	0	4	9	$+\infty$
تغيرات $h$	0	2	3	

- مجموعة تعريف الدالة  $h$  هي  $D_h = [0; +\infty[$
- صورة العدد 0 بالدالة  $h$  هي 0 و صورة 4 هي 2
- سابقة العدد 3 بالدالة  $h$  هي 9
- العدد -1 ليس له سوابق بالدالة  $h$

④ دالة معرفة بجدول قيم

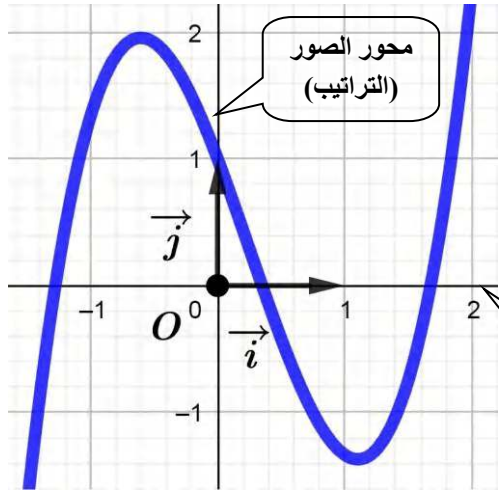
مثال: يمثل الجدول المقابل تعريفات بريد الجزائر لسنة 2005

إذا رمزنا للطرد البريدية بالدالة  $h$  فإن:

- مجموعة تعريف الدالة  $h$  هي  $D_h = [0; 30]$
- صورة 12 بالدالة  $h$  هي 62
- سوابق 83 هي كل الأعداد من المجال  $]15; 20]$
- مثلا العدد 70 ليس له سوابق بالدالة  $h$

الطرد البريدية	
التعريف (DA)	الوزن (Kg)
25	$]0; 5]$
40	$]5; 10]$
62	$]10; 15]$
83	$]15; 20]$
110	$]20; 30]$

## III. التمثيل البياني لدالة



- ◀ التمثيل البياني أو المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المعلم  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  هو مجموعة النقط  $M(x; y)$  حيث  $x \in D_f$  و  $y = f(x)$
- ◀ نرمز إلى منحنى الدالة  $f$  بالرمز  $C_f$
- ◀ نقول أن  $y = f(x)$  هي معادلة  $C_f$  في المعلم  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

## \*تنبيه وملاحظة مهمة

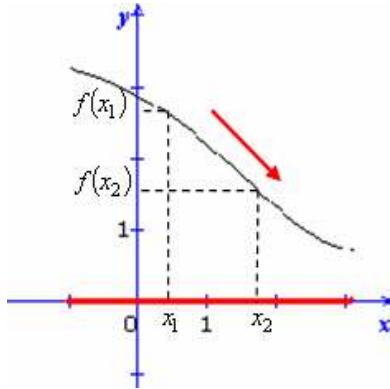
ما عدا الدوال الخطية، التآلفية والثابتة لا يمكن رسم أي دالة أخرى عن طريق الجدول المساعد أو النقاط المساعدة لأنه هناك العديد من الكيفيات للمرور من نقطة إلى أخرى فمن الضروري أن تعطى معلومات أخرى حول سلوك الدالة وسنتعلم في محور الدوال المرجعية إحدى الطرق الرئيسية لرسم الدوال.

## IV. تغيرات الدالة

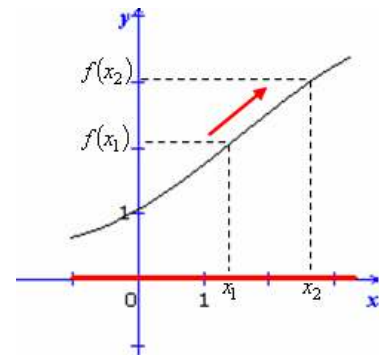
① دراسة اتجاه التغير: تعيين المجالات التي تكون فيها الدالة متزايدة تماما، متناقصة تماما أو ثابتة

فإن	و	إذا كان	
$f$ متزايدة	$f(x_1) < f(x_2)$	$x_1 < x_2$	①
$f$ متناقصة	$f(x_1) > f(x_2)$	$x_1 < x_2$	②
$f$ ثابتة	$f(x_1) = f(x_2)$		③

Prof Mustapha  
KdH-A-LD9

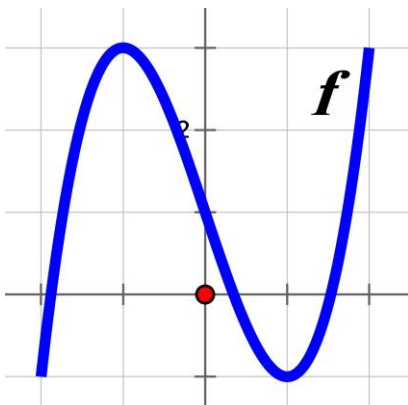


$f(x_2)$  ،  $f(x_1)$  في عكس  $x_2$  ،  $x_1$   
الدالة المتناقصة تعكس الترتيب



$f(x_2)$  ،  $f(x_1)$  في نفس ترتيب  $x_2$  ،  $x_1$   
الدالة المتزايدة تحفظ الترتيب

② جدول التغيرات: هو جدول نلخص فيه كل المعطيات عن الدوال كمجموعة التعريف واتجاه التغير والصور والسوابق والقيم الحدية... الخ

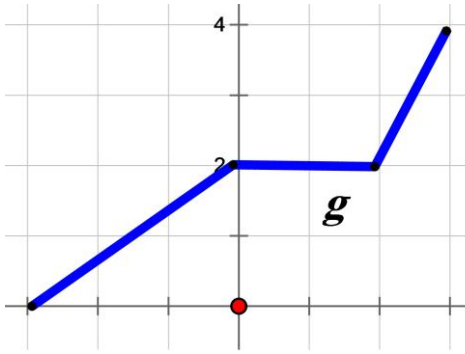


مثال: جدول التغيرات التالي يلخص المنحنى المقابل للممثل للدالة  $f$

$x$	-2	-1	1	2
$f(x)$	-1	3	-1	3

## \* الفرق بين متزايدة ومتزايدة تماما

مثال:



- الدالة  $g$  متزايدة تماما على المجال  $[-3; 0]$
- الدالة  $g$  ثابتة على المجال  $[0; 2]$
- الدالة  $g$  متزايدة تماما على المجال  $[2; 3]$

\* لكن على المجال  $[-3; 3]$  نقول فقط أن الدالة  $g$  متزايدة

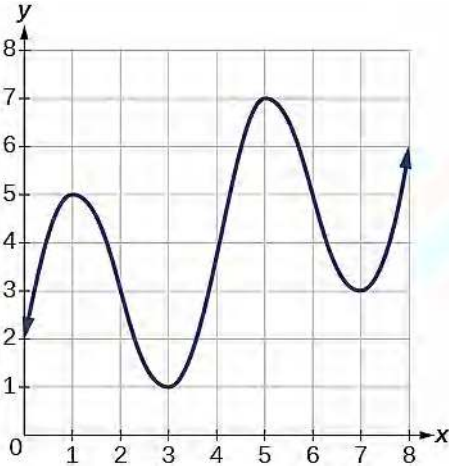
○ نفس المفهوم بالنسبة لمتناقصة ومنتقصة تماما

## [V]. القيم الحدية

① القيمة الحدية العظمى: هي أكبر صورة  $f(a)$  تبلغها  $f$  عند سابقة  $a$  من  $D_f$ 

نعتبر عليها وفق المثال بثلاث صيغ فنقول:

- القيمة الحدية الكبرى للدالة  $f$  هي  $(5; 7)$
- أو القيمة الحدية الكبرى للدالة  $f$  هي  $7$  عند  $5$
- أو القيمة الحدية الكبرى للدالة  $f$  هي  $f(5) = 7$

② القيمة الحدية الصغرى: هي أصغر صورة  $f(b)$  تبلغها  $f$  عندسابقة  $b$  من  $D_f$ 

نعتبر عليها وفق المثال بثلاث صيغ فنقول:

- القيمة الحدية الصغرى للدالة  $f$  هي  $(3; 1)$
- أو القيمة الحدية الصغرى للدالة  $f$  هي  $1$  عند  $3$
- أو القيمة الحدية الصغرى للدالة  $f$  هي  $f(3) = 1$

## \* ملاحظة:

- يمكن للدالة أن تبلغ قيمتها العظمى أو الصغرى على مجال عند أكثر من عنصر من هذا المجال
- القيم الحدية دائما تكون عددا حقيقيا (بمعنى  $-\infty$  و  $+\infty$  لا يمكن أن يكونا قيم حدية)

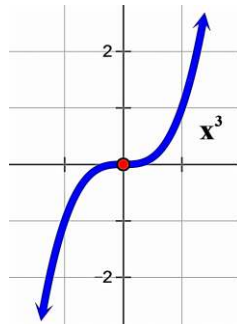
## [VI]. شفعية الدالة (أي زوجية أو فردية أم لا زوجية لا فردية)

① حسابيا

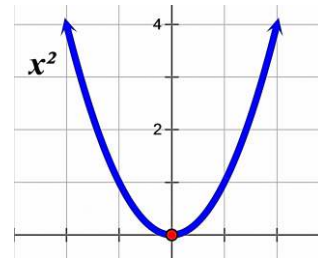
$$\left. \begin{array}{l} D_f \text{ متناظرة بالنسبة إلى } 0 \\ f(-x) = -f(x) \end{array} \right\} \leftarrow \text{فردية } f$$

$$\left. \begin{array}{l} D_f \text{ متناظرة بالنسبة إلى } 0 \\ f(-x) = f(x) \end{array} \right\} \leftarrow \text{زوجية } f$$

② بيانيا



الدالة الفردية متناظرة بالنسبة للمبدأ



الدالة الزوجية متناظرة بالنسبة لمحور الترتيب

③ الدالة لا زوجية لا فردية: هي الدالة التي لا يمكن كتابتها على الشكل  $f(-x) = f(x)$  ولا علىالشكل  $f(-x) = -f(x)$  ومنحناها غير متناظر بالنسبة لمحور الترتيب ولا بالنسبة للمبدأ\* ملاحظة: للبرهان أن دالة ما لا زوجية ولا فردية يكفي إيجاد عنصر  $a$  من  $D_f$  بحيث  $f(-a) \neq f(a)$ و  $f(-a) \neq -f(a)$  أو إثبات أن  $D_f$  غير متناظرة بالنسبة إلى  $0$ Prof Mustapha  
KHA-LDS

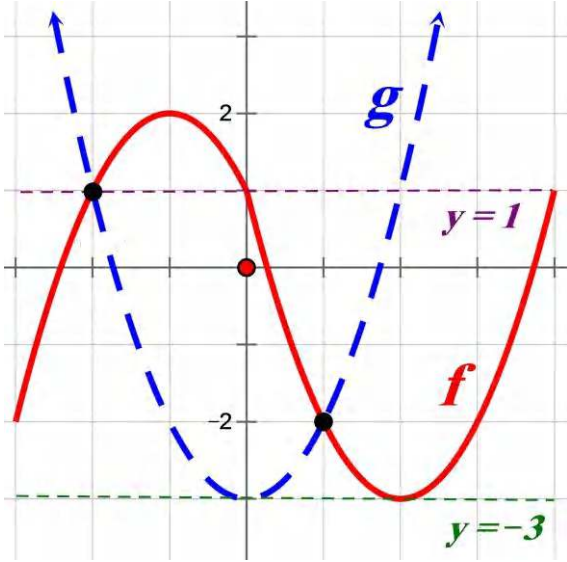
## [VII]. حل معادلات و متراجحات بيانيا

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \text{فواصل تقاطع } C_f \text{ مع } C_g$$

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow \text{المجال من } x \text{ أين يكون } C_f \text{ فوق } C_g$$

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow \text{المجال من } x \text{ أين يكون } C_f \text{ تحت } C_g$$

مثال شامل:



$$D_g = [-2, 5; 2, 5] \text{ و } D_f = [-3; 4]$$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x \in \{-2; 1\}$$

$$f(x) \geq g(x) \Rightarrow x \in [-2; 1]$$

$$f(x) > g(x) \Rightarrow x \in ]-2; 1[$$

$$f(x) \leq g(x) \Rightarrow x \in [-3; -2] \cup [1; 4]$$

$$f(x) < g(x) \Rightarrow x \in ]-3; -2[ \cup ]1; 4[$$

$$f(x) = 1 \Rightarrow x \in \{-2; 0; 4\}$$

$$f(x) \geq 1 \Rightarrow x \in [-2; 0]$$

$$f(x) < 1 \Rightarrow x \in [-3; -2[ \cup ]0; 4]$$

$$g(x) = 1 \Rightarrow x \in \{-2; 2\}$$

$$g(x) > 1 \Rightarrow x \in [-2, 5; -2[ \cup ]2; 2, 5]$$

$$g(x) \leq 1 \Rightarrow x \in [-2; 2]$$

$$f(x) = -3 \Rightarrow x = 2$$

$$g(x) = -3 \Rightarrow x = 0$$

\* نرسم للمجموعة الخالية بالرمز  $\emptyset$  أو بالرمز  $\{\}$ 

$$f(x) \geq -3 \Rightarrow x \in [-3; 4]$$

$$g(x) > -3 \Rightarrow x \in [-2, 5; 0[ \cup ]0; 2, 5]$$

$$f(x) \leq -3 \Rightarrow x = 2$$

$$g(x) < -3 \Rightarrow S = \emptyset$$

$$f(x) \geq 3 \Rightarrow S = \emptyset$$

$$g(x) \leq -4 \Rightarrow S = \emptyset$$

## [VIII]. إشارة الدالة

① حسابيا

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow f \text{ موجبة}$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow f \text{ سالبة}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow f \text{ معدومة}$$

② بيانيا

$$f \text{ موجبة} \Leftrightarrow C_f \text{ فوق محور الفواصل}$$

$$f \text{ سالبة} \Leftrightarrow C_f \text{ تحت محور الفواصل}$$

$$f \text{ معدومة} \Leftrightarrow C_f \text{ يقطع محور الفواصل}$$

## [IX]. تقاطع دالة مع محوري الاحداثيات

$$C_f \text{ يقطع محور الفواصل} \Leftrightarrow f(x) = 0$$

$$C_f \text{ يقطع محور الترتيب} \Leftrightarrow x = 0$$

Prof Mustapha

KdH-A-LD9

## الدالة التآلفية

[I]. الشكل العام (الدستور):  $f(x) = ax + b$

Prof Mustapha  
KdH.A.LD9

\* يسمى  $a$  معامل التوجيه و  $b$  الترتيب إلى المبدأ

\* إذا كان  $b = 0$  تسمى  $f$  دالة خطية

\* إذا كان  $a = 0$  تسمى  $f$  دالة ثابتة

[II]. تعريف

$f$  تآلفية  $\Leftrightarrow$  النسبة  $\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}$  ثابتة من أجل كل عددين حقيقيين مختلفين  $x$  و  $x'$

معناه:  $f$  تآلفية  $\Leftrightarrow$  تزايد الصور متناسب مع تزايد الترتيب

[III]. التمثيل البياني

التمثيل البياني لدالة التآلفية هو المستقيم الذي معامل توجيهه  $a$  و يشمل النقطة  $(0; b)$

التمثيل البياني	العبرة العامة	
يمر من المبدأ	$f(x) = ax$	الدالة الخطية
لا يمر من المبدأ (يمر من $b$ على محور الترتيب)	$f(x) = ax + b$	الدالة التآلفية
يوازي محور الفواصل	$f(x) = b$	الدالة الثابتة

[IV]. حساب معامل التوجيه (الميل)  $a$ :

• دالة خطية:  $a = \frac{f(x)}{x}$

• دالة تآلفية:  $a = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$  مع  $x_2 \neq x_1$

[V]. إيجاد العبرة الجبرية لدالة تآلفية بيانيا

مثال: (الشكل 1)

• لا تمر من المبدأ إذن دالة تآلفية

ومنه:  $f(x) = ax + b$

• الترتيب إلى المبدأ هو المعامل  $b$

إذن  $b = -2$

• نتقدم بوحدة إلى اليمين انطلاقاً من  $b$  ثم نصعد أو نهبط

لنصل إلى المستقيم  $(D)$

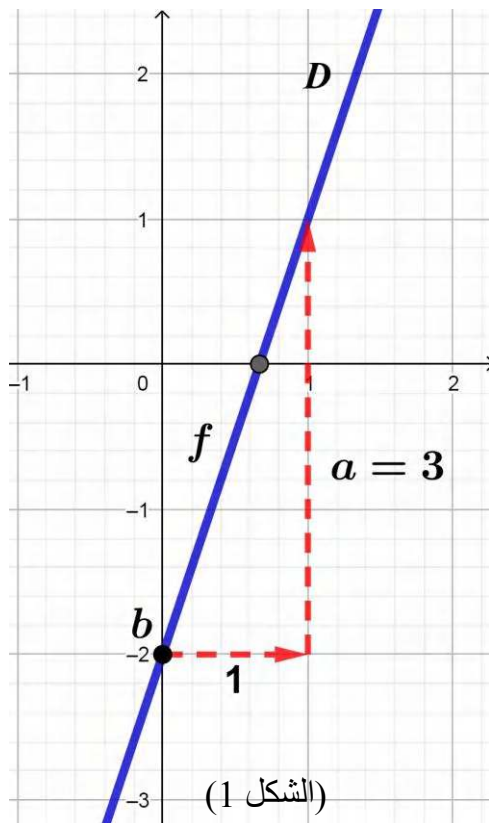
○ إذا نصعد ف  $a$  موجب

○ إذا نهبط ف  $a$  سالب

إذن  $a = 3$

و منه:  $f(x) = 3x - 2$

\* التمثيل البياني للدالة  $f(x)$  هو المستقيم  $(D)$  معادلته هي:  $y = 3x - 2$



Prof Mustapha  
KdH-A-LD9

[VI]. اتجاه تغير دالة تآلفية

- إذا كان  $a > 0$  فإن  $f$  متزايدة تماما
- إذا كان  $a < 0$  فإن  $f$  متناقصة تماما

[VII]. جدول تغيرات دالة تآلفية

إذا كان  $a < 0$

$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	↘ 0 ↘		

إذا كان  $a > 0$

$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	↗ 0 ↗		

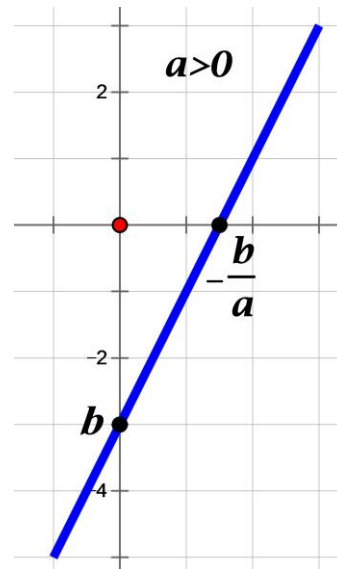
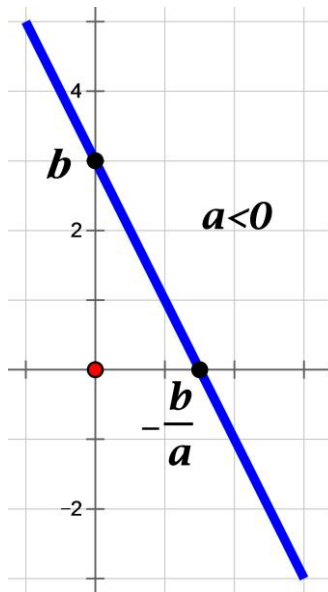
[VIII]. إشارة  $ax + b$

إذا كان  $a < 0$

$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
إشارة $ax + b$	+	0	-

إذا كان  $a > 0$

$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
إشارة $ax + b$	-	0	+



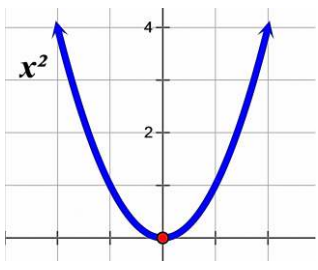
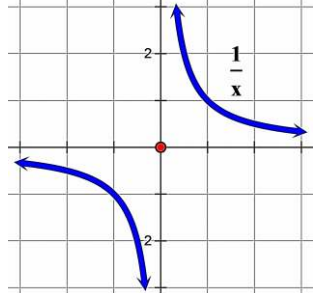
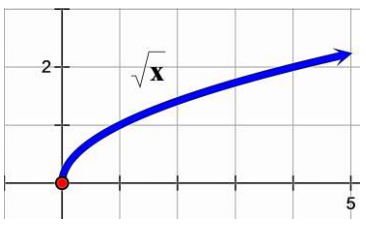
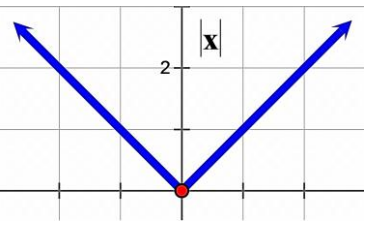
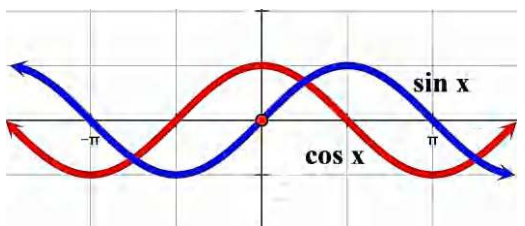
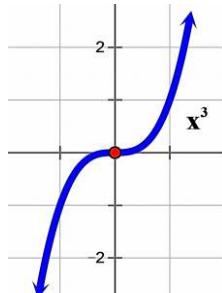
[IX]. إشارة جداء عبارة من الشكل  $(ax + b)(cx + d)$  أو حاصل قسمة من الشكل  $\frac{ax+b}{cx+d}$

مثال 2:  $g(x) = \frac{2x+3}{1-x}$

مثال 1:  $f(x) = (2x + 3)(1 - x)$

$x$	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	1	$+\infty$
$2x + 3$	-	○	+	+
$1 - x$	+	+	○	-
$g(x)$	-	○	+	-

$x$	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	1	$+\infty$
$2x + 3$	-	○	+	+
$1 - x$	+	+	○	-
$f(x)$	-	○	+	-

التمثيل البياني للدالة المرجعية	الشكل المرجعي	الدالة المرجعية
	$f(x) = a(x + b)^2 + c$ <p>لرسم الدالة:            (1) نرسم المنحنى <math>y = ax^2</math>            (2) نرسم المنحنى الجديد <math>C_f</math> إما:            • بشعاع الانسحاب: <math>\vec{v}(-b; c)</math>            • أو بمعلم جديد مبدؤه: <math>w(-b; c)</math></p>	<p>مربع</p> $f(x) = x^2$ <p>(زوجية)</p>
	$f(x) = \frac{a}{x + b} + c$ <p>لرسم الدالة:            (1) نرسم المنحنى <math>y = \frac{a}{x}</math>            (2) نرسم المنحنى الجديد <math>C_f</math> إما:            • بشعاع الانسحاب: <math>\vec{v}(-b; c)</math>            • أو بمعلم جديد مبدؤه: <math>w(-b; c)</math></p>	<p>مقلوب</p> $f(x) = \frac{1}{x}$ <p>(فردية)</p>
	$f(x) = a\sqrt{x + b} + c$ <p>لرسم الدالة:            (1) نرسم المنحنى <math>y = a\sqrt{x}</math>            (2) نرسم المنحنى الجديد <math>C_f</math> إما:            • بشعاع الانسحاب: <math>\vec{v}(-b; c)</math>            • أو بمعلم جديد مبدؤه: <math>w(-b; c)</math></p>	<p>جذر تربيعي</p> $f(x) = \sqrt{x}$ <p>(لا زوجية لا فردية)</p>
	$f(x) = a x + b  + c$ <p>لرسم الدالة:            (1) نرسم المنحنى <math>y = a x </math>            (2) نرسم المنحنى الجديد <math>C_f</math> إما:            • بشعاع الانسحاب: <math>\vec{v}(-b; c)</math>            • أو بمعلم جديد مبدؤه: <math>w(-b; c)</math></p>	<p>قيمة مطلقة</p> $f(x) =  x $ <p>(زوجية)</p>
	$f(x) = a \sin(x + b) + c$ $g(x) = a \cos(x + b) + c$ <p>لرسم الدالة:            (1) نرسم المنحنى <math>y = a \sin x</math>            أو <math>y = a \cos x</math>            (2) نرسم المنحنى الجديد <math>C_f</math> إما:            • بشعاع الانسحاب: <math>\vec{v}(-b; c)</math>            • أو بمعلم جديد مبدؤه: <math>w(-b; c)</math></p>	<p>الدالتان</p> <p><math>\sin x</math></p> <p>(فردية)</p> <p>و</p> <p><math>\cos x</math></p> <p>(زوجية)</p>
	$f(x) = a(x + b)^3 + c$ <p>لرسم الدالة:            (1) نرسم المنحنى <math>y = ax^3</math>            (2) نرسم المنحنى الجديد <math>C_f</math> إما:            • بشعاع الانسحاب: <math>\vec{v}(-b; c)</math>            • أو بمعلم جديد مبدؤه: <math>w(-b; c)</math></p>	<p>مكعب</p> $f(x) = x^3$ <p>(فردية)</p>

Prof Mustapha

KHA-LD9

## ① الدالة "جيب" والدالة "جيب التمام"

مبرهنات

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\cos(-x) = \cos x \Rightarrow \text{زوجية } \cos$$

$$\sin(-x) = -\sin x \Rightarrow \text{فردية } \sin$$

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x$$

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x$$

$$\cos(x + \pi) = -\cos x$$

$$\sin(x + \pi) = -\sin x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

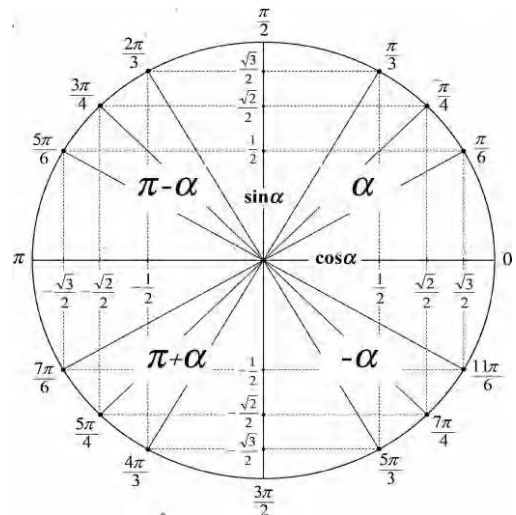
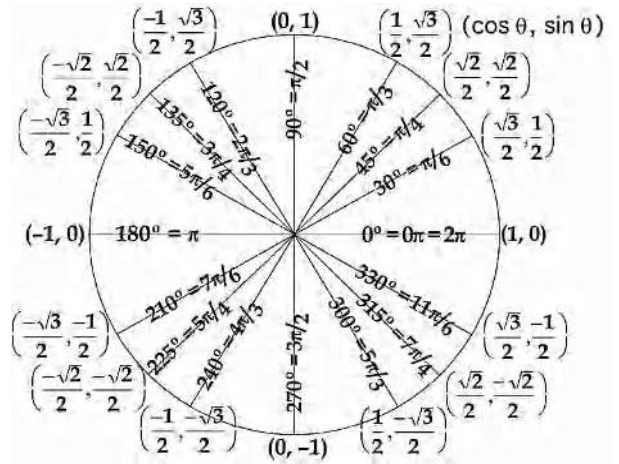
$$\cos y = \cos x \Rightarrow \begin{cases} y = x + 2k\pi \\ y = -x + 2k\pi \end{cases}$$

$$\sin y = \sin x \Rightarrow \begin{cases} y = x + 2k\pi \\ y = \pi - x + 2k\pi \end{cases}$$

جدول زوايا شهيرة

$x$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

الدائرة المثلثية



$$\sin \alpha = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} ; \quad \cos \alpha = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

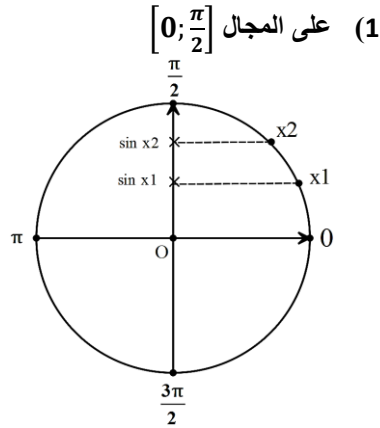
$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

Prof Mustapha

KATA-LD9

## الدالة "جيب" والدالة "جيب التمام" ②

اتجاه تغير الدالة  $\sin x$  :

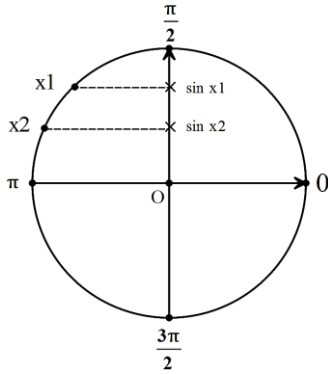


إذا كان:  $x_1 < x_2$

فإن:  $\sin x_1 < \sin x_2$  (حسب الإسقاط الأفقي)

و منه الدالة  $\sin x$  متزايدة تماما على المجال  $[0; \frac{\pi}{2}]$

(2) على المجال  $[\frac{\pi}{2}; \pi]$



إذا كان:  $x_1 < x_2$

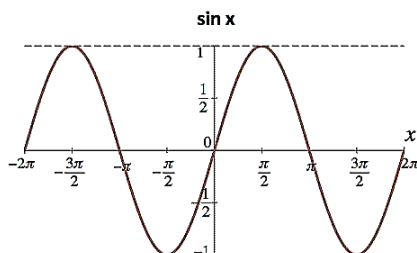
فإن:  $\sin x_1 > \sin x_2$  (حسب الإسقاط الأفقي)

و منه الدالة  $\sin x$  متناقصة تماما على المجال  $[\frac{\pi}{2}; \pi]$

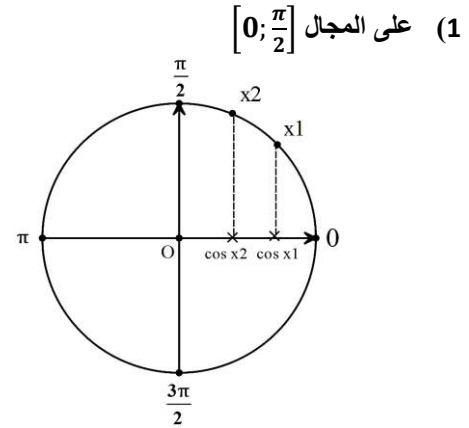
جدول تغيرات الدالة  $\sin x$  :

$x$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
$\sin x$	0	1	0

بيان الدالة "  $\sin x$  "



اتجاه تغير الدالة  $\cos x$  :

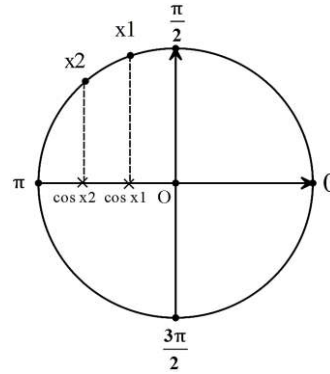


إذا كان:  $x_1 < x_2$

فإن:  $\cos x_1 > \cos x_2$  (حسب الإسقاط العمودي)

و منه الدالة  $\cos x$  متناقصة تماما على المجال  $[0; \frac{\pi}{2}]$

(2) على المجال  $[\frac{\pi}{2}; \pi]$



إذا كان:  $x_1 < x_2$

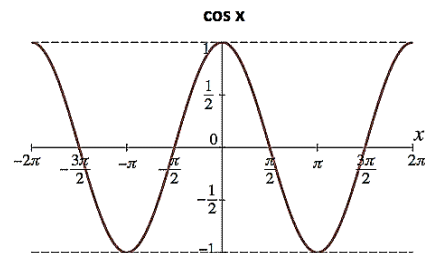
فإن:  $\cos x_1 > \cos x_2$  (حسب الإسقاط العمودي)

و منه الدالة  $\cos x$  متناقصة تماما على المجال  $[\frac{\pi}{2}; \pi]$

جدول تغيرات الدالة  $\cos x$  :

$x$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
$\cos x$	1	0	-1

بيان الدالة "  $\cos x$  "



## المعادلات والمتراجحات

[I]. المتطابقات الشهيرة (مراجعة)

(1) المتطابقات الشهيرة للنشر:

$$(a + b)^2 = (a)^2 + (b)^2 + 2(a)(b)$$

$$(a - b)^2 = (a)^2 + (b)^2 - 2(a)(b)$$

$$(a - b)(a + b) = (a)^2 - (b)^2$$

(2) المتطابقات الشهيرة للتحليل:

$$(a)^2 + (b)^2 + 2(a)(b) = (a + b)^2$$

$$(a)^2 + (b)^2 - 2(a)(b) = (a - b)^2$$

$$(a)^2 - (b)^2 = (a - b)(a + b)$$

[II]. ترابط الدوال المؤدية من  $x$  إلى  $f(x)$ ننتقل من  $x$  إلى  $f(x)$  بتطبيق دالتين على التوالي: الدالة التالفية ثم الدالة المرجعية المناسبةمثال 1:

$$f(x) = (2x - 1)^2$$

$$x \xrightarrow{u} 2x - 1 \xrightarrow{v} (2x - 1)^2$$

$$\text{إذن } \boxed{u(x) = 2x - 1} \text{ و } \boxed{v(x) = x^2}$$

$$\text{ومنه } f(x) = v[u(x)] = v(2x - 1) = (2x - 1)^2$$

مثال 2:

$$g(x) = 3(x + 5)^2 - 7$$

$$x \xrightarrow{u} x + 5 \xrightarrow{v} 3(x + 5)^2 - 7$$

$$\text{إذن } \boxed{u(x) = x + 5} \text{ و } \boxed{v(x) = 3x^2 - 7}$$

$$\text{ومنه } g(x) = v[u(x)] = v(x + 5) = 3(x + 5)^2 - 7$$

مثال 3:

$$h(x) = \frac{1}{x-4} + 6$$

$$x \xrightarrow{u} x - 4 \xrightarrow{v} \frac{1}{x-4} + 6$$

$$\text{إذن } \boxed{u(x) = x - 4} \text{ و } \boxed{v(x) = \frac{1}{x} + 6}$$

$$\text{ومنه } h(x) = v[u(x)] = v(x - 4) = \frac{1}{x-4} + 6$$

مثال 4:

$$g(x) = \sqrt{x + 3} - 2$$

$$x \xrightarrow{u} x + 3 \xrightarrow{v} \sqrt{x + 3} - 2$$

$$\text{إذن } \boxed{u(x) = x + 3} \text{ و } \boxed{v(x) = \sqrt{x} - 2}$$

$$\text{ومنه } g(x) = v[u(x)] = v(x + 3) = \sqrt{x + 3} - 2$$

Prof Mustapha  
KdHA-LD9

[III]. معادلات يؤول حلها إلى حل معادلات من الدرجة الأولى ذات مجهول واحد

- $A(x) \times B(x) = 0 \Rightarrow A(x) = 0$  أو  $B(x) = 0$
- $[A(x)]^n = 0 \Rightarrow A(x) = 0$
- $\frac{A(x)}{B(x)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} A(x) = 0 \\ B(x) \neq 0 \end{cases}$

[IV]. إشارة معادلة من الدرجة الأولى  $ax + b$

$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	عكس إشارة $a$	0	إشارة $a$

- $A(x) \times B(x) \geq 0 \Rightarrow$  استنتاج الحل من جدول الإشارة
- $\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} A(x) \times B(x) \geq 0 \\ B(x) \neq 0 \end{cases}$

[V]. المتطابقات الهامة

$$(a + b)^3 = (a)^3 + 3(a)^2(b) + 3(a)(b)^2 + (b)^3$$

$$(a - b)^3 = (a)^3 - 3(a)^2(b) + 3(a)(b)^2 - (b)^3$$

$$(a + b)^4 = (a)^4 + 4(a)^3(b) + 6(a)^2(b)^2 + 4(a)(b)^3 + (b)^4$$

$$(a - b)^4 = (a)^4 - 4(a)^3(b) + 6(a)^2(b)^2 - 4(a)(b)^3 + (b)^4$$

$$(a + b)^5 = (a)^5 + 5(a)^4(b) + 10(a)^3(b)^2 + 10(a)^2(b)^3 + 5(a)(b)^4 + (b)^5$$

$$(a - b)^5 = (a)^5 - 5(a)^4(b) + 10(a)^3(b)^2 - 10(a)^2(b)^3 + 5(a)(b)^4 - (b)^5$$

[VI]. حل معادلات و المتراجحات من الدرجة الثانية  $ax^2 + bx + c$

① حساب المميز

Prof Mustapha

KdH-A-LD9

$$\Delta = (b)^2 - 4(a)(c)$$

② الشكل النموذجي

$$ax^2 + bx + c = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

③ ملخص حل وإشارة وتحليل معادلة من الدرجة الثانية من الشكل  $E = ax^2 + bx + c$

$\Delta = (b)^2 - 4(a)(c)$																											
$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$	إذا كان																								
تقبل حلين متميزين $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ ; $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	تقبل حل مضاعف $x_0 = \frac{-b}{2a}$	لا تقبل حلول	فإن المعادلة																								
<table border="1"> <tr> <td><math>x</math></td> <td><math>-\infty</math></td> <td><math>x_1</math></td> <td><math>x_2</math></td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td><math>E</math></td> <td colspan="2">إشارة <math>a</math> ○</td> <td>عكس إشارة <math>a</math> ○</td> <td>إشارة <math>a</math> ○</td> </tr> </table>	$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$	$E$	إشارة $a$ ○		عكس إشارة $a$ ○	إشارة $a$ ○	<table border="1"> <tr> <td><math>x</math></td> <td><math>-\infty</math></td> <td><math>x_0</math></td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td><math>E</math></td> <td colspan="2">إشارة <math>a</math> ○</td> <td>إشارة <math>a</math> ○</td> </tr> </table>	$x$	$-\infty$	$x_0$	$+\infty$	$E$	إشارة $a$ ○		إشارة $a$ ○	<table border="1"> <tr> <td><math>x</math></td> <td><math>-\infty</math></td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td><math>E</math></td> <td colspan="2">إشارة <math>a</math> ○</td> </tr> </table>	$x$	$-\infty$	$+\infty$	$E$	إشارة $a$ ○		إشارتها
$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$																							
$E$	إشارة $a$ ○		عكس إشارة $a$ ○	إشارة $a$ ○																							
$x$	$-\infty$	$x_0$	$+\infty$																								
$E$	إشارة $a$ ○		إشارة $a$ ○																								
$x$	$-\infty$	$+\infty$																									
$E$	إشارة $a$ ○																										
$E = a(x - x_1)(x - x_2)$	$E = a(x - x_0)^2$	لا تقبل تحليلا	تحليلها																								

④ المميز المختصر: (إذا كان  $b$  زوجي)

$b' = \frac{b}{2}$			
$\Delta' = (b')^2 - (a)(c)$			
$\Delta' > 0$	$\Delta' = 0$	$\Delta' < 0$	إذا كان
تقبل حلين متميزين $x_1 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$ ; $x_2 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$	تقبل حل مضاعف $x_0 = \frac{-b'}{a}$	لا تقبل حلول	فإن المعادلة

ملاحظات

Prof Mustapha

KHACEDJ

• إذا كان  $a + b + c = 0$  فإن:

$$x_1 = 1 \quad ; \quad x_2 = \frac{c}{a}$$

• إذا كان  $a - b + c = 0$  فإن:

$$x_1 = -1 \quad ; \quad x_2 = -\frac{c}{a}$$

• جداء ومجموع حلي معادلة من الدرجة 2:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad ; \quad x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

Prof Mustapha

KdA-LD9

مركز تناظر

$$f(2a - x) + f(x) = 2b \Leftrightarrow \text{طريقة 1: } W(a; b) \text{ مركز تناظر} \checkmark$$

$$f(a + x) + f(a - x) = 2b \Leftrightarrow \text{طريقة 2: } W(a; b) \text{ مركز تناظر} \checkmark$$

طريقة 3: دستور تغيير معلم  $\checkmark$

$$\begin{cases} x = a + X \\ y = b + Y \end{cases} \Leftrightarrow W(a; b) \text{ مركز تناظر}$$

(1) إيجاد معادلة الدالة في المعلم الجديد:

$$Y = f(a + X) - b$$

(2) إثبات أن  $Y$  دالة فردية.

محور تناظر

$$f(2a - x) = f(x) \Leftrightarrow \text{طريقة 1: } x = a \text{ محور تناظر} \checkmark$$

$$f(a + x) = f(a - x) \Leftrightarrow \text{طريقة 2: } x = a \text{ محور تناظر} \checkmark$$

طريقة 3: دستور تغيير معلم  $\checkmark$

$$\begin{cases} x = a + X \\ y = Y \end{cases} \Leftrightarrow x = a \text{ محور تناظر}$$

(1) إيجاد معادلة الدالة في المعلم الجديد:

$$Y = f(a + X)$$

(2) إثبات أن  $Y$  دالة زوجية.

## الإحصاء ①

Prof Mustapha

KdH-A-LD9

I. قيم

## ① الجدول

القيم	* ترتب القيم في الجدول ترتيبا تصاعديا
التكرار	(عدد الأفراد: التلاميذ، العمال، العلامات...)
التكرار النسبي (التواتر) $f$	$\frac{\text{تكرار القيمة}}{\text{التكرار الكلي}}$
التكرار المجمع الصاعد	تكرار القيمة + تكرار القيم الأصغر منها
التواتر المجمع الصاعد	$\frac{\text{التكرار المجمع الصاعد}}{\text{التكرار الكلي}}$
التكرار المجمع النازل	تكرار القيمة + تكرار القيم الأكبر منها
	أو مجموع التكرارات - تكرار القيم الأصغر منها
التواتر المجمع النازل	$\frac{\text{التكرار المجمع النازل}}{\text{التكرار الكلي}}$

② الوسط الحسابي ( $\bar{x}$ )

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{i=k} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{i=k} n_i}$$

أو

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{i=k} f_i x_i$$

مجموع جداءات القيم بتكراراتها  
التكرار الكلي

مجموع جداءات القيم بتواترها

## ③ المدى = أكبر قيمة - أصغر قيمة

## ④ المنوال (Mod): هي القيمة الموافقة لأكبر تكرار

## ⑤ الوسيط (Med):

N: هو المجموع (التكرار الكلي)

✓ إذا كان N فرديا: أي  $N = 2p + 1$ ▪ رتبة الوسيط هي  $p + 1$  أو  $\frac{N+1}{2}$ 

▪ الوسيط هي القيمة التي تكرارها المجمع الصاعد أكبر أو يساوي رتبة الوسيط

✓ إذا كان N زوجيا: أي  $N = 2p$ 

من التكرار المجمع الصاعد:

▪ الوسيط = نصف مجموع القيمتين اللتين رتبتهما  $p$  و  $p + 1$ = نصف مجموع القيمتين اللتين رتبتهما  $\frac{N}{2} + 1$  و  $\frac{N}{2}$ 

\*ملاحظة: يمكن استنتاج قيمة ورتبة الوسيط من تقاطع منحنى ت.م.ص و ت.م.ن

Prof Mustapha

KdH-A-LD9

.III فئات

1 الجدول

* ترتب الفئات في الجدول ترتيبا تصاعديا	الفئات $[a; b]$ أو $a \leq x < b$
$\frac{a+b}{2}$ أي $\frac{\text{الحد الأول للفئة} + \text{الحد الأخير}}{2}$	مراكز الفئات
(عدد الأفراد: التلاميذ، العمال، العلامات...)	التكرار
$\frac{\text{تكرار القيمة}}{\text{التكرار الكلي}}$	التكرار النسبي (التواتر) $f$
تكرار القيمة + تكرار القيم الأصغر منها	التكرار المجمع الصاعد
$\frac{\text{التكرار المجمع الصاعد}}{\text{التكرار الكلي}}$	التواتر المجمع الصاعد
تكرار القيمة + تكرار القيم الأكبر منها	طريقتين
أو مجموع التكرارات - تكرار القيم الأصغر منها	
$\frac{\text{التكرار المجمع النازل}}{\text{التكرار الكلي}}$	التكرار المجمع النازل
	التواتر المجمع النازل

2 الوسط الحسابي ( $\bar{x}$ )

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{i=k} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{i=k} n_i}$$

أو

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{i=k} f_i x_i$$

مجموع جداءات مراكز الفئات بتواترها

مجموع جداءات مراكز الفئات بتكراراتها  
التكرار الكلي

3 المدى = أكبر حد في السلسلة - أصغر حد في السلسلة

4 مدى الفئة (طول الفئة)  $l = \text{الحد الأكبر} - \text{الحد الأصغر}$ 

5 الفئة المنوالية (Mod): هي الفئة الموافقة لأكبر تكرار

6 رتبة الوسيط  $P$ :✓ إذا كان  $N$  فرديا: أي  $N = 2p + 1 \Leftrightarrow$  رتبة الوسيط هي  $P = p + 1$  أو  $P = \frac{N+1}{2}$ ✓ إذا كان  $N$  زوجيا: أي  $N = 2p \Leftrightarrow$  رتبة الوسيط هي  $P = \frac{N}{2}$ 

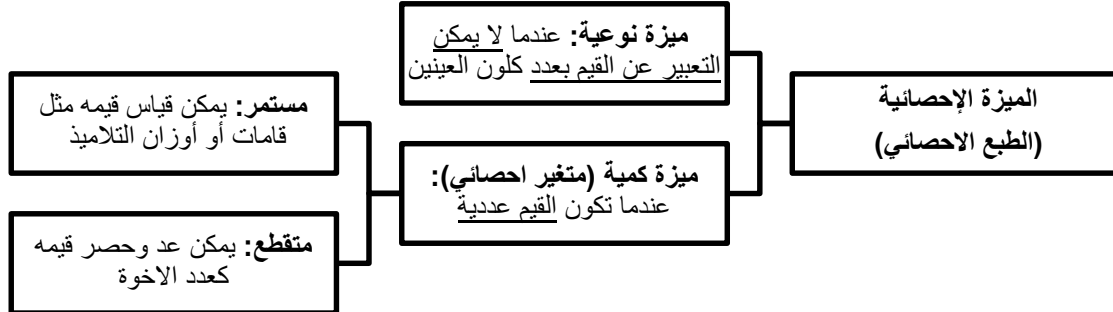
7 الفئة الوسيطة: هي الفئة الأولى التي تكرارها المجمع الصاعد أكبر أو يساوي رتبة الوسيط

$$m = a + \frac{r}{d} \times l \quad \text{8 الوسيط:}$$

 $d$ : تكرار الفئة الوسيطة $l$ : طول الفئة الوسيطةحيث:  $m$ : هو الوسيط $a$ : هي بداية الفئة الوسيطة $r$ : رتبة الوسيط في الفئة الوسيطة\* طريقة لحساب  $r$ : (ت.م.ص للفئة السابقة)  $r = P -$  حيث  $P$  هو رتبة الوسيط في السلسلة

## الإحصاء ②

### I. الميزة الإحصائية



### II. المؤشرات

① مؤشرات الموقع: هي المنوال والوسيط والوسط الحسابي

② مؤشر التشتت: هو المدى

### III. تذبذب العينات والمحاكاة

- عينة إحصائية: هي سلسلة إحصائية تتكون من نتائج تجربة أجريت  $n$  مرة (مثل رمي قطعة نقدية 15 مرة)
- تذبذب العينات: عندما ننجز تجربة  $n$  مرة، نتحصل على عينة مقاسها  $n$ ، وعندما نعيد نفس التجربة  $n$  مرة في نفس الظروف نجد عينة أخرى مقاسها  $n$ . تسمى هذه الظاهرة تذبذب العينات
- تجربة عشوائية: هي كل تجربة لا يمكن توقع نتائجها مسبقا
- المحاكاة: محاكاة تجربة عشوائية يعني اختيار نموذج لهذه التجربة

مثال:

- التجربة العشوائية: ميلاد بنت أو ولد في 10 عائلات.
- نموذج لهذه التجربة: حظوظ ميلاد بنت تساوي حظوظ ميلاد ولد.
- تنفيذ محاكاة توزيع الجنس في 10 عائلات: برمي زهر نرد غير مزيف 10 مرات. نرفق الوجوه 2، 4، 6 بالنتيجة "بنت" والوجوه 1، 3، 5 بالنتيجة "ولد".

\* خواص الوسط الحسابي:

$$\overline{x + a} = \bar{x} + a \quad \blacksquare$$

$$\overline{x \times a} = \bar{x} \times a \quad \blacksquare$$

- الوسط الحسابي: نرسم له بالرمز  $\bar{X}$
- المنوال: نرسم له بالرمز  $Mod$
- الوسيط: نرسم له بالرمز  $Med$
- التكرار الكلي: نرسم له بالرمز  $N$

Prof Mustapha  
KdH-A-LD9

Prof Mustapha KHA-LDJ

## التمثيلات البيانية

\* أهمية التمثيلات تكمن في أنها طريقة مختصرة وشاملة تزودنا بمعلومات بسرعة وبصورة أوضح.

## أنواع التمثيلات البيانية

مخطط بالأعمدة (الفارق بين القيم غير ثابت)	مخطط بالأعمدة (الفارق بين القيم ثابت)																																											
<table border="1"> <caption>مخطط بالأعمدة (الفارق بين القيم غير ثابت)</caption> <thead> <tr> <th>العلامات</th> <th>عدد التلاميذ</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>2</td><td>4</td></tr> <tr><td>3</td><td>5</td></tr> <tr><td>5</td><td>7</td></tr> <tr><td>7</td><td>10</td></tr> <tr><td>8</td><td>2</td></tr> <tr><td>9</td><td>2</td></tr> </tbody> </table>	العلامات	عدد التلاميذ	2	4	3	5	5	7	7	10	8	2	9	2	<table border="1"> <caption>مخطط بالأعمدة (الفارق بين القيم ثابت)</caption> <thead> <tr> <th>الأعمار</th> <th>التراتب</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>8</td><td>2</td></tr> <tr><td>9</td><td>5</td></tr> <tr><td>10</td><td>5</td></tr> <tr><td>11</td><td>2</td></tr> </tbody> </table>	الأعمار	التراتب	8	2	9	5	10	5	11	2	<p>المخطط بالأعمدة *قيم* (طبع احصائي متقطع)</p>																		
العلامات	عدد التلاميذ																																											
2	4																																											
3	5																																											
5	7																																											
7	10																																											
8	2																																											
9	2																																											
الأعمار	التراتب																																											
8	2																																											
9	5																																											
10	5																																											
11	2																																											
<p>مدرج التكرارات (الفئات مختلفة الطول)</p> <p>1. تمثل أصغر فئة طولها <math>a</math> وتكرارها <math>n</math> بمستطيل بعده <math>a</math> و <math>n</math></p> <p>2. أي فئة أخرى طولها <math>a_i</math> وتكرارها <math>n_i</math> تمثلها بمستطيل بعده <math>a_i</math> والارتفاع <math>\frac{n_i}{k_i}</math> حيث <math>k_i = \frac{a_i}{a}</math></p>	<p>مدرج التكرارات (الفئات متساوية الطول)</p> <p>"مساحة كل مستطيل متناسبة مع التكرار"</p>	<p>المدرج التكراري *فئات* (طبع احصائي مستمر)</p>																																										
<table border="1"> <caption>مدرج التكرارات (الفئات مختلفة الطول)</caption> <thead> <tr> <th>بداة الصلابة بالساعات</th> <th><math>\frac{n_i}{k_i}</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>200</td><td>2</td></tr> <tr><td>300</td><td>10</td></tr> <tr><td>400</td><td>8</td></tr> <tr><td>700</td><td>4</td></tr> <tr><td>900</td><td>4</td></tr> </tbody> </table>	بداة الصلابة بالساعات	$\frac{n_i}{k_i}$	200	2	300	10	400	8	700	4	900	4	<table border="1"> <caption>مدرج التكرارات (الفئات متساوية الطول)</caption> <thead> <tr> <th>الأعمار</th> <th>التكرارات</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>6</td><td>10</td></tr> <tr><td>8</td><td>30</td></tr> <tr><td>10</td><td>10</td></tr> <tr><td>12</td><td>20</td></tr> <tr><td>14</td><td>20</td></tr> </tbody> </table>	الأعمار	التكرارات	6	10	8	30	10	10	12	20	14	20																			
بداة الصلابة بالساعات	$\frac{n_i}{k_i}$																																											
200	2																																											
300	10																																											
400	8																																											
700	4																																											
900	4																																											
الأعمار	التكرارات																																											
6	10																																											
8	30																																											
10	10																																											
12	20																																											
14	20																																											
<p>مخطط دائري (تمثيل بالتكرارات)</p> <table border="1"> <caption>مخطط دائري (تمثيل بالتكرارات)</caption> <thead> <tr> <th>النوع</th> <th>العدد</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>السيارات السياحية</td><td>1739286</td></tr> <tr><td>الشاحنات</td><td>300171</td></tr> <tr><td>الأنواع الأخرى</td><td>938400</td></tr> </tbody> </table>	النوع	العدد	السيارات السياحية	1739286	الشاحنات	300171	الأنواع الأخرى	938400	<p>مخطط دائري (تمثيل بالنسب المئوية)</p> <table border="1"> <caption>مخطط دائري (تمثيل بالنسب المئوية)</caption> <thead> <tr> <th>الفئة</th> <th>النسبة المئوية</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>من 20 إلى 80 سنة</td><td>60%</td></tr> <tr><td>من 31 إلى 50 سنة</td><td>30%</td></tr> <tr><td>أكثر من 50 سنة</td><td>10%</td></tr> </tbody> </table>	الفئة	النسبة المئوية	من 20 إلى 80 سنة	60%	من 31 إلى 50 سنة	30%	أكثر من 50 سنة	10%	<p>المخطط الدائري <math>\alpha = 360 \times \frac{n_i}{N}</math> أو <math>\alpha = 360 \times f_i</math></p>																										
النوع	العدد																																											
السيارات السياحية	1739286																																											
الشاحنات	300171																																											
الأنواع الأخرى	938400																																											
الفئة	النسبة المئوية																																											
من 20 إلى 80 سنة	60%																																											
من 31 إلى 50 سنة	30%																																											
أكثر من 50 سنة	10%																																											
<p>مضلع التكرارات باللون الأسود (فئات)</p> <table border="1"> <caption>مضلع التكرارات باللون الأسود (فئات)</caption> <thead> <tr> <th>الفئات</th> <th>التكرار</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>10</td><td>9</td></tr> <tr><td>20</td><td>14</td></tr> <tr><td>30</td><td>11</td></tr> <tr><td>40</td><td>10</td></tr> <tr><td>50</td><td>9</td></tr> <tr><td>60</td><td>8</td></tr> </tbody> </table>	الفئات	التكرار	10	9	20	14	30	11	40	10	50	9	60	8	<p>مضلع التكرارات باللون الأحمر (قيم)</p> <table border="1"> <caption>مضلع التكرارات باللون الأحمر (قيم)</caption> <thead> <tr> <th>العلامات</th> <th>التكرارات</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>8</td><td>4</td></tr> <tr><td>9</td><td>6</td></tr> <tr><td>10</td><td>6</td></tr> <tr><td>11</td><td>5</td></tr> <tr><td>12</td><td>2</td></tr> <tr><td>13</td><td>2</td></tr> <tr><td>14</td><td>3</td></tr> </tbody> </table>	العلامات	التكرارات	8	4	9	6	10	6	11	5	12	2	13	2	14	3	<p>مضلع التكرارات</p>												
الفئات	التكرار																																											
10	9																																											
20	14																																											
30	11																																											
40	10																																											
50	9																																											
60	8																																											
العلامات	التكرارات																																											
8	4																																											
9	6																																											
10	6																																											
11	5																																											
12	2																																											
13	2																																											
14	3																																											
<p>مضلع التواترات باللون الأحمر</p> <table border="1"> <caption>مضلع التواترات باللون الأحمر</caption> <thead> <tr> <th>العلامات</th> <th>التواترات</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>0.2</td></tr> <tr><td>3</td><td>0.3</td></tr> <tr><td>5</td><td>0.2</td></tr> <tr><td>7</td><td>0.35</td></tr> <tr><td>9</td><td>0.15</td></tr> <tr><td>11</td><td>0.2</td></tr> <tr><td>13</td><td>0.15</td></tr> <tr><td>15</td><td>0.2</td></tr> <tr><td>17</td><td>0.15</td></tr> <tr><td>19</td><td>0.15</td></tr> </tbody> </table>	العلامات	التواترات	1	0.2	3	0.3	5	0.2	7	0.35	9	0.15	11	0.2	13	0.15	15	0.2	17	0.15	19	0.15	<table border="1"> <caption>مضلع التواترات باللون الأحمر</caption> <thead> <tr> <th>العلامات</th> <th>التواترات</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>8</td><td>0.2</td></tr> <tr><td>9</td><td>0.3</td></tr> <tr><td>10</td><td>0.3</td></tr> <tr><td>11</td><td>0.25</td></tr> <tr><td>12</td><td>0.1</td></tr> <tr><td>13</td><td>0.1</td></tr> <tr><td>14</td><td>0.15</td></tr> <tr><td>15</td><td>0.15</td></tr> <tr><td>16</td><td>0.15</td></tr> </tbody> </table>	العلامات	التواترات	8	0.2	9	0.3	10	0.3	11	0.25	12	0.1	13	0.1	14	0.15	15	0.15	16	0.15	<p>مضلع التواترات</p>
العلامات	التواترات																																											
1	0.2																																											
3	0.3																																											
5	0.2																																											
7	0.35																																											
9	0.15																																											
11	0.2																																											
13	0.15																																											
15	0.2																																											
17	0.15																																											
19	0.15																																											
العلامات	التواترات																																											
8	0.2																																											
9	0.3																																											
10	0.3																																											
11	0.25																																											
12	0.1																																											
13	0.1																																											
14	0.15																																											
15	0.15																																											
16	0.15																																											

## الحساب الشعاعي والهندسة التحليلية

### I. مراجعة

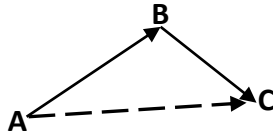
- الشعاعان المتعاكسان
- لهما نفس الطول
  - لهما نفس المنحى (متوازيان)
  - متعاكسان في الإتجاه

- الشعاعان المتساويان
- لهما نفس الطول
  - لهما نفس المنحى (متوازيان)
  - لهما نفس الإتجاه

- $\overrightarrow{BA}$  هو معاكس الشعاع  $\overrightarrow{AB}$  ونكتب  $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$
- $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} - (-\overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BA}$
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$  (مجموع شعاعان متعاكسان =  $\vec{0}$ )
- $\|\overrightarrow{AB}\| = \text{طويلة شعاع} = \text{طول شعاع} = \text{طول } AB$
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow$  لهما نفس الاحداثيات
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  معناه  $[AD]$  و  $[BC]$  لهما نفس المنتصف

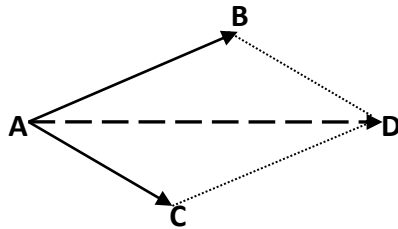
### II. مجموع شعاعين

(1) نهاية الشعاع الأول هي بداية الشعاع الثاني (علاقة شال):



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

(2) بداية الشعاع الأول هي بداية الشعاع الثاني:



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$$

### III. الارتباط الخطي لشعاعين

$\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{CD}$  مرتبطان خطيا  $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k \overrightarrow{CD}$  حيث  $k \in \mathbb{R}$

$$(\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ و } \overrightarrow{CD} \text{ مرتبطان خطيا})$$

$$\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k \overrightarrow{CD}$$

### IV. استقامة ثلاث نقاط A, B, C

$$\overrightarrow{AB} = k \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow A, B, C \text{ على استقامة واحدة}$$

$$\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow A, B, C \text{ على استقامة واحدة}$$

## المعلم للمستوي

## I. مراجعة

$$A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$$

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$	حساب إحداثيي الشعاع $\overrightarrow{AB}$	①
$M \left( \frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$	حساب إحداثيي $M$ منتصف القطعة $[AB]$	②
$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$	حساب الطول $AB$ (المسافة بين نقطتين $A$ و $B$ )	③
$\ \overrightarrow{AB}\  = AB = \sqrt{x^2 + y^2}$	حساب طول شعاع $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	④

## II. العلاقة بين شعاعين

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$	تساوي شعاعين	①
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$	مجموع شعاعين	②
$k \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$	إحداثيي الشعاع $k\overrightarrow{AB}$	③
$\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow xy' - x'y = 0$	الارتباط الخطي لشعاعين (شرط توازي شعاعين)	④
$xy' = x'y$		

## III. الأساس و المعلم للمستوي

إذا كان  $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$  و  $A$  نقطة معلومة فإن:

- أساس  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$
- معلم للمستوي  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

IV. إحداثيي نقطة  $A(x_A; y_A)$  في معلم جديد مبدؤه  $M(x_M; y_M)$ 

$$\begin{cases} X_A = x_A - x_M \\ Y_A = y_A - y_M \end{cases}$$

Prof Mustapha

KdH-LD9

## معادلة مستقيم

Prof Mustapha

KHA-LD9

[I]. مفاهيم أساسية

◆ كل شعاع يوازي مستقيم هو شعاع توجيه له

◆ (AB) و (CD) لهما نفس معامل التوجيه  $\Leftrightarrow (AB) // (CD)$ 

[II]. حساب معامل وشعاع توجيه مستقيم

المستقيم	$ax + by + c = 0$	$y = ax + b$
معامل توجيهه (الميل)	$-\frac{a}{b}$	$a$
شعاع توجيهه	$\vec{v} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$	$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$

\* معامل توجيه مستقيم يشمل نقطتين  $A(x_A; y_A)$  ،  $B(x_B; y_B)$  هو  $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ 

[III]. قاعدة المستقيمان المتوازيان

المستقيمان المتوازيان لهما نفس معامل التوجيه ونفس شعاع التوجيه

[IV]. المعادلة المكافئة: يمكن الانتقال من المعادلة  $ax + by + c = 0$  إلى المعادلة  $y = ax + b$  بتغيير

أطراف المساواة و بضرب أو قسمة المعاملات على عدد حقيقي غير معدوم.

مثال: كل المعادلات التالية متكافئة ولنفس المعادلة.

$$2x - y - 4 = 0 \Leftrightarrow -2x + y + 4 = 0 \Leftrightarrow -6x + 3y + 12 = 0$$

$$y = 2x - 4 \Leftrightarrow 12x - 6y - 24 = 0 \Leftrightarrow -12x + 6y + 24 = 0 \Leftrightarrow$$

[V]. طرق إيجاد معادلة مستقيم

1) مستقيم يشمل نقطتين

[I]. طريقة ① (الارتباط الخطي)

مثال: إيجاد معادلة المستقيم (AB) حيث:

$$B(4; 5) ; A(1; -1)$$

① حساب مركبة  $\overline{AB}$ 

$$\overline{AB} \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 5 - (-1) \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

② نفرض النقطة  $M(x; y)$  حيث  $M \in (AB)$ ③ نحسب مركبة  $\overline{AM}$ 

$$\overline{AM} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - (-1) \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{AM} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y + 1 \end{pmatrix}$$

④ نطبق علاقة الارتباط الخطي بين  $\overline{AB}$  و  $\overline{AM}$ 

$$\overline{AB} // \overline{AM} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & x - 1 \\ 6 & y + 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 3(y + 1) - 6(x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow -6x + 3y + 9 = 0$$

إذن معادلة (AB) هي:  $y = 2x - 3$ 

✓ طريقة ② (معامل التوجيه)

مثال: إيجاد معادلة المستقيم (AB) حيث:

$$B(4; 5) ; A(1; -1)$$

① حساب معامل التوجيه  $a$ 

$$a = \frac{5 - (-1)}{4 - 1} = \frac{6}{3} = 2$$

و منه معادلة (AB) هي:  $y = 2x + b$ ② نحسب المعامل  $b$  بتعويض إحداثي  $A$  أو  $B$  في

المعادلة

$$\text{نعوض } A \text{ تصبح المعادلة } -1 = 2(1) + b$$

$$\Rightarrow b = -3$$

إذن معادلة (AB) هي:  $y = 2x - 3$ أو من الشكل:  $2x - y - 3 = 0$ 

\* بفهم المعادلة المكافئة يتمكن التلميذ من الاستيعاب الكامل للدرس وتصبح له الحرية التامة في اختيار الطريقة المناسبة له

## Prof Mustapha KHA-LSDJ

## ✓ طريقة (4) (استخلاص المعاملات)

مثال:  $E(2; 1)$ ;  $\vec{v}\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$ أوجد معادلة المستقيم (D) الذي يشمل E و شعاع توجيهه  $\vec{v}$ 

1 نستخلص المعاملات a و b من شعاع التوجيه

لدينا  $\vec{v}\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$  شعاع توجيه من الشكل  $\vec{v}\left(\begin{smallmatrix} -b \\ a \end{smallmatrix}\right)$ و منه نستنتج أن  $\begin{cases} -b = 3 \\ a = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -3 \\ a = 4 \end{cases}$ أي معادلة (D) من الشكل  $4x - 3y + c = 0$ 

2 إيجاد المعامل c

نعوض E في المعادلة  $4x - 3y + c = 0$ 

$$\Rightarrow 4(2) - 3(1) + c = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{c = -5}$$

إذن معادلة (D) هي:  $\boxed{4x - 3y - 5 = 0}$ 

## ✓ طريقة (6) (استنتاج المعاملات)

مثال:

 $F(-3; 4)$ ; (D) مستقيم معادلته  $5x + 2y - 6 = 0$ 

أوجد معادلة المستقيم (Δ) الذي يشمل F و يوازي (D)

1  $(\Delta) \parallel (D) \Leftrightarrow (\Delta) \Leftarrow (D)$  و لهما نفس معامل

و شعاع التوجيه.

 $(\Delta) \Leftarrow (D)$  و لهما نفس المعاملين a و bو منه معادلة (Δ) من الشكل  $\boxed{5x + 2y + c = 0}$ 

2 إيجاد المعامل c

نعوض F في المعادلة  $5x + 2y + c = 0$ 

$$\Rightarrow 5(-3) + 2(4) + c = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{c = 7}$$

إذن معادلة (Δ) هي:  $\boxed{5x + 2y + 7 = 0}$  $(\Delta) \Leftarrow (D) \Leftrightarrow (\Delta) \Leftarrow (D)$  لهما نفس معامل و شعاع التوجيه

## ✓ طريقة (8) (تعويض معامل التوجيه)

مثال: أوجد معادلة المستقيم (K) الذي يشمل  $G(6; 5)$ و معامل توجيهه  $\frac{3}{2}$ 1 نعوض معامل التوجيه في المعادلة  $y = ax + b$ إذن معادلة (K) من الشكل  $y = \frac{3}{2}x + b$ 2 نعوض G في المعادلة تصبح  $5 = \frac{3}{2}(6) + b$ 

$$\Rightarrow \boxed{b = -4}$$

و منه معادلة (K) هي  $\boxed{y = \frac{3}{2}x - 4}$ أو من الشكل  $\boxed{3x - 2y - 8 = 0}$ 

## (2) مستقيم معرف بنقطة و شعاع توجيه

## ✓ طريقة (3) (الارتباط الخطي)

مثال:  $E(2; 1)$ ;  $\vec{v}\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$ أوجد معادلة المستقيم (D) الذي يشمل E و شعاع توجيهه  $\vec{v}$ 1 نفرض النقطة  $M(x; y)$  حيث  $M \in (D)$ 2 نحسب مركبة  $\overrightarrow{EM}$ 

$$\overrightarrow{EM} \begin{pmatrix} x - 2 \\ y - 1 \end{pmatrix}$$

3 نطبق علاقة الارتباط الخطي بين  $\vec{v}$  و  $\overrightarrow{EM}$ 

$$\vec{v} \parallel \overrightarrow{EM} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & x - 2 \\ 4 & y - 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 3(y - 1) - 4(x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{-4x + 3y + 5 = 0}$$

إذن معادلة (D) هي:  $\boxed{4x - 3y - 5 = 0}$ 

## (3) مستقيم يشمل نقطة و يوازي مستقيم

## ✓ طريقة (5) (الارتباط الخطي)

مثال:

 $F(-3; 4)$ ; (D) مستقيم معادلته  $5x + 2y - 6 = 0$ 

أوجد معادلة المستقيم (Δ) الذي يشمل F و يوازي (D)

1 نستخلص شعاع التوجيه  $\vec{u}$  للمستقيم (D)

$$\vec{u}\left(\begin{smallmatrix} -b \\ a \end{smallmatrix}\right) \Rightarrow \boxed{\vec{u}\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)}$$

2 نفرض النقطة  $M(x; y)$  حيث  $M \in (\Delta)$ 3 نحسب مركبة  $\overrightarrow{FM}$   $\overrightarrow{FM} \begin{pmatrix} x+3 \\ y-4 \end{pmatrix}$ 4 نطبق علاقة الارتباط الخطي بين  $\vec{u}$  و  $\overrightarrow{FM}$ 

$$\overrightarrow{FM} \parallel \vec{u} \Leftrightarrow (\Delta) \parallel (D) \text{ مرتبطان خطيا}$$

$$\vec{u} \parallel \overrightarrow{FM} \Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & x + 3 \\ 5 & y - 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -2(y - 4) - 5(x + 3) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{-5x - 2y - 7 = 0}$$

إذن معادلة (Δ) هي:  $\boxed{5x + 2y + 7 = 0}$ 

## (4) مستقيم معرف بنقطة و معامل توجيه

## ✓ طريقة (7) (استخلاص المعاملات)

مثال: أوجد معادلة المستقيم (K) الذي يشمل  $G(6; 5)$ و معامل توجيهه  $\frac{3}{2}$ 

1 من معامل التوجيه نستنتج المعاملين a و b

$$-\frac{a}{b} = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} -a = 3 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \end{cases}$$

و منه معادلة (K) من الشكل  $-3x + 2y + c = 0$ 

2 نعوض G في المعادلة تصبح:

$$-3(6) + 2(5) + c = 0 \Rightarrow \boxed{c = 8}$$

إذن معادلة (K) هي  $\boxed{-3x + 2y + 8 = 0}$

## حل جملة معادلتين (تقاطع مستقيمين)

### I. طريقة الجمع

تعتمد طريقة الجمع على التخلص من إحدى المجهولين  $x$  أو  $y$  لتصبح معادلة ذات مجهول واحد

مثال: أوجد نقطة تقاطع المستقيمين التاليين

$$\begin{cases} 3x + 6y - 15 = 0 \dots (1) \\ 2x - 4y + 6 = 0 \dots (2) \end{cases}$$

للتخلص من المجهول  $x$  يجب ضرب المعادلة (1) في (2) و المعادلة (2) في (-3) ليصبح معامل المجهول  $x$  متعاكسين، فتصبح الجملة:

$$\begin{cases} 6x + 12y - 30 = 0 \dots (3) \\ -6x + 12y - 18 = 0 \dots (4) \end{cases}$$

جمع المعادلتين (3) + (4) نجد:  $24y - 48 = 0 \Rightarrow y = 2$

بالتعويض في المعادلة (1) أو (2) نجد  $x = 1$  و منه الثنائية (1; 2) هي حل للجملة و النقطة (1; 2) هي نقطة تقاطع المستقيمين

### II. طريقة التعويض

نستعمل طريقة التعويض غالبا عندما يكون معامل أحد المجهولين = 1

مثال: أوجد نقطة تقاطع المستقيمين التاليين

$$\begin{cases} 5x - 4y + 6 = 0 \dots (1) \\ -2x + y + 3 = 0 \dots (2) \end{cases}$$

من المعادلة (2) نستنتج أن:  $y = 2x - 3$  بتعويض  $y$  في المعادلة (1) نجد:

$$\begin{aligned} 5x - 4(2x - 3) + 6 &= 0 \\ \Rightarrow 5x - 8x + 12 + 6 &= 0 \\ \Rightarrow -3x &= -18 \\ \Rightarrow x &= 6 \end{aligned}$$

نعوض  $x$  في المعادلة (2) نجد:

$$y = 2(6) - 3 \Rightarrow y = 9$$

و منه الثنائية (6; 9) هي حل للجملة و النقطة (6; 9) هي نقطة تقاطع المستقيمين.

### III. طريقة المحدد (Det) [الوضع النسبي لمستقيمين]

\* تعتبر طريقة المحدد طريقة كاملة لمعرفة الوضع النسبي لمستقيمين أي:

- < متوازيان منفصلان
- < متوازيان متطابقان
- < متقاطعان مع إيجاد نقطة التقاطع

الطريقة:

(D) مستقيم معادلته  $ax + by = c$

(D') مستقيم معادلته  $a'x + b'y = c'$

$$(*) \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

لمعرفة الوضع النسبي للمستقيمين (D) و (D') نستعمل المحدد  $det$

$$det = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$$

$det \neq 0$	$det = 0$	إذا كان
< الجملة (*) تقبل حل وحيد	< الجملة (*) تقبل ما لا نهاية من الحلول أو لا تقبل حلول	فإن
< يتقاطعان في نقطة وحيدة	< (D) و (D') إما متوازيان متطابقان أو متوازيان غير متطابقان	التفسير الهندسي

\* في حالة  $det \neq 0$  إحداثيي نقطة التقاطع هي:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{det}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{det}$$

✓ ملاحظة:

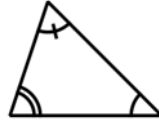
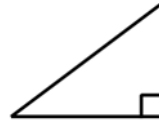

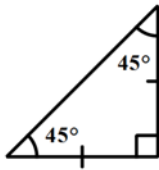
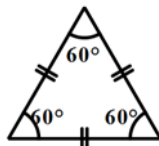
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \Leftrightarrow (D) // (D') \text{ و منفصلين}$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Leftrightarrow (D) \text{ ينطبق على } (D')$$

Prof Mustapha  
KHA-LD9

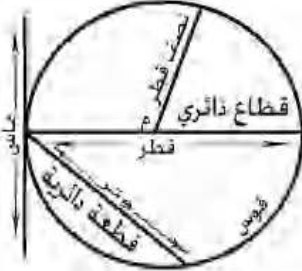
## الهندسة المستوية

### I. المثلثات

الشكل	خواصه
<p><b>المثلث الكيفي</b></p> 	<p>① مجموع زواياه الداخلية = <math>180^\circ</math></p> <p>② مجموع زواياه الخارجية = <math>360^\circ</math></p>
<p><b>المثلث القائم</b></p> 	<p>① مجموع زواياه = <math>180^\circ</math></p> <p>② له ضلعان متعامدان</p> <p>③ لديه زاوية قائمة = <math>90^\circ</math></p> <p>④ مربع الوتر = مجموع مربع الضلعان القائمان</p> <p>⑤ طول المتوسط المتعلق بالوتر = نصف طول الوتر (الوتر هو أكبر ضلع و يقابل الزاوية القائمة)</p>
<p><b>المثلث متساوي الساقين</b></p> 	<p>① مجموع زواياه = <math>180^\circ</math></p> <p>② له ضلعان متقايسان</p> <p>③ زاويتا القاعدة متقايسان</p> <p>④ الارتفاع المتعلق بالقاعدة هو منصف زاوية الرأس ويقطع القاعدة في المنتصف</p>
<p><b>المثلث القائم ومتساوي الساقين</b></p> 	<p>① مجموع زواياه = <math>180^\circ</math></p> <p>② له ضلعان متعامدان و متقايسان</p> <p>③ لديه زاوية قائمة = <math>90^\circ</math></p> <p>④ زاويتا القاعدة متقايسان = <math>45^\circ</math></p> <p>⑤ مربع الوتر = مجموع مربع الضلعان القائمان</p> <p>⑥ الارتفاع المتعلق بالوتر هو منصف الزاوية القائمة ويقطع الوتر في المنتصف</p>
<p><b>المثلث متقايس الأضلاع</b></p> 	<p>① مجموع زواياه = <math>180^\circ</math></p> <p>② كل أضلاعه متقايسة</p> <p>③ كل زواياه متقايسة = <math>60^\circ</math></p> <p>④ كل الارتفاعات تنصف الزاوية المنطلقة منها وتقطع الضلع المقابل لها في المنتصف</p>

المثلثات

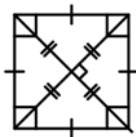
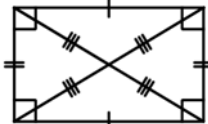
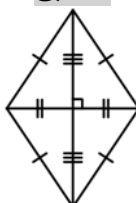
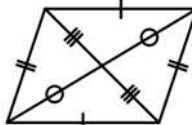
### II. الدائرة

<p>① الدائرة تشكل زاوية قدرها <math>360^\circ</math></p> <p>② إذا كان AB قطر للدائرة و M نقطة من محيط الدائرة فإن ABM مثلث قائم في M (مهما كان موضع M)</p> <p>③ جميع أقطارها متساوية</p> <p>④ جميع أنصاف أقطارها متساوية</p>	<p><b>الدائرة</b></p> 
--	--

Prof Mustapha

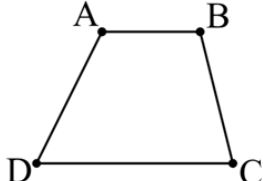
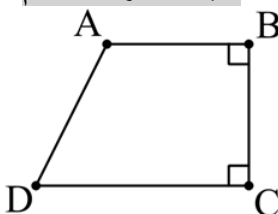
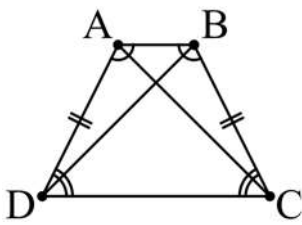
KdH-A-LD9

.III. متوازيات الأضلاع

الشكل	خواصه وشروطه
<p><b>المربع</b></p> 	<ol style="list-style-type: none"> <li>1 كل ضلعان متقابلان متوازيان</li> <li>2 كل أضلاعه متقايسة</li> <li>3 له أربع زوايا قائمة</li> <li>4 قطراه متساويان</li> <li>5 قطراه متعامدان</li> <li>6 قطراه متناصفان</li> <li>7 كل قطر ينصف الزاويتين المتعلق بهما</li> </ol>
<p><b>المستطيل</b></p> 	<ol style="list-style-type: none"> <li>1 كل ضلعان متقابلان متوازيان</li> <li>2 كل ضلعان متقابلان متقايسان</li> <li>3 له أربع زوايا قائمة</li> <li>4 قطراه متساويان</li> <li>5 قطراه متناصفان</li> </ol>
<p><b>المعين</b></p> 	<ol style="list-style-type: none"> <li>1 كل ضلعان متقابلان متوازيان</li> <li>2 كل أضلاعه متقايسة</li> <li>3 كل زاويتان متقابلتان متقايسان</li> <li>4 قطراه متعامدان</li> <li>5 قطراه متناصفان</li> <li>6 كل قطر ينصف الزاويتين المتعلق بهما</li> </ol>
<p><b>متوازي الأضلاع</b></p> 	<ol style="list-style-type: none"> <li>1 كل ضلعان متقابلان متوازيان</li> <li>2 كل ضلعان متقابلان متقايسان</li> <li>3 كل زاويتان متقابلتان متقايسان</li> <li>4 قطراه متناصفان</li> <li>5 ضلعان متقابلان متقايسان ومتوازيان</li> </ol>

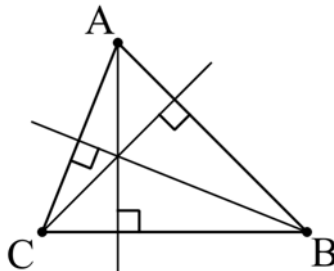
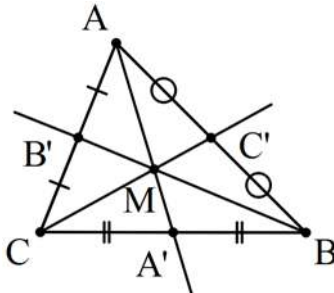
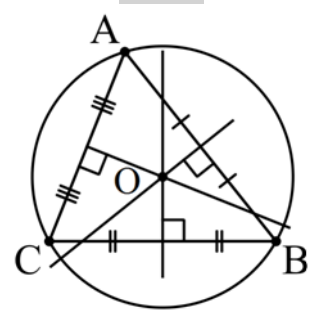
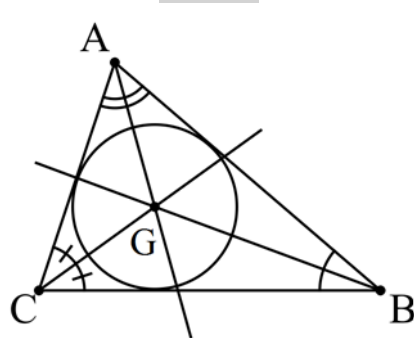
متوازيات الأضلاع

.IV. الشبه منحرف

الشبه منحرف	خواصه	الشكل
<p>خ مشتركة</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\widehat{CDA} + \widehat{DAB} = 180^\circ</math></li> <li>• <math>\widehat{ABC} + \widehat{BCD} = 180^\circ</math></li> </ul>	<p><b>شبه منحرف كيفي</b></p>  <ol style="list-style-type: none"> <li>1 القاعدتين متوازييتين غير متساويتين</li> <li>2 الساقان غير متوازيان وغير متساويان</li> <li>3 مجموع زواياه <math>360^\circ =</math></li> </ol>	
	<p><b>شبه منحرف القائم</b></p>  <ol style="list-style-type: none"> <li>1 القاعدتين متوازييتين غير متساويتين</li> <li>2 الساقان غير متوازيان وغير متساويان</li> <li>3 له زاويتان قائمتان</li> <li>3 مجموع زواياه <math>360^\circ =</math></li> </ol>	
	<p><b>شبه منحرف متساوي الساقين</b></p>  <ol style="list-style-type: none"> <li>1 القاعدتين متوازييتين غير متساويتين</li> <li>2 الساقان متساويان غير متوازيان</li> <li>3 قطراه متقايسان</li> <li>4 زاويتي القاعدة الكبرى متقايسيتين</li> <li>5 زاويتي القاعدة الصغرى متقايسيتين</li> <li>6 مجموع زواياه <math>360^\circ =</math></li> </ol>	

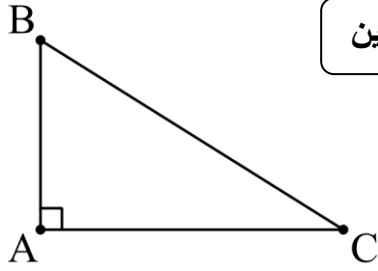
الشبه منحرف

V. المستقيمات الخاصة في مثلث

خواصه	المستقيم
<p>• الإرتفاع في مثلث هو المستقيم الذي يشمل أحد رؤوس المثلث ويعامد الضلع المقابل.</p>	<p>الإرتفاع</p> 
<p>① المتوسط في مثلث هو المستقيم الذي يشمل أحد رؤوس المثلث ومنتصف الضلع المقابل.                  ② نقطة تقاطع متوسطات مثلث هي مركز ثقل المثلث                  ③ <math>MA = 2MA'</math> ; <math>MB = 2MB'</math> ; <math>MC = 2MC'</math></p>	<p>المتوسط</p> 
<p>① المحور في مثلث هو المستقيم الذي يعامد أحد أضلاعه في المنتصف وليس شرط أن يشمل الرأس المقابل                  ② نقطة تقاطع محاور مثلث هي مركز الدائرة المحيطة بهذا المثلث (التي تشمل رؤوسه)                  ③ <math>OA = OB = OC</math></p>	<p>المحور</p> 
<p>① المنصف في مثلث هو منصف إحدى زواياه                  ② نقطة تقاطع منصفات مثلث هي مركز الدائرة المرسومة داخل هذا المثلث (التي تمس أضلاعه)</p>	<p>المنصف</p> 

Prof Mustapha

KH-A-LD



في المثلث القائم: مربع الوتر = مجموع مربع الضلعين القائمين

$$\text{أي: } (BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$$

نستنتج أن:

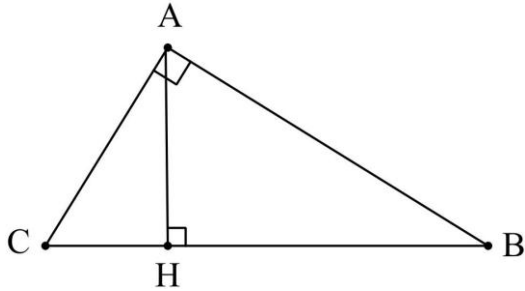
$$(AB)^2 = (BC)^2 - (AC)^2$$

$$(AC)^2 = (BC)^2 - (AB)^2$$

(2) المبرهنة العكسية لفيثاغورس

إذا كان مربع الضلع الأكبر = مجموع مربع الضلعين الآخرين فإن هذا المثلث قائم حسب المبرهنة العكسية لفيثاغورس

أي إذا كان:  $(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$  فإن  $ABC$  مثلث قائم في  $A$  حسب المبرهنة العكسية لفيثاغورس



(3) خواص الارتفاع في مثلث قائم

$$AB \times AC = AH \times BC$$

$$AB^2 = BH \times BC$$

$$AC^2 = CH \times CB$$

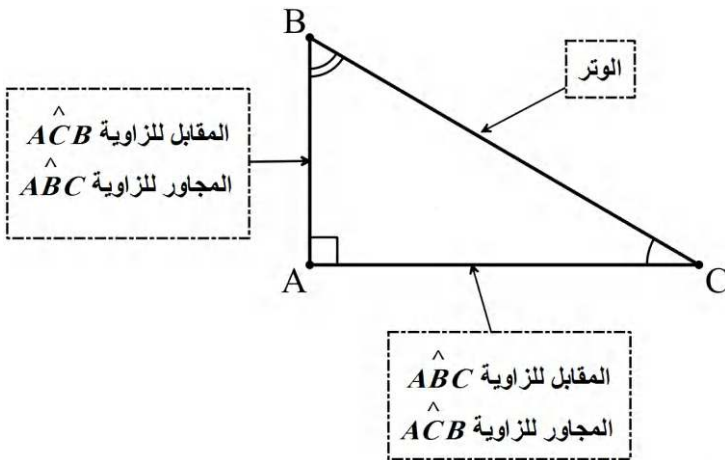
$$AH^2 = HC \times HB$$

[VII] النسب المثلثية في المثلث القائم

$$\sin x = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\cos x = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

$$\tan x = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$



$$\sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC}$$

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{AB}$$

العلاقات بين النسب المثلثية:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} ; \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

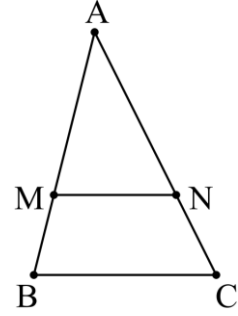
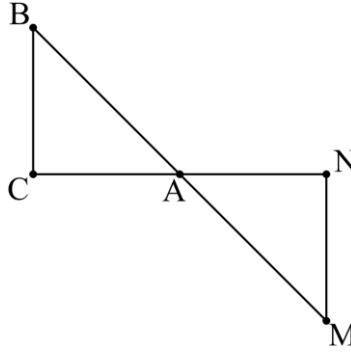
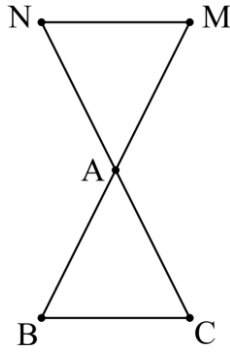
جب : sin  
تجب : cos  
ظل : tan  
زاوية : x

✓ ملاحظة 1: قيمة sin وقيمة cos دائما أصغر من 1 و أكبر من 0

✓ ملاحظة 2: في المثلث القائم قيم sin, cos و tan دائما موجبة

[VIII]. مبرهنة طالس وعكسها

في كل من الأشكال التالية لدينا  $(MN) \parallel (BC)$  مما يعني إمكانية تطبيق مبرهنة طالس:



(1) مبرهنة طالس (المباشرة):

بما أن  $(MN) \parallel (BC)$  حسب مبرهنة طالس لدينا:  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

(2) المبرهنة العكسية لطالس: (إثبات التوازي)

من المعطيات نختار كسرين متناسبين مثلا  $\frac{AM}{AB}$  و  $\frac{MN}{BC}$  ونحسب قيمة كلا منهما

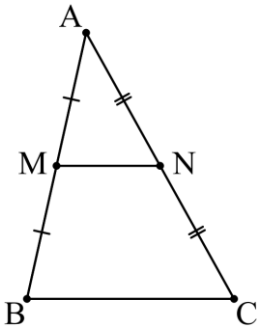
نقول: بما أن  $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$  و النقط  $A, M, B$  و  $A, N, C$  بنفس الترتيب على استقامية فإن

$(MN) \parallel (BC)$  حسب المبرهنة العكسية لطالس

(3) خاصية مستقيم المنتصفين (المباشرة):

القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث وطولها يساوي نصفه

إذا كانت  $M$  و  $N$  منتصفي  $[AB]$  و  $[AC]$  على الترتيب فإن:



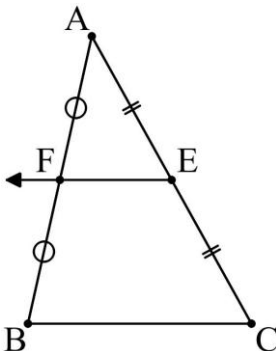
•  $(MN) \parallel (BC)$

•  $MN = \frac{1}{2} BC$  أي  $BC = 2MN$

(4) الخاصية العكسية لمستقيم المنتصفين:

المستقيم المرسوم من منتصف ضلع في مثلث موازياً أحد الضلعين الآخرين ينصف الضلع الثالث

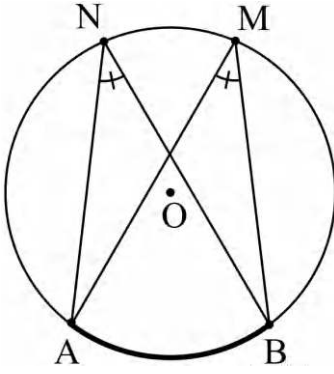
إذا كان  $E$  منتصف  $[AC]$  و  $(FE) \parallel (BC)$  فإن  $F$  منتصف  $[AB]$



Prof Mustapha  
KHA-LDJ

[IX]. الزاوية المحيطية والزاوية المركزية

(1) مراجعة



القاعدة 1:

❖ الزاويتان المحيطيتان اللتان تحصران نفس القوس متقايستان

مثال 1:

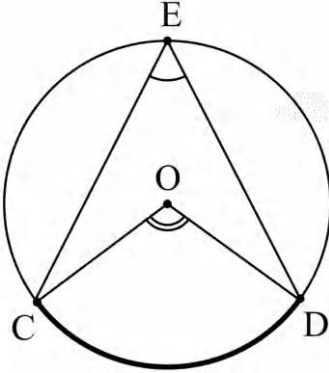
الزاويتان المحيطيتان  $\widehat{ANB}$  و  $\widehat{AMB}$  متقايستان لأنهما تحصران نفس القوس  $\widehat{AB}$

القاعدة 2:

إذا كانت زاوية مركزية و زاوية محيطية تحصران نفس القوس فإن:

❖ الزاوية المركزية = ضعف الزاوية المحيطية

❖ الزاوية المحيطية = نصف الزاوية المركزية

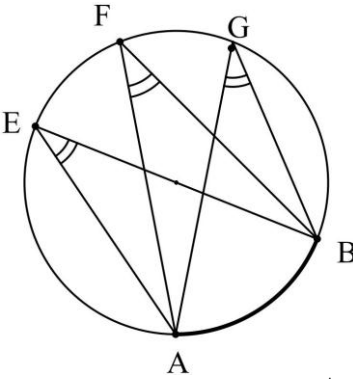


مثال 2:

الزاوية المركزية  $\widehat{COD}$  و الزاوية المحيطية  $\widehat{CED}$  تحصران نفس القوس  $\widehat{CD}$  إذن:

$$\widehat{COD} = 2 \widehat{CED} \quad \text{و} \quad \widehat{CED} = \frac{1}{2} \widehat{COD}$$

(2) نتائج

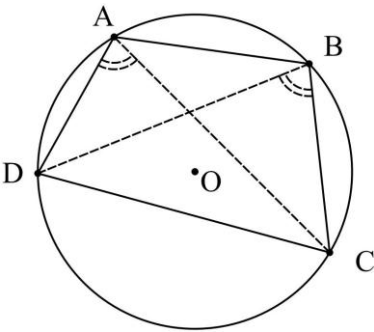


❶ الزوايا المحيطية التي تحصر نفس القوس أو تحصر أقواسا متقايسة تكون متقايسة

❷ تكون رؤوس الرباعي المحدب ABCD من نفس الدائرة إذا تحقق أحد الشرطين:

◀ إما  $\widehat{DBC} = \widehat{DAC}$  (زاويتان محيطيتان تجصران نفس القوس  $\widehat{DC}$ )

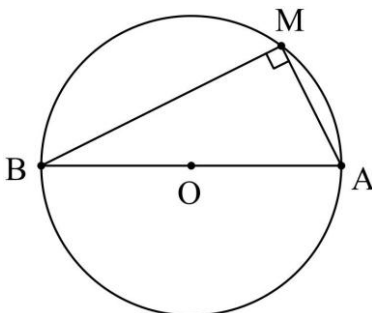
◀ أو  $\widehat{BCD} + \widehat{BAD} = 180^\circ$  (زاويتان متقابلتان متكاملتان)



❸ خاصية المثلث القائم في الدائرة:

إذا كان  $AB$  قطر لدائرة و  $M$  نقطة من محيط هذه الدائرة فإن المثلث

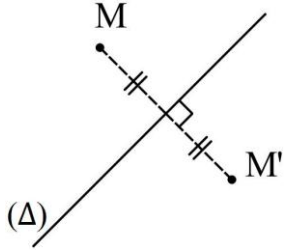
$ABM$  قائم في  $M$  مهما كان موضع  $M$



Prof Mustapha

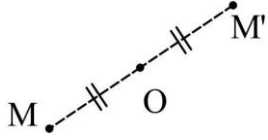
كحلل-معلم

[X]. التحويلات النقطية

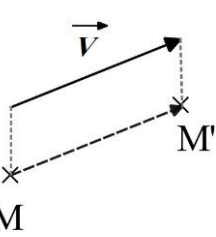


1 التناظر المحوري: هو تحويل نقطي بالنسبة لمحور  $(\Delta)$  يرفق بكل نقطة  $M$  النقطة  $M'$  حيث  $(\Delta)$  محور  $[MM']$  (أي  $(\Delta)$  عمودي على  $[MM']$  في منتصفها).

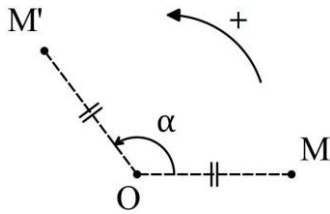
2 التناظر المركزي: هو تحويل نقطي بالنسبة لنقطة  $O$  يرفق بكل نقطة  $M$  النقطة  $M'$  حيث  $OM = OM'$  (أي  $O$  منتصف  $[MM']$ ).



3 الانسحاب: هو تحويل نقطي بشعاع  $\vec{v}$  يرفق بكل نقطة  $M$  النقطة  $M'$  حيث  $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$



4 الدوران: هو تحويل نقطي وفق مركز  $O$  وزاوية  $\alpha$  واتجاه يرفق بكل نقطة  $M$  النقطة  $M'$  حيث  $OM' = OM$  و  $\widehat{MOM'} = \alpha$  والاتجاه الموجب عكس اتجاه عقارب الساعة.



[XI]. خواص التحويلات النقطية

1 النقطة الصامدة: نقول عن نقطة إنها صامدة بواسطة تحويل نقطي، إذا كانت منطبقة على صورتها بهذا التحويل.

2 حفظ المسافات (التقايس)

يحافظ كلا من التناظر المركزي والتناظر المحوري والانسحاب والدوران على المسافات لذلك نسمي هذه التحويلات عامة بالتقايس

\*صورة بتقايس: هي صورة بالتناظر المركزي أو بالتناظر المحوري أو بالانسحاب أو بالدوران

3 الحفاظ على الاستقامية

إذا كانت  $A, B, C$  ثلاث نقاط في استقامية فإن صورها  $A', B', C'$  بتقايس تكون في استقامية

4 الحفاظ على أقياس الزوايا

صورة زاوية بتقايس هي زاوية تقايسها

◀ استنتاج:

- صورتني مستقيمان متوازيان بتقايس هما مستقيمان متوازيان
- صورتني متعامدان متوازيان بتقايس هما مستقيمان متعامدان

Prof Mustapha  
KHA-LD9

Prof Mustapha  
KdH-A-LD9

## تقاييس وتشابه مثلثين

### I. تقاييس مثلثان

#### (1) تعريف

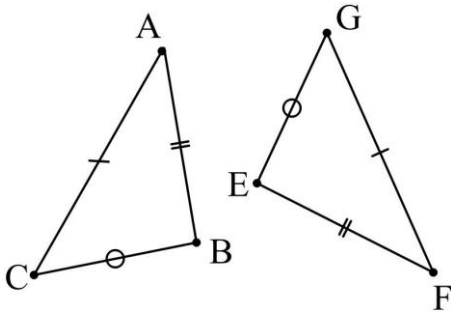
المثلثان المتقاييسان هما مثلثان قابلان للتطابق أي كل الأضلاع متساوية وكل الزوايا متقايصة مثنى مثنى.

#### (2) شروط تقاييس مثلثان

يتقاييس مثلثان إذا تحققت إحدى الشروط التالية:

##### ① كل الأضلاع متساوية مثنى مثنى

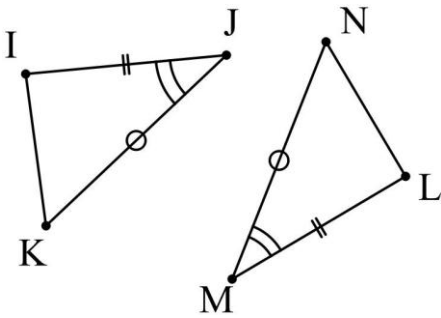
كل الأضلاع من المثلث الأول متساوية مثنى مثنى مع أضلاع المثلث الثاني.



$$\ast \text{ بما أن } \left. \begin{array}{l} AB = EF \\ AC = GF \\ BC = EG \end{array} \right\} \text{ فإن المثلثان } ABC \text{ و } EFG \text{ متقاييسان}$$

##### ② ضلعان يحصران زاوية

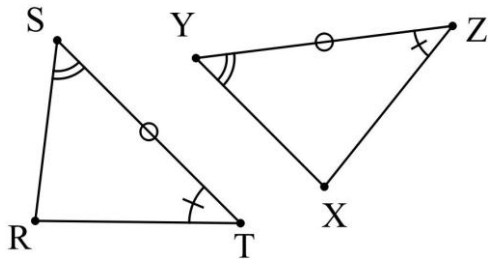
ضلعان من المثلث الأول يساويان مثنى مثنى ضلعان من المثلث الثاني والزوايا المحصورة بين ضلعا المثلث الأول تقايص الزوايا المحصورة بين ضلعا المثلث الثاني.



$$\ast \text{ بما أن } \left. \begin{array}{l} IJ = LM \\ JK = MN \\ \hat{IJK} = \hat{LMN} \end{array} \right\} \text{ فإن المثلثان } IJK \text{ و } LMN \text{ متقاييسان}$$

##### ③ ضلع وزاويتين مجاورتين

ضلع من المثلث الأول يساوي ضلع من المثلث الثاني والزاويتين المجاورتين لضلع المثلث الأول تقايصان مثنى مثنى الزاويتين المجاورتين لضلع المثلث الثاني.



$$\ast \text{ بما أن } \left. \begin{array}{l} ST = YZ \\ \hat{RST} = \hat{XYZ} \\ \hat{R\hat{T}S} = \hat{X\hat{Z}Y} \end{array} \right\} \text{ فإن المثلثان } RST \text{ و } XYZ \text{ متقاييسان}$$

### (3) نتائج

- \* صورة مثلث بنتناظر مركزي أو تناظر محوري أو انسحاب أو دوران هو مثلث يقايصه
- \* التقاييس المباشر: هو عندما يمكن تطبيق مثلث على الآخر بالسحب والتدوير أو التدوير والسحب
- \* التقاييس غير المباشر: هو عندما لا يمكن تطبيق مثلث على الآخر إلا بعد قلبه

### III. تشابه مثلثان

#### (1) تعريف

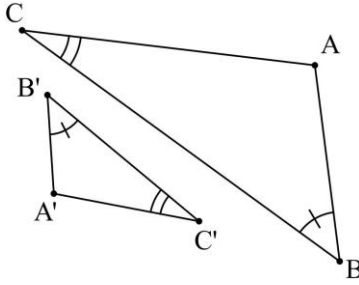
المثلثان المتشابهان لهما كل الزوايا متقايسة مثنى مثنى ولكن أضلاعهما غير متساوية مثنى مثنى بل متناسبة (أي المثلث الأول تكبير للمثلث الثاني أو تصغير له)

#### (2) شروط تشابه مثلثان

يتشابه مثلثان إذا تحققت إحدى الشروط التالية:

##### ① زاويتين متقايستين مثنى مثنى

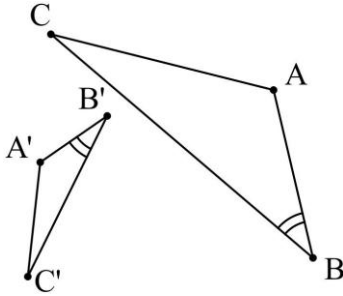
زاويتين من المثلث الأول متقايستين مثنى مثنى مع زاويتين من المثلث الثاني



$$\left. \begin{array}{l} ACB = A'C'B' \\ \text{و} \\ ABC = A'B'C' \end{array} \right\} \text{ بما أن } * \text{ فإن المثلثان } ABC \text{ و } A'B'C' \text{ متشابهان}$$

##### ② زاوية وضلعان متناسبان

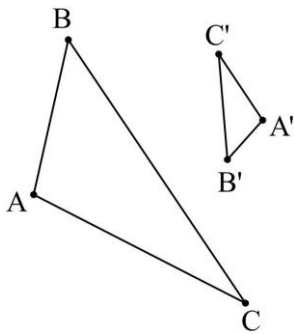
زاوية من المثلث الأول تقايس زاوية من المثلث الثاني وضلعان زاوية المثلث الأول متناسبان مع ضلعان زاوية المثلث الثاني.



$$\left. \begin{array}{l} ABC = A'B'C' \\ \text{و} \\ \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} \end{array} \right\} \text{ بما أن } * \text{ فإن المثلثان } ABC \text{ و } A'B'C' \text{ متشابهان}$$

##### ③ ثلاثة أضلاع متناسبة

أضلاع المثلث الأول متناسبة مثنى مثنى مع أضلاع المثلث الثاني



$$\left. \begin{array}{l} \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} \end{array} \right\} \text{ بما أن } * \text{ فإن المثلثان } ABC \text{ و } A'B'C' \text{ متشابهان}$$

#### (3) نسبة التشابه

نسبة التشابه بين مثلثين  $ABC$  و  $A'B'C'$  هي العدد الموجب تماما  $k$  حيث:

- ◀ إذا كان  $k > 1$  فإن  $k$  يسمى نسبة التكبير
- ◀ إذا كان  $0 < k < 1$  فإن  $k$  يسمى نسبة التصغير
- ◀ إذا كان  $k = 1$  فإن المثلثان متقايسان

$$k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

أو

$$k = \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Prof Mustapha

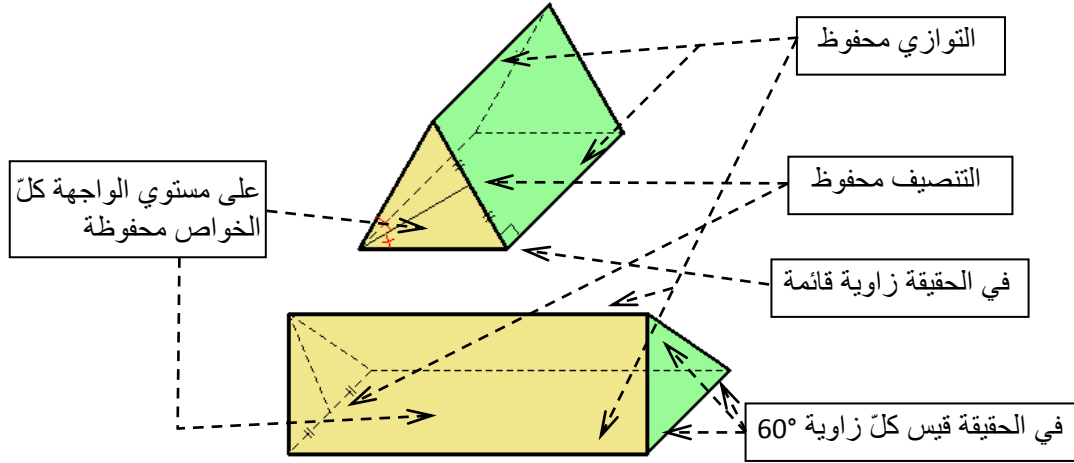
KHA-LD9

## الهندسة الفضائية

## I. التمثيل بالمنظور متساوي القياس

المنظور متساوي القياس هو تقنية لتمثيل أجسام من الفضاء على سطوح مستوية ومن قواعد:

- الخطوط المخفية: نرسمها بخطوط متقطعة
  - على مستوى الواجهة: نحافظ على كل الخواص (التوازي، التعامد، التنصيف، استقامية النقط...) وعلى المقادير (الزوايا، المسافات...)
  - على جميع الأوجه: نحافظ على استقامية النقط، التوازي، المنتصفات والنسب بين قطع المستقيم المتوازية.
- \* ملاحظة: المستوي في المنظور متساوي القياس يمثل بمتوازي أضلاع



## II. المستقيم والمستوي في الفضاء

1 يتعين مستقيم إما بنقطتين متميزتين أو بنقطة وشعاع

2 يتعين مستوي إما:

- بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة
- بمستقيم ونقطة لا تنتمي إليه
- مستقيمين متميزين أما متقاطعين أو متوازيين

3 إذا شمل مستوي نقطتين متميزتين  $A$  و  $B$  فإنه يشمل كل نقط المستقيم  $(AB)$

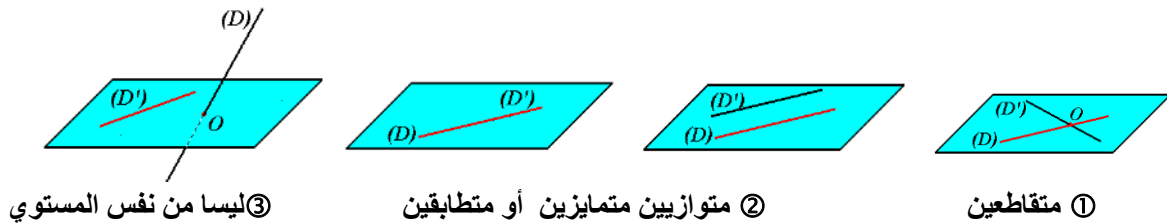
خاصية 1: إذا كانت نقطتين متميزتين فإنه يوجد مستقيم وحيد يشملهما

خاصية 2: إذا لم تكن ثلاث نقط على استقامة واحدة فإنه يوجد مستوي وحيد يشملها

## III. الأوضاع النسبية لمستقيمين، لمستويين ولـمستوي ومستقيم

(1) الأوضاع النسبية لمستقيمين:

- 1 متقاطعين
  - 2 متوازيين
  - 3 ليسا من نفس المستوي
- من مستوي واحد
- كل مستقيمين من الفضاء هما إما



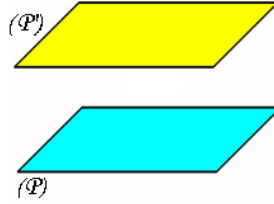
Prof Mustapha

KH.A.L.D.J

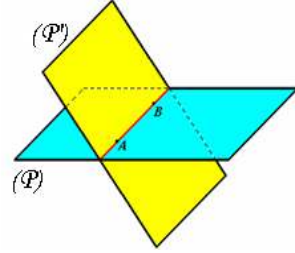
(2) الأوضاع النسبية لمستويين: كل مستويين من الفضاء هما إما



③ متوازيان متطابقان



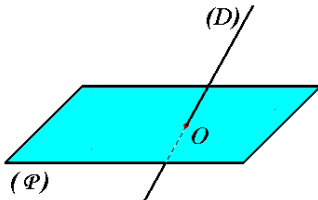
② متوازيين متمايزين



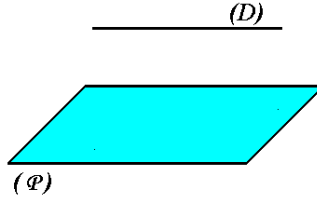
① متقاطعين وتقاطعهما هو مستقيم

(3) الأوضاع النسبية لمستقيم ومستوي:

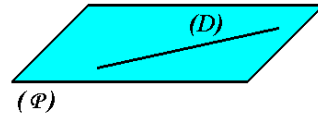
كل مستقيم  $(D)$  ومستوي  $(P)$  من الفضاء هما إما  
 ① متوازيين  $(D) \cap (P) = \emptyset$   
 ② متقاطعان في نقطة  $(D) \cap (P) = \{O\}$   
 ③ متوازيين  $(D) \subset (P)$



③ متقاطعان في نقطة



② متوازيين  $(D) \cap (P) = \emptyset$



① متوازيين  $(D) \subset (P)$

#### IV. التوازي في الفضاء

(1) المستقيمتان المتوازيتان في الفضاء

المستقيمتان المتوازيتان في الفضاء هما إما  
 ① متطابقان  
 ② من نفس المستوي وغير متقاطعتين

خواص:

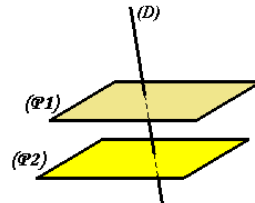
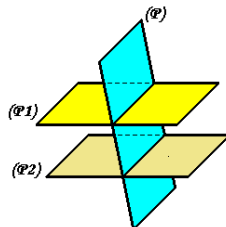
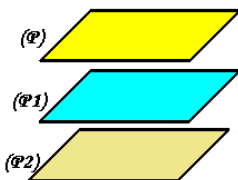
- ① يوجد مستقيم وحيد يشمل نقطة معلومة ويوازي مستقيما معلوما
- ② إذا قطع مستوي أحد مستقيمين متوازيين فإنه يقطع الآخر
- ③ المستقيمتان المتوازيتان لثالث متوازيان

(2) المستويات المتوازيتان

المستويان المتوازيين هما مستويان إما  
 ① متطابقان (يشتركان في جميع النقط)  
 ② منفصلان (لا توجد أي نقطة مشتركة بينهما)

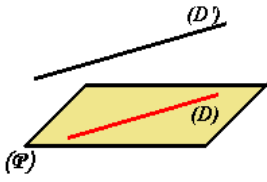
خواص:

- ① يوجد مستوي وحيد يشمل نقطة معلومة ويوازي مستويا معلوما
- ② إذا قطع مستقيم أحد مستويين متوازيين فإنه يقطع الآخر
- ③ إذا قطع مستوي أحد المستويين المتوازيين فإنه يقطع الآخر (ويكون مستقيما التقاطع متوازيين)
- ④ المستويان المتوازيين لثالث متوازيان
- ⑤ يتوازي مستويان إذا فقط إذا احتوى أحدهما مستقيمين متقاطعتين كل منهما يوازي المستوي الآخر



### (3) توازي مستقيم مع مستوي

- ① منفصلين (لا توجد أي نقطة مشتركة بينهما)  
 ② المستوي يحوي المستقيم
- يكون مستقيم و مستو متوازيين إذا كانا



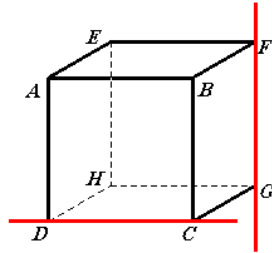
#### خواص:

- يكون مستقيم موازيا لمستو إذا كان موازيا لمستقيم من هذا المستوي
- إذا كان مستقيم يوازي أحد مستويين متوازيين فإنه يوازي الآخر
- إذا كان مستقيم يوازي مستويين متقاطعين فإنه يوازي مستقيم تقاطعهما

### [V]. التعامد في الفضاء

#### (1) تعامد مستقيمين

يكون مستقيمان متعامدان في الفضاء إذا كان المستقيمان المتوازيان لهما من نفس النقطة متعامدين أو بتعريف مبسط: يكون مستقيمان متعامدان في الفضاء إذا كان المستقيم الموازي لأحدهما عموديا على الآخر



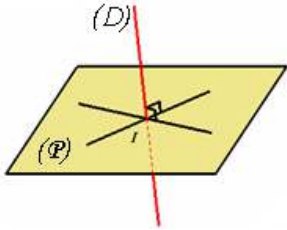
مثال: ما هو الوضع النسبي للمستقيمين  $(GF)$  و  $(DC)$  ؟  
 \* المستقيم الذي يوازي  $(GF)$  من نفس نقطة  $(DC)$  هو  $(BC)$   
 فنقول بما أن  $(GF) \parallel (BC)$  و  $(BC) \perp (DC)$  فإن  $(GF) \perp (DC)$

#### خواص:

- المستقيم العمودي على أحد المستقيمين المتوازيين عمودي على الآخر
- المستقيمين المتوازيين لمستقيمين متعامدين متعامدين

#### (2) تعامد مستقيم و مستوي

يكون مستقيم عموديا على مستو إذا كان عموديا على كل مستقيمتين هذا المستوي



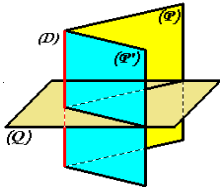
\* مبرهنة:  
 إذا كان مستقيم عموديا على مستقيمين من مستو فإنه عمودي على كل مستقيمتين هذا المستوي

#### (3) تعامد مستويين

يكون مستويين متعامدين إذا شمل أحدهما مستقيما عموديا على الآخر

#### خواص:

- المستوي العمودي على أحد المستويين المتوازيين عمودي على الآخر
- إذا كان  $(P)$  و  $(P')$  مستويين متقاطعين في المستقيم  $(D)$  و كان كل منهما عموديا على مستو ثالث  $(Q)$  فإن مستقيمتي تقاطعهما  $(D)$  عمودي على المستوي  $(Q)$



#### خواص:

- يوجد مستقيم وحيد يشمل نقطة معلومة و يعامد مستويا معلوما
- يوجد مستو وحيد يشمل نقطة معلومة و يعامد مستقيما معلوما
- المستويان العموديان على نفس المستقيم متوازيان
- المستقيمان العموديان على نفس المستوي متوازيان
- المستقيم العمودي على أحد المستويين المتوازيين عمودي على الآخر
- المستوي العمودي على أحد المستقيمين المتوازيين عمودي على الآخر

Prof Mustapha  
 KdH-LD9

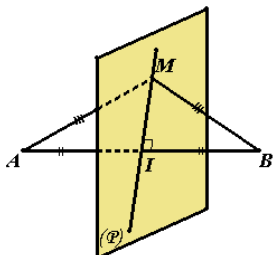
#### (د) المستوي المحوري لقطعة مستقيم

المستوي المحوري للقطعة  $[AB]$  هو المستوي العمودي على  $(AB)$  في منتصف  $[AB]$



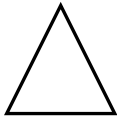
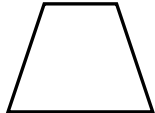
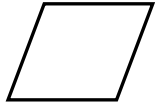
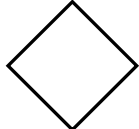
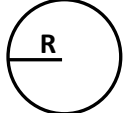
\* مبرهنة:

مجموعة النقط المتساوية المسافة عن نقطتين متميزتين  $A$  و  $B$  في الفضاء هي

المستوي المحوري للقطعة  $[AB]$



## المحيط والمساحة

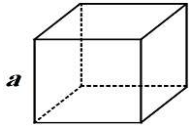
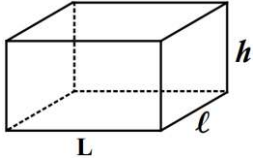
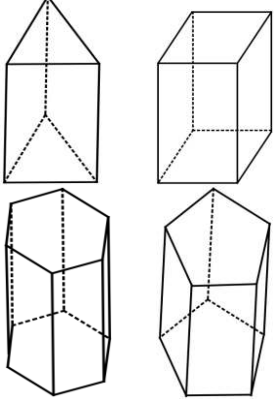

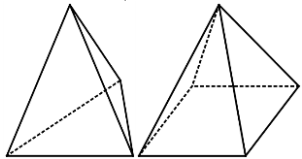
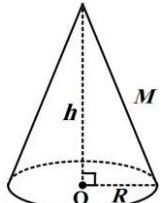
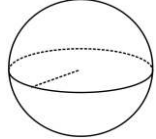
المساحة S	المحيط P	الشكل
الضلع $\times$ الضلع أو $\frac{\text{جاء القطرين}}{2}$	مجموع الأضلاع أو $4 \times \text{الضلع}$	المربع 
الطول $\times$ العرض	مجموع الأضلاع أو $2 \times (\text{الطول} + \text{العرض})$	المستطيل 
$\frac{\text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}}{2}$	مجموع أضلاعه	المثلث 
$\frac{(\text{القاعدة الصغرى} + \text{القاعدة الكبرى}) \times \text{الارتفاع}}{2}$	مجموع أضلاعه	شبه منحرف 
القاعدة $\times$ الارتفاع	مجموع الأضلاع أو مجموع ضلعين متتاليين $\times 2$	متوازي الأضلاع 
$\frac{\text{جاء القطرين}}{2}$ أو القاعدة $\times$ الارتفاع	مجموع الأضلاع أو $4 \times \text{الضلع}$	المعين 
$\pi = 3, 14$ نصف القطر: R $\pi \times R^2$	$\pi = 3, 14$ نصف القطر: R القطر: D أو: $\pi \times D$	الدائرة 

$S_B$ : مساحة القاعدة  
P: المحيط  
 $P_B$ : محيط القاعدة  
V: الحجم  
B: القاعدة الكبرى  
b: القاعدة الكبرى

a: الضلع  
l: العرض  
L: الطول  
h: الارتفاع  
D: القطر  
R: نصف القطر  
S أو A: المساحة

Prof Mustapha  
KdH-A-SD9

## الحجم، المساحة الجانبية والمساحة الكلية

المساحة الكلية	المساحة الجانبية	الحجم (السعة)	الشكل
مساحة وجه $\times 6$ $S = 6a^2$	مساحة وجه $\times 4$ $S = 4a^2$	$(\text{الضلع})^3 = \text{الضلع} \times \text{الضلع} \times \text{الضلع}$ $V = a \times a \times a = a^3$	المكعب 
المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين $S = 2[(L + l) \times h + L \times l]$	محيط القاعدة $\times$ الارتفاع $S = P_B \times h$ أو $S = 2(L + l) \times h$	مساحة القاعدة $\times$ الارتفاع $V = S_B \times h$ أو الطول $\times$ العرض $\times$ الارتفاع $V = L \times l \times h$	متوازي المستطيلات 
المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين	محيط القاعدة $\times$ الارتفاع $S = P_B \times h$	مساحة القاعدة $\times$ الارتفاع $V = S_B \times h$	الموشور القائم 
المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين $S = 2\pi R(h + R)$	محيط القاعدة $\times$ الارتفاع $S = P_B \times h$ أو $S = 2\pi R \times h$	مساحة القاعدة $\times$ الارتفاع $V = S_B \times h$ أو $V = \pi \times R^2 \times h$	الأسطوانة الدورانية 
المساحة الجانبية + مساحة القاعدة	نصف محيط القاعدة $\times$ الارتفاع الجانبي	مساحة القاعدة $\times$ الارتفاع $V = \frac{S_B \times h}{3}$	الهرم 
المساحة الجانبية + مساحة القاعدة $S = \pi R(R + M)$	طول مولد المخروط: M نصف محيط القاعدة $\times$ طول مولده أو $S = \pi \times R \times M$	مساحة القاعدة $\times$ الارتفاع $V = \frac{\pi \times R^2 \times h}{3}$ أو $V = \frac{S_B \times h}{3}$	المخروط 
$\pi = 3, 14$  $S = 4 \times \pi \times R^2$	نصف القطر: R	$\pi = 3, 14$  $V = \frac{4}{3} \times \pi \times R^3$	الكرة (الجلّة) 

Prof Mustapha KHA-LDJ