مجلة Maths 5 min

1as

السنة الأولى ثانوي

جذع مشترك علوم و تكنولوجيا

- الهندسة المستوية
- الهندسة في الفضاء
- الاحصاء
- نماذج امتحانات

من انجاز الأستاذ: شعبان أسامة

أفريل 2020- تلمسان

Fb/5min Maths chbnoussama@gmail.com instagram/5minmaths

مجلة 1as Maths 5min

تجدون فيها :

أهدي هذا العمل المتواضع لجميع محبي المادّة...أ.شعيان

"

If you can't do great things, do small things in agreat way

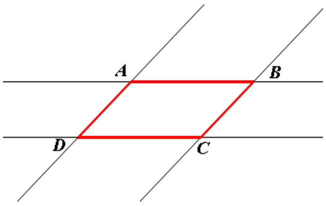
Napoleon Hill

الهندسة المستوية

ملخص الدرس

متوازي الأضلاع

متوازي الأضلاع هو رباعي حاملا كلّ ضلعين متقابلين فيه متوازيان.

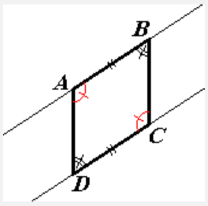


ABCD متوازي أضلاع معناه [(AB) // (CD) و (AD) // (CB)]

خواص:

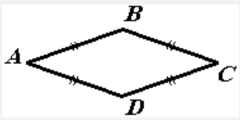
من أجل كلّ رباعي ABCD

1. [AC] و [BD] متناصفان معناه ABCD متوازي أضلاع.
2. [AB = DC و AD = BC] معناه ABCD متوازي أضلاع.
3. [AB = DC و (AB) // (DC)] معناه ABCD متوازي أضلاع.
4. [ABC = ADC و BAD = BCD] معناه ABCD متوازي أضلاع.



متوازيات الأضلاع الخاصية

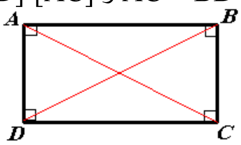
المعيّن: هو متوازي أضلاع له ضلعان متتاليان متقايسان.
مثال:



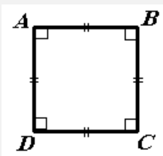
1) ABCD معيّنا معناه [(BD) ⊥ (AC) و [AC]،[BD] متناصفان]
2) ABCD معيّنا معناه [AB = BC = CD = DA]
3) إذا كان ABCD معيّنا فإنّ [(AC) ينصف كلاًّ من الزاويتين BAD وBCD و(BD) ينصف كلاًّ من الزاويتين ABC و ADC]

المستطيل: هو متوازي أضلاع له زاوية قائمة.
مثال:

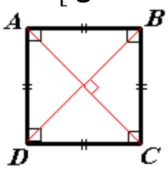
1) ABCD مستطيل معناه [A = B = C = D = 90°]
2) ABCD مستطيل معناه [AC = BD و [AC]،[BD]] متناصفان]



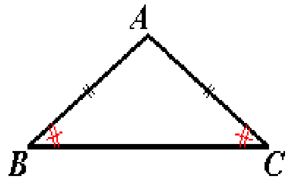
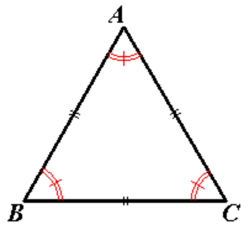
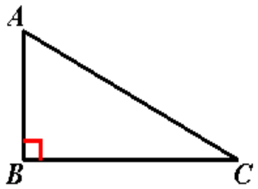
المربّع: هو متوازي أضلاع له ضلعان متتاليان متقايسان وزاوية قائمة.
مثال:



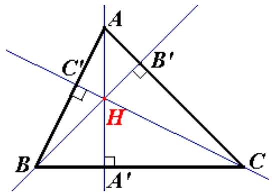
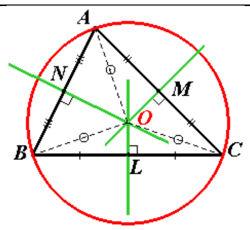
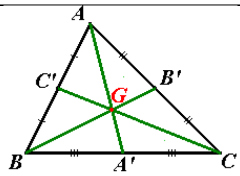
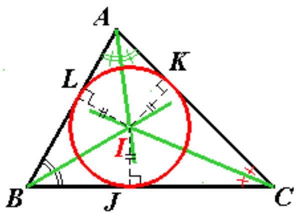
1) ABCD مربّع معناه [A = B = C = D = 90° و AB = BC = CD = DA]
2) ABCD مربّع معناه [AC = BD و(BD) ⊥ (AC) و [AC]،[BD] متناصفان]



المثلثات الخاصية

المثلّث متساوي السّاقين	المثلّث متقايس الأضلاع	المثلّث قائم الزاوية
		
• فيه ضلعان متقايسان • $ABC = ACB$	• أضلاعه متقايسة • $ABC = ACB = BAC = 60°$	• فيه زاوية قائمة • $ABC = 90°$

المستقيمات الخاصية في مثلّث

الارتفاع في مثلّث هو المستقيم الذي يشمل أحد رؤوس المثلث ويعامد الضّلع المقابل.		• ارتفاعات مثلّث متقاطعة في نقطة واحدة. • $A(ABC) = ½\ AA' \times BC = ½\ BB' \times AC = ½\ CC' \times AB$
المحور في مثلّث هو محور أحد أضلاعه.	 $OA = OB = OC$	• محاور مثلّث متقاطعة في نقطة واحدة. • نقطة تقاطع محاور مثلّث هي مركز الدّائرة المحيطة بهذا المثلّث (التي تشمل رؤوسه).
المتوسط في مثلّث هو المستقيم الذي يشمل أحد رؤوس المثلّث ومنتصف الضّلع المقابل.	 $GA=2GA'$ ، $GB=2GB'$ ، $GC=2GC'$	• متوسطات مثلّث متقاطعة في نقطة واحدة. • نقطة تقاطع متوسطات مثلّث هي مركز ثقل هذا المثلّث.
المنصّف في مثلّث هو منصّف إحدى زواياه.		• المنصّفات الدّاخلية في مثلّث متقاطعة في نقطة واحدة. • نقطة تقاطع المنصّفات الدّاخلية في مثلّث هي مركز الدّائرة المرسومة داخل هذا المثلّث(أي التّي تمسّ أضلاع المثلّث من الداخل) .

مبرهنة فيثاغورس - النّسب المثلّثية

مبرهنة فيثاغورس

إذا كان ABC مثلّثا قائما في A فإنّ
$BC^2 = AB^2 + AC^2$

عكس مبرهنة فيثاغورس

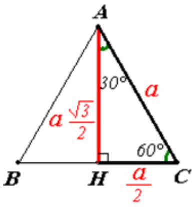
إذا كان في مثلّث ABC ، $BC^2=AB^2+AC^2$ فإنّ المثلّث ABC قائم في A.

مثال$_1$:

ABC مثلّث متقايس الأضلاع طول ضلعه يساوي a

(AH) الارتفاع المتعلّق بالضلّع [BC] .

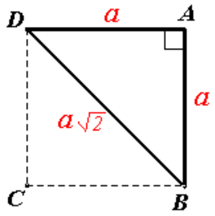
إنّ: $CH = \dfrac{a}{2}$ و $AH = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



مثال$_2$:

ABCD مربّع طول ضلعه يساوي a.

إنّ $BD = a\sqrt{2}$



نتائج:

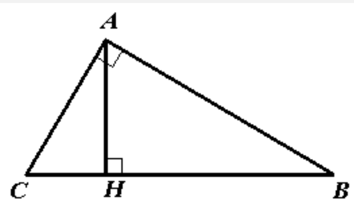
إذا كان ABC مثلّثا قائما في A، و(AH) الارتفاع المتعلّق بالضلّع [BC]فإنّ:

أ) $AB \times AC = AH \times BC$

ب) $AB^2 = BH \times BC$

جـ) $AC^2 = CH \times CB$

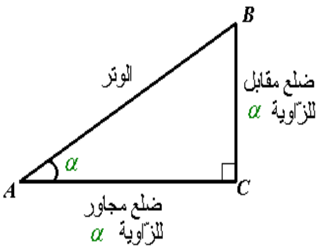
د) $AH^2 = HC \times HB$



النّسب المثلّثية في مثلّث قائم

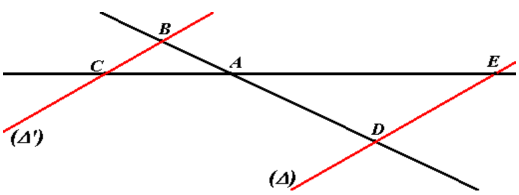
ABC مثلّث قائم في C،

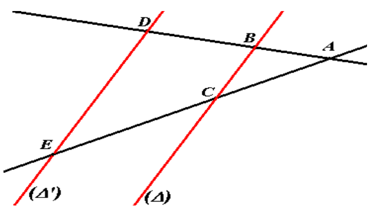
- جيب الزّاوية α: $\sin\alpha = \dfrac{\text{طول الضلع المقابل لـ } \alpha}{\text{طول الوتر}} = \dfrac{BC}{AB}$
- جيب تمام الزّاوية α: $\cos\alpha = \dfrac{\text{طول الضلع المجاور لـ } \alpha}{\text{طول الوتر}} = \dfrac{AC}{AB}$
- ظل الزّاوية α: $\tan\alpha = \dfrac{\text{طول الضلع المقابل لـ } \alpha}{\text{طول الضلع المجاور لـ } \alpha} = \dfrac{BC}{AC}$



خواص: من التّعريف نجد أنّ: $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

مبرهنة طالس





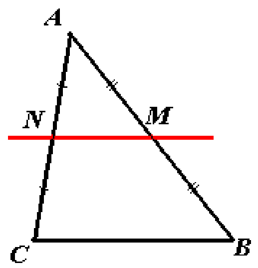
مبرهنة طالس

إذا كان لدينا مستقيمان متقاطعان في نقطة A يقطعهما مستقيمان (Δ) و (Δ') في النقاط B، C، D، E حسب أحد الشكلين أعلاه، وكان (Δ) يوازي (Δ')، فإنّ:
أطوال أضلاع المثلّث ABC متناسبة مع أطوال الأضلاع الموافقة لها من المثلث ADE
أي: $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{DE}$

عكس مبرهنة طالس

إذا كانت كلّ من النقط A، B، D والنّقط A، C، E على استقامة واحدة وبنفس التّرتيب حسب أحد الشكلين أعلاه، وكان $\frac{AC}{AE}=\frac{AB}{AD}$ ، فإنّ:
(Δ) يوازي (Δ')
[(Δ) هو (EC) و (Δ') هو (CB)]

➢ **حالة خاصة: مستقيم المتنصفين في مثلث**

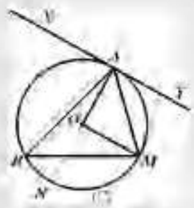


ABC مثلّث كيفي M و N نقطتان من (AB) و (AC) على التّرتيب.

- **إذا كانت النّقطتان M و N منتصفي [AB] و [AC] على التّرتيب**
  فإنّ: (MN) // (BC) و $MN=\frac{1}{2}BC$
- **إذا كانت النّقطة M منتصف [AB] وكان (BC) // (MN)**
  فإنّ N منتصف [AC].

الزّوايا والدّائرة

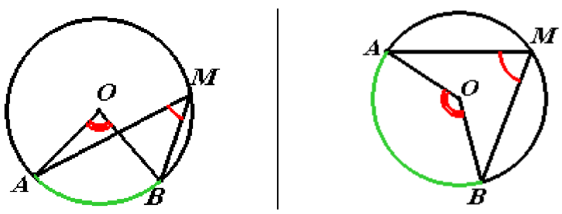
(C) دائرة مركزها O، و A، B، M، N نقط من الدّائرة (C) حيث O تنتمي إلى $[AN]$.



- $[AN]$ تسمّى قطرا، وكلّ من $[AB]$، $[AM]$، $[BM]$ تسمّى وترا في الدّائرة (C).
- النّقطتان المتمايزتان A، B تعيّنان على الدّائرة (C) قوسين كلّ منهما نرمز لها بالرّمز $\overset{\frown}{AB}$.
- (XY) مستقيم يشترك مع الدّائرة (C) في نقطة وحيدة A، يسمّى (XY) **مماسا** للدّائرة (C).
- الزّاوية $\widehat{AOM}$ رأسها مركز الدّائرة تسمّى زاوية **مركزيّة**، نقول إنّها **تحصر** القوس $\overset{\frown}{AM}$.
- الزّاوية $\widehat{ABM}$ رأسها نقطة من الدّائرة تسمّى زاوية **محيطيّة**. نقول إنّها **تحصر** القوس $\overset{\frown}{AM}$.
- الزّاوية $\widehat{XAB}$ تسمّى أيضا زاوية **محيطيّة**، نقول إنّها **تحصر** القوس $\overset{\frown}{AB}$.

مبرهنة في كلّ دائرة، الزّاوية المركزيّة تساوي ضعف الزّاوية المحيطيّة التّي تحصر معها نفس القوس.

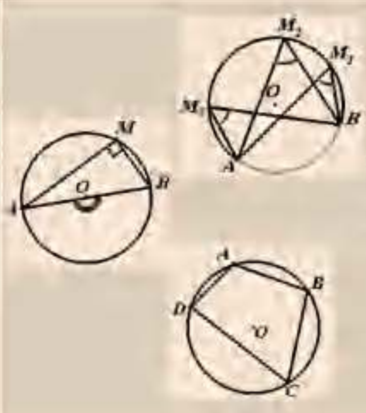
مثال: A ، B ، M ثلاث نقط متمايزة من دائرة مركزها O.



لدينا: $\widehat{AOB}=2\ \widehat{AMB}$

نتائج:

1. الزّاويا المحيطيّة، في دائرة، التي تحصر نفس القوس، أو تحصر أقواسا متقايسة تكون متقايسة.
2. عندما تكون نقطتان A، B من دائرة متقابلتين قطريا، و M نقطة من نفس الدّائرة وتختلف عن A و B فإنّ المثلّث ABM قائم في M.
3. تكون رؤوس الرّباعي المحدّب $ABCD$ من نفس الدّائرة إذا تحقّق أحد الشّرطين:
   أ) $\widehat{DBC}=\widehat{DAC}$
   ب) الزّاويتان $\widehat{BAD}$ و $\widehat{BCD}$ متكاملتان.



المثلّثات المتقايسة

نقول عن مثلثين إنهما متقايسان إذا كانا قابلين للتطابق.

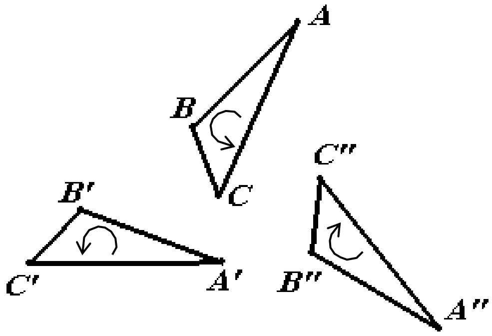
نتيجة:

المثلثان المتقايسان أطوال أضلاعهما متساوية مثنى مثني، وزواياهما متقايسة مثنى مثنى.

مثال:

المثلثان ABC و A'B'C' متقايسان، يمكن تطبيق أحدهما على الآخر بالسّحب والتّدوير أو التّدوير والسّحب، نقول إن تقايسهما مباشر.

المثلثان ABC و A''B''C'' متقايسان، لايمكن تطبيق أحدهما على الآخر إلا بعد قلب أحدها، نقول إنهما تقايسهما غير مباشر.



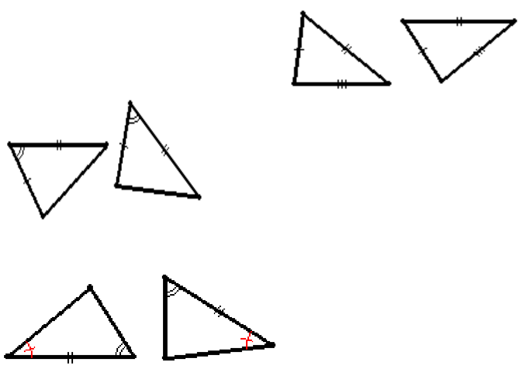
ملاحظة: المثلثين ABC و A'B'C' هما في نفس الاتجاه (عكس عقارب السّاعة)، بينما المثلثين ABC و A''B''C'' من اتّجاهين متعاكسين.

- **خواص (حالات تقايس مثلّثين)**

خاصية (1): يتقايس مثلثان إذا كانت أطوال أضلاعهما متساوية مثنى مثنى

خاصية (2): يتقايس مثلثان إذا تقايست زاوية والضلعان اللذان يحصرانها من أحد المثلّثين مع زاوية والضلعين اللّذين يحصرانها من المثلّث الآخر.

خاصية (3): يتقايس مثلثان إذا تقايس ضلع والزّاويتان المجاورتان له من أحد المثلّثين مع ضلع والزّاويتين المجاورتين له من المثلّث الآخر.



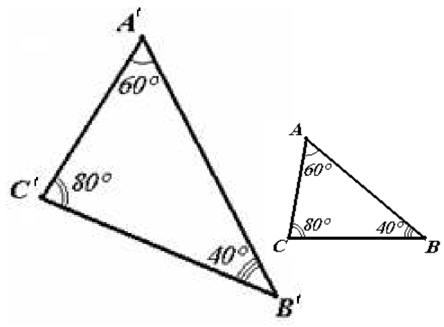
نتيجة:

يتقايس مثلثان إذا كان أحدهما صورة للمثلّث الآخر بانسحاب، أو تناظر محوري أو تناظر مركزي أو دوران.

المثلّثات المتشابهة

نقول عن مثلثين إنّهما متشابهان إذا كانت زوايا أحدهما تساوي زوايا الآخر.

مثال:



المثلثان ABC و A'B'C' متشابهان.

الرؤوس المتماثلة

A	B	C
A'	B'	C'

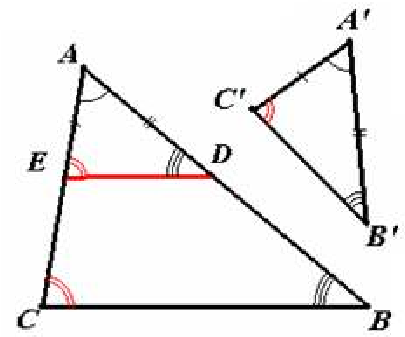
الأضلاع المتماثلة: [AB] و [A'B']

[AC] و [A'C'] ، [BC] و [B'C']

ملاحظات:

1. يكفي تساوي زاويتين من أحد المثلّثين مع زاويتين من المثلّث الآخر للقول إنّ المثلّثين متشابهان، ذلك لأنّ مجموع زوايا المثلّث يساوي 180°.
2. إذا كان أحد مثلثين تصغير (أو تكبير) للآخر فإنّ هذين المثلّثين متشابهان.
3. المثلّثان المتقايسان هما مثلّثان متشابهان، والعكس غير صحيح دائما.

مبرهنة: **المثلّثان المتشابهان أضلاعهما المتماثلة متناسبة.**



برهان

ليكن $\widehat{ABC}$ و $\widehat{A'B'C'}$ مثلّثان متشابهان حيث $\hat{A}=\hat{A'}$

$\hat{B}=\hat{B'}$ ، $\hat{C}=\hat{C'}$

ولنبيّن أنّ $\frac{B'C'}{BC}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{A'B'}{AB}$

من أجل ذلك نعلّم نقطة E من [AC] حيث AE=A'C' ونقطة D من [AB] حيث AD=A'B' .

المثلّثان ADE و A'B'C' فيهما: $\widehat{B'A'C'}=\widehat{DAE}$ و AE=A'C' و AD=A'B'، فهما متقايسان.

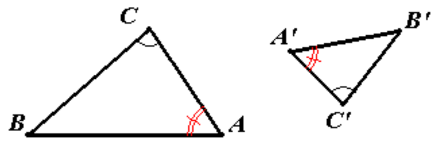
ومنه $\widehat{A'C'B'}=\widehat{AED}$ و C'B'=ED

لكنّ $\widehat{A'C'B'}=\widehat{ACB}$ وبالتّالي فإنّ $\widehat{AED}=\widehat{ACB}$، ومنه نستنتج أنّ (DE)//(BC) .

حسب مبرهنة طالس في المثلّثين ABC و AFE نجد $\frac{DE}{BC}=\frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}$ ومنه $\frac{B'C'}{BC}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{A'B'}{AB}$

خواص (حالات تشابه مثلّثين)

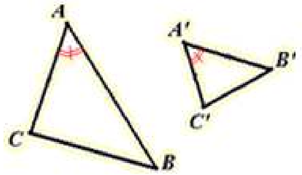
خاصية (1): **يتشابه مثلّثان إذا تقايست زاويتان من أحدالمثلّثين مع زاويتين من المثلّث الآخر.**



مثال: بما أنّ $\hat{A}=\hat{A'}$ و$\hat{B}=\hat{B'}$

فإنّ المثلّثين ABC وA'B'C' متشابهان.

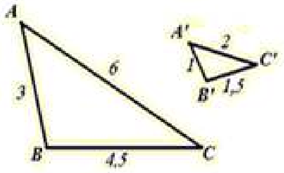
خاصية (2): يتشابه مثلّثان إذا تقايست زاوية من أحد المثلّثين مع زاوية من المثلّث الآخر، وكان طولا الضلعين الذين يحصران إحدى هاتين الزاويتين متناسبين مع طولي الضّلعين الذين يحصران الزّاوية الآخرى.



__مثال:__ بما أنّ $\widehat{A}=\widehat{A'}$ و $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}$

فإنّ المثلّثين ABC و A'B'C' متشابهان.

خاصية (3): يتشابه مثلّثان إذا كان أطوال الأضلاع المتماثلة فيهما متناسبة.



__مثال:__ بما أنّ $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{1}{3}$

فإنّ المثلّثين ABC و A'B'C' متشابهان.

- نسبة تشابه مثلّثين

ليكن ABC و A'B'C' مثلثان متشابهين، نسميّ **__نسبة تشابه__** هذين المثلّثين العدد الموجب غير المعدوم k حيث: $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=k$

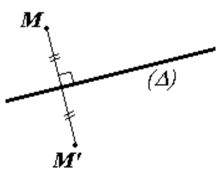
ملاحظات: لتكن k نسبة تشابه مثلّثين ABC و A'B'C' حيث $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=k$.

1. إنّ $\frac{1}{k}$ هي أيضا نسبة تشابه للمثلّثين ABC و A'B'C'.
2. إذا كان 0 < k < 1 فان المثلّث A'B'C' هو تصغير للمثلّث ABC ، ونسميّ k نسبة (أو معامل) التّصغير.
3. إذا كان k > 1 فان المثلّث A'B'C' هو تكبير للمثلّث ABC ، ونسميّ k نسبة (أو معامل) التّكبير.
4. إذا كان k = 1 فان المثلّث A'B'C' يقايس للمثلّث ABC .

__التّحويلات النّقطية__

التناظر المحوري

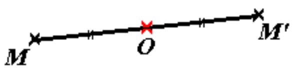
(Δ) مستقيم ثابت، **التّناظر المحوري** بالنّسبة إلى المستقيم (Δ) هو التّحويل الذّي يرفق بكل نقطة M من المستوي النّقطة 'M حيث:



- إذا كانت M لا تنتمي إلى المستقيم (Δ) فإنّ (Δ) محور قطعة المستقيم [MM'].
- إذا كانت M تنتمي إلى المستقيم (Δ) فإنّ M' = M.

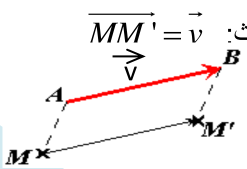
التناظر المركزي

O نقطة ثابتة ، **التّناظر المركزي** بالنّسبة إلى النّقطة O هو التّحويل الذّي يرفق بكل نقطة M من المستوي النّقطة 'M حيث: O منتصف قطعة المستقيم [MM'].

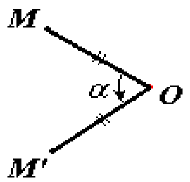


الانسحاب

$\vec{v}$ شعاع ثابت ، **الانسحاب** الذّي شعاعه $\vec{v}$ هو التّحويل الذّي يرفق بكل نقطة M من المستوي النّقطة M حيث: $\overrightarrow{MM'}=\vec{v}$



➢ الدّوران



O نقطة ثابت من مستوي موجّه ، و α زاوية معلومة. **الدّوران** الذّي مركزه النّقطة O وزاويته α في الاتجاه المباشر هو التّحويل الذّي يرفق بكل نقطة M من المستوي النّقطة 'M حيث:

- إذا كانت $M = O$ فإنّ $M' = O$
- إذا كانت $M \neq O$ فإنّ $OM = OM'$ و $\widehat{MOM'} = \alpha$ والثلاثية (O , M , M') مباشرة.

التّحويلات النّقطية – خواص

✍ **النّقاط الصامدة** **نقول عن نقطة إنّها صامدة بتحويل نقطي، إذا كانت منطبقة على صورتها بواسطة هذا التحويل.**

أمثلة:

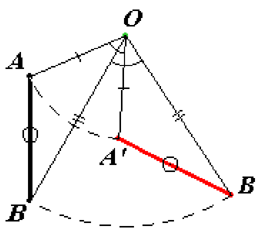
- التّناظر المحوري الذي محوره مستقيم (Δ) يقبل كلّ نقط هذا المستقيم نقطا صامدة.
- التّناظر المركزي الذي مركزه نقطة A يقبل نقطة صامدة وحيدة هي A نفسها.
- الانسحاب الذي شعاعه غير معدوم لا يقبل نقط صامدة.
- الدّوران الذّي مركزه نّقطة O وزاويته α (حيث $\alpha \neq 2k\pi$ و k عدد صحيح نسبي) يقبل نقطة صامدة وحيدة هي مركزه O.

2) حفظ المسافات (التقايس)

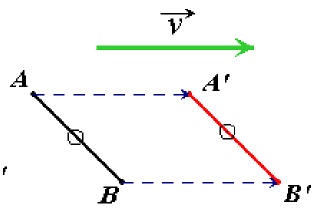
كلّ من التّناظر المحوري، والتّناظر المركزي، والانسحاب، والدّوران يحافظ على المسافات. يسمّى التّحويل الذّي يحافظ على المسافات تقايسا.

مثال:

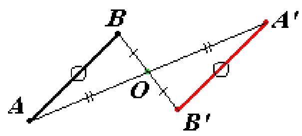
في الأشكال (1)،(2)،(3)،(4) [A'B'] صورة [AB] بتناظر محوري، بتناظر مركزي، بانسحاب، بدوران على الترتيب



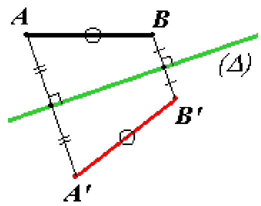
(4)



(3)



(2)



(1)

لدينا في كلّ حالة ممّا سبق $AB = A'B'$

✍ **حفظ الاستقامية**

إذا كانت A ، B ، C ثلاث نقط في استقامية فإنّ صوّرها 'A ، 'B ، 'C بتقايس تكون في استقامية.

نتيجة: صورة مستقيم بتقايس(تناظر محوري، تناظر مركزي، انسحاب، دوران) هو مستقيم.

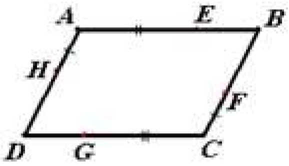
✍ **حفظ أقياس الزّوايا**

صورة زاوية بتقايس هي زاوية تقايسها.

يمكن إثبات هذه المبرهنة باستعمال تقايس المثلثات، ونستنتج منها:

- **إذا كان مستقيمان متوازيين فإنّ صورتيهما بتقايس متوازيان أيضا.**
- **إذا كان مستقيمان متعامدين فإنّ صورتيهما بتقايس متعامدان أيضا.**

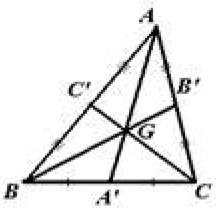
تمرين 1:



ABCD متوازي أضلاع، E، F، G، H نقط من [AB]، [BC]، [CD]، [DA] على التّرتيب، حيث AE = CG و AH = FC .

1. بيّن أنّ للقطعتين [EG] و [FH] نفس المنتصف، وعيّنه.
2. استنتج طبيعة الرّباعي EFGH.

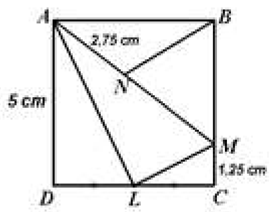
تمرين 2



ABC مثلّث كيفي.

1. بيّن أنّ متوسّطاته (AA')، (BB')، (CC') متقاطعة في نقطة واحدة G (تسمّى النّقطة G مركز ثقل المثلّث ABC).
2. بيّن أنّ AG = 2 GA' ، واستنتج أنّ BG = 2 GB' و CG = 2 GC'.

تمرين 3:

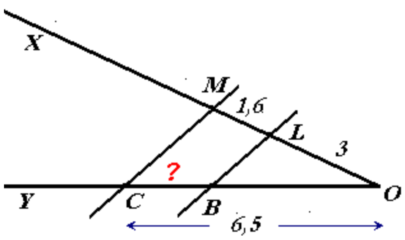


مربّع ABCD طول ضلعه 5 cm ، L منتصف [DC] و M نقطة من [BC] و N نقطة من [AM] حيث CM=1,25 cm، AN = 2,75 cm، BN=3,25 cm.

أي المثلّثين ALM ، ANB هو مثلّث قائم ؟

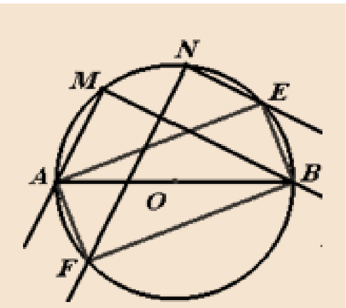
تمرين 4:

(OX] و (OY] نصفا مستقيمين متقاطعين في النّقطة O، النّقطتان L ، M من (OX] والنّقطتان B ، C من (OY] حيث OL=3 cm ، LM=1,6 cm ، OC=6,5cm و (LB)//(MC).



1. احسب الطّول BC (تعطى القيمة مدوّرة إلى 0,01)
2. A نقطة من [OB] و N نقطة من (MX] حيث: (MA)//(NB).
   هل المستقيمان (LA) و (NC) متوازيان ؟ برّر جوابك.

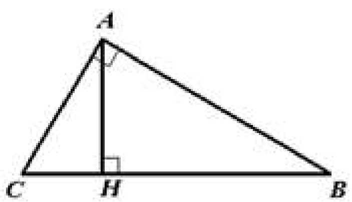
تمرين 5:



في الشّكل المقابل (C) دائرة مركزها O منتصف [AB]، M و N نقطتان متمايزتان من (C)، المستقيم الذّي يشمل النّقطة N ويوازي (MA) يقطع (C) في النّقطة F، والمستقيم الذّي يشمل النّقطة N ويوازي (MB) يقطع (C) في النّقطة E.

1. ما نوع الرّباعي AEBF ؟
2. بيّن أنّ MN = AF.

تمرين 6:



ABC مثلّثا قائما في A، و(AH) الارتفاع المتعلّق بالضّلع [BC]. بيّن أنّ:

أ) $AB \times AC = AH \times BC$

ب) $AB^2 = BH \times BC$ ، $AC^2 = CH \times CB$

ج) $AH^2 = HC \times HB$

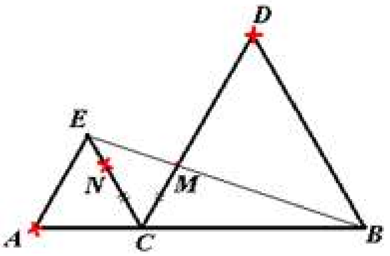
د) استنتج برهانا لمبرهنة فيثاغورس $AB^2 + AC^2 = BC^2$

تمرين 7:

$[AB]$ قطعة مستقيم، C نقطة منها، كلّ من المثلّثين ACE و BDC متقايس الأضلاع قطعة المستقيم $[EB]$ تقطع $[CD]$ في النّقطة M ، N نقطة من $[CE]$ حيث $CN = CM$.

بيّن أنّ النّقط A ، N ، D في استقامية.

تمرين 8 :



ليكن ABC مثلث متساوي الساقين، N نقطة من $[AC]$ تحقق $NB = BC$ كما هو مبين في الشكل التالي:

لتكن M نقطة من [ ] حيث $(MN) \parallel (BC)$ و F نقطة تقاطع المستقيم (BC) مع منصف الزاوية $\widehat{BNM}$.

1. انشئ النقطتين M و F .
2. بين ان المثلث FBN متساوي الساقين.
3. استنتج طبيعة المثلث NFC .
4. انشئ النقطة B' من المستوي حتى يكون الرباعي $B'MCB$ معين .
   - بين ان المثلثين $B'MB$ و AMN متشابهين.

تمرين 9:

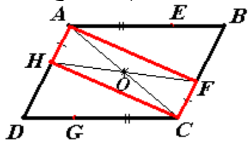
في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ نعتبر النقط: $A(2;-2)$ ، $B(-2;-2)$ و C منتصف $[OA]$.

B' نظيرة C بالنسبة لحامل محور الفواصل ، A' نظيرة A بالنسبة للنقطة B' و C' هي صورة C بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}\binom{1}{3}$.

1. انشئ كل من النقط A، B، C، A'، B' و C' .
2. بين ان المثلث ABC' قائم في A ومتساوي الساقين.
3. استنتج ان النقط A ، B و C' تنتمي الى نفس الدائرة (C) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .
4. بملاحظة ان C' نظيرة A بالنسبة لحامل محور الفواصل ،استنتج ان B' منتصف القطعة $[OC']$.
5. ما طبيعة الرباعي $OAC'A'$.
6. استنتج ان $(A'C')$ مماس للدائرة (C).

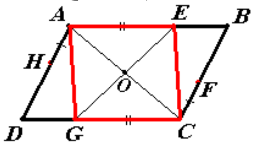
حل التمرين 1:

- 1. بـما أنّ (FC) // (AH) و AH = FC فإنّ الرّباعي AFCH متوازي أضلاع.



ومنه للقطعتين [AC] و [HF] نفس المنتصف . . . (1)

- 2. بما أنّ (GC) // (AE) و AE = GC فإنّ الرّباعي AEGC متوازي أضلاع.



ومنه للقطعتين [AC] و [EG] نفس المنتصف . . . (2)

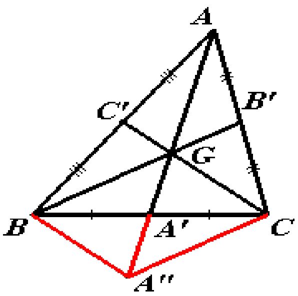
من (1) و (2) نجد أنّ للقطعتين [HF] و [EG] نفس المنتصف.

منتصف القطعتين [HF] و [EG] هو منتصف [AC]، وبالتالي هو مركز متوازي الأضلاع ABCD.

بما أنّ للقطعتين [HF] و [EG] نفس المنتصف، فإنّ الرّباعي EFGH متوازي أضلاع.

حل التمرين 2:

1. نرسم المتوسطين (BB')، (CC') فيتقاطعان في نقطة نسمّيها G، ولنبيّن أنّ المتوسط (AA') يشمل G (أو (AG) يشمل A' منتصف [BC])
لتكن A'' نظيرة النّقطة A بالنّسبة إلى النّقطة G.



- بتطبيق مبرهنة مستقيم المنتصفين في المثلّث ACA'' نجد (B'G)//(CA'') ... (1)
- بتطبيق مبرهنة مستقيم المنتصفين في المثلّث ABA'' نجد (C'G)//(BA'') ... (2)

من (1) و (2) نجد أنّ (CG)//(BA'') و (BG)//(CA'').

ومنه الرّباعي BGCA'' متوازي أضلاع، وقطراه [GA''] و [BC] متناصفان.

ومنه المستقيم (AG) يشمل A' منتصف [BC] .

وبالتّالي المتوسّطات (AA')، (BB')،(CC') متقاطعة في نقطة واحدة G

2. لدينا AG = GA'' لأنّ A'' نظيرة النّقطة A بالنّسبة إلى النّقطة G.
و GA'' = 2 GA' لأنّ الرّباعي BGCA'' متوازي أضلاع.

ومنه AG = 2 GA'.

لدينا A''C = 2 GB' و A''C = BG ، ومنه BG = 2 GB'.

ونفس الطريقة نجد CG = 2 GC'

حل التمرين 3:

أولا: حساب مربّع طول كلّ ضلع من أضلاع المثلّث ALM بتطبيق مبرهنة فيثاغورس

- في المثلّث ABM :
$AM^2 = AB^2 + BM^2 = 5^2 + (3,75)^2 = 39,0625$
- في المثلّث ADL : $AL^2 = AD^2 + DL^2 = 5^2 + (2,5)^2 = 31,25$
- في المثلّث LCM :

$LM^2 = LC^2 + CM^2 = (2,5)^2 + (1,25)^2 = 7,8125$

نلاحظ أنّ : $AM^2 = AL^2 + LM^2$

وحسب المبرهنة العكسية لمبرهنة فيثاغورس فإنّ المثلّث ALM قائم في L

ثانيا: نحسب مرّبع طول كلّ ضلع من أضلاع المثلّث ANB فنجد:

$AB^2 = 25$ و $AN^2 = 7,5625$ و $NB^2 = 10,5625$

لو كان المثلّث ANB قائما، لكان قائما في N، لأنّ [AB] هو أطول ضلع فيه، ولكان $AB^2 = AN^2 + NB^2$ حسب مبرهنة فيثاغورس.

لكن $AN^2 + NB^2 = 18,125$ ومنه $AB^2 \neq AN^2 + NB^2$.

ومنه المثلّث ANB ليس قائما.

حل التمرين 4:

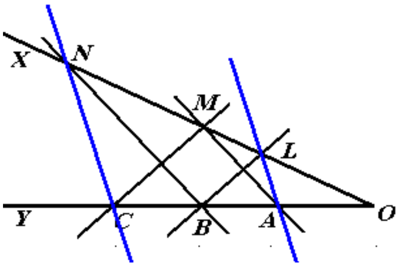
1. بما أنّ L من (OM) و B من (OC) و (LB)//(MC)

فإنّ $\dfrac{LB}{MC} = \dfrac{OB}{OC} = \dfrac{OL}{OM}$ (حسب مبرهنة طالس)

نحسب OB

لدينا: $4,6 \times OB = 3 \times 6,5 \Leftrightarrow \dfrac{OB}{6,5} = \dfrac{3}{4,6}$ ومنه $OB \approx 4,24$

ومنه $BC = OC - OB = 6,5 - 4,24 = 2,26$ cm



2.

بما أنّ L من (OM) و B من (OC) و (LB)//(MC)

فإنّ $\dfrac{LB}{MC} = \dfrac{OB}{OC} = \dfrac{OL}{OM}$ ... (1)

بما أنّ N من (OM) و B من (OA)

و (NB)//(MA)

فإنّ $\dfrac{MA}{NB} = \dfrac{OA}{OB} = \dfrac{OM}{ON}$ ... (2)

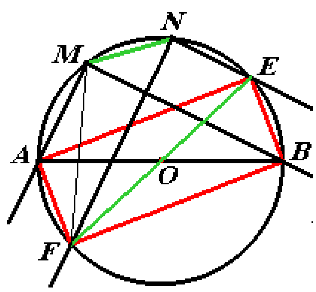
من (1) و (2) نجد $OM \times OB = OL \times OC = ON \times OA$

ومنه $\dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OL}{ON}$

وبما أنّ كلاّ من النّقط O، L، N والنّقط O، A، C في استقامية وبنفس الترتيب.

فإنّ (NC) // (LA) (حسب المبرهنة العكسية لمبرهنة طالس)

حل التمرين 5:



1. الزّاوية $\widehat{AMB}$ قائمة (لأنّ [AB] قطر في الدّائرة (C))

و (MA)//(NF) و (MB)//(NE)

فإنّ الزّاوية $\widehat{ENF}$ قائمة.

ومنه [EF] قطر في الدّائرة (C)

نستنتج أنّ [AB] و [EF] متناصفان ومتقايسان ومنه الرّباعي AEBF مستطيل.

2. لدينا (MA)//(NF) و(MF) قاطع لهما ومنه فإنّ $\widehat{AMF}=\widehat{MFN}$ بالتّبادل الداخلي، وبما أنّ كلاّ منهما زاوية محيطية فإنّ القوسين اللتين تحصرانهما متقايستان. أي $\overset{\frown}{MN}=\overset{\frown}{AF}$ ومنه MN = AF

حل التمرين 6:

- لدينا في المثلّثين القائمين ACH و ABC الزّاوية ACH مشتركة، ومنه المثلثان ACH وABC مشتابهان.

الرؤوس المتماثلة

A	B	C
H	A	C

ومنه $\frac{AB}{HA}=\frac{AC}{HC}=\frac{BC}{AC}$

أ) من النّسبة الأولى والثالثة نجد $AB\times AC = HA\times BC$

وتكتب $AB\times AC = AH\times BC$

ب) من النّسبة الثانية والثالثة نجد $AC\times AC = HC\times BC$ وتكتب

$AC^2 = CH \times CB$

بنفس الطّريقة السّابقة نجد من تشابه المثلّثين ABH و ABC أنّ

$AB^2 = BH \times BC$

جـ) لدينا $\widehat{CAH}=\widehat{ABH}$ (لأنّ $\widehat{CAH}+\widehat{HAB}=\widehat{ABH}+\widehat{HAB}=90°$)

وبالتّالي فالمثلّثان AHB و CHA متشابهان

الرؤوس المتماثلة

A	H	B
C	H	A

ومنه $\frac{AH}{CH}=\frac{AB}{CA}=\frac{HB}{HA}$

من النّسبة الأولى والثالثة نجد $AH\times HA = CH\times HB$

وتكتب $AH^2 = HC \times HB$

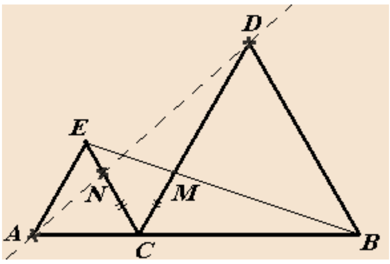
د) من الجزء (ب) نجد $AB^2 + AC^2 = (BH \times BC) + (CH \times CB)$

$= BC \times (BH + HC) = BC^2$

حل التمرين 7:

- لدينا $\widehat{ACE}=\widehat{DCB}=60°$ ومنه $\widehat{ECD}=60°$
- نعتبر الدّوران الذّي مركزه النّقطة C وزاويته 60° في الاتجاه المباشر، إنّه يحوّل: النّقطة B إلى النّقطة D والنّقطة M إلى النّقطة N والنّقطة E إلى النّقطة A

وبما أنّ النّقط B ، M ، E في استقامية فإنّ النّقط D ، N ، A في استقامية أيضا.



حل التمرين :8

2. تبيان ان المثلث FBN متساوي الساقين:

لدينا: $\widehat{MNF} = \widehat{NFB}$ (بالتبدل الداخلي للزوايا) .

و : $\widehat{MNF} = \widehat{FNB}$ (منصف زاوية) .

ومنه : $\widehat{NFB} = \widehat{FNB}$.

وبالتالي المثلث FBN متساوي الساقين .

3. استنتاج طبيعة المثلث NFC :

بما ان $BN = BC$ و $BN = BF$ فان $BN = BF = BC$ أي النقط N ، F و C تنمي الى نفس الدائرة التي مركزها B .

ومنه : المثلث NFC مرسوم داخل هذه الدائرة .وبالتالي NFC مثلث قائم في N .

4. تبيان ان المثلثين $B'MB$ و AMN متشابهين:

لدينا : في المثلثين $B'MB$ و MBC :

$BC = B'M$ ، $B'B = MC$ و $[MB]$ ضلع مشترك.

اذن : المثلثان $B'MB$ و MBC متقايسان.

في المثلث AMN لدينا : $AN = AM$ (باستعمال نظرية طاليس).

أي : المثلث AMN مثلث متساوي الساقين .

اي: $\widehat{AMN} = \widehat{ANM}$.

و : $\widehat{AMN} = \widehat{ABC}$ (لان المثلثان AMN و ABC متشابهان).

و $\widehat{BMC} = \widehat{MBC}$

ومنه : في المثلثان MBC زاويتان متقايستان مع زاويتان من المثلث AMN .

اذن : المثلثان AMN و MBC متشابهان .

وبما ان MBC و $B'MB$ متقايسان فان $B'MB$ و AMN متشابهان .

حل التمرين :9

2. تبيان ان ABC' مثلث قائم في A ومتساوي الساقين:

لدينا: $BC' = \sqrt{32}$ ، $AB = 4$ و $AC' = 4$.

اي: $AC'^2 + AB^2 = BC'^2$

ومنه : حسب عكس نظرية فيثاغورس فان ABC' مثلث قائم في A ومتساوي الساقين .

3. استنتاج ان النقط A ، B و C' تنتمي الى نفس الدائرة (C) :

بما ان ABC' مثلث قائم فهو مرسوم داخل دائرة مركزها O منتصف وتر المثلث ABC' و نصف قطرها $2\sqrt{2}$.

4. استنتاج ان B' منتصف القطعة $[OC']$:

بما ان C' نظيرة A بالنسبة لحامل محور الفواصل و O نظيرة نفسها بالنسبة لحامل محور الفواصل فان $[OC']$ نظيرة $[OA]$ بالنسبة لحامل محور الفواصل .

لدينا C منتصف $[OA]$ و B' نظيرة C بالنسبة لحامل محور الفواصل .بما ان التناظر المحوري يحافظ على منتصف قطعة مستقيم فإن B' منتصف $[OC']$

5. طبيعة الرباعي $OAC'A'$:

بما ان B' منتصف $[OC']$

و A' نظيرة A بالنسبة ل B' .اي: B' منتصف $[AA']$

أي : قطرا الرباعي $OAC'A'$ متناصفان .

وبالتالي : $OAC'A'$ متوازي اضلاع.

6. استنتاج ان $(A'C')$ مماس للدائرة (C) :

$(A'C')$ مماس للدائرة (C) معناه: $(A'C') \perp (OC')$.

لدينا: $(A'C') \parallel (OA)$.

برهان ان $(OC') \perp (OA)$:

في المثلث OAC' لدينا: $OC' = 2\sqrt{2}$ ، $OA = 2\sqrt{2}$ و $AC' = 4$.

اي: $OA^2 + OC'^2 = AC'^2$

ومنه حسب عكس نظرية فيثاغورس فان OAC' مثلث قائم في O .

اي: $(OC') \perp (OA)$.

وبما ان $(OC') \parallel (OA)$ فإنهما عموديان على نفس المستقيم .

ومنه: $(A'C') \perp (OC')$.

وبالتالي: $(A'C')$ مماس للدائرة (C) .

التمرين1:

ABC مثلث قائم في A و متساوي الساقين.

$AB'C'$ مثلث قائم في A و متساوي الساقين.

-أثبت أن المستقيمان (BB') و (CC') متعامدان.

التمرين2:

(Δ) مستقيم. A ,B و C ثلاث نقاط من (Δ)، O نقطة لا تنتمي الى (Δ). لتكن AOA' ، BOB' و COC' ثلاث مثلثات متقايسة الأضلاع .

-برهن أن النقط A' ,B' و C' على استقامة واحدة .

التمرين3:

ABC مثلث. O منتصف $[AB]$، M نقطة من $[CO]$. E و F نقطتان من $[MB]$ $[MA]$ على الترتيب بحيث $MB=2ME$ و $MA=2MF$

1- برهن أن (AB) و (EF) متوازيان .

2- بين أن المثلثين MAB و MEF متشابهان .

التمرين4:

مربع $ABCD$ طول ضلعه $5cm$، L منتصف $[DC]$ و M نقطة من $[BC]$ و N نقطة من $[AM]$ حيث $CM=1,25cm$ و $AN=2,75cm$ و $BN=3,25cm$.

-أي المثلثين ALM ، ANB هو مثلث قائم .(ارشاد: استعمل مبرهنة فيثاغورس و عكسها).

التمرين 5:

$ABCD$ مربع، BCE و CDF مثلثين كل منهما متقايس الأضلاع.

1.علم النقطة G بحيث يكون المثلث ACG متقايس الأضلاع و تكون G و B من جهتين مختلفتين بالنسبة للمستقيم (AC) .

2. بين أن النقط B, D, G على استقامة واحدة.

3. بين أنه يوجد دوران يحول النقط B, D, G الى النقط E, F, A ثم استنتج ان النقط E, F, A على استقامة واحدة.

التمرين 6:

AED مثلث حيث: $AE=5cm$ ، $AD=3cm$ و $DE=6cm$.

$AEFG$ و $ABCD$ مربعين كما هو موضح في الشكل.

1.أثبت أن $BE=DG$.

2.بين أن D و G هما صورتي B و E على الترتيب بتحويل نقطي يطلب تعين عناصره.

3.أنشئ النقطة D' صورة النقطة D بالدوران الذي مركزه A وزاويته 90° في الاتجاه المباشر.

4.احسب الطول DD'.

التمرين 7:

ABC مثلث حيث: $AB = 5cm$ ، $AC = 7cm$ و $BC = \sqrt{74}$.

1.ما نوع المثلث ABC.

E نقطة من $[AC]$ بحيث $AE = 3cm$ ، محور القطعة $[EC]$ يقطع $[EC]$ في H و $[BC]$ في J و $[BE]$ في M (أرسم الشكل)

2.بين أن المستقيمين (JH) و (AB) متوازيان و أن $HC = 2cm$.

3.احسب طول القطعة $[JH]$.

الهندسة في الفضاء

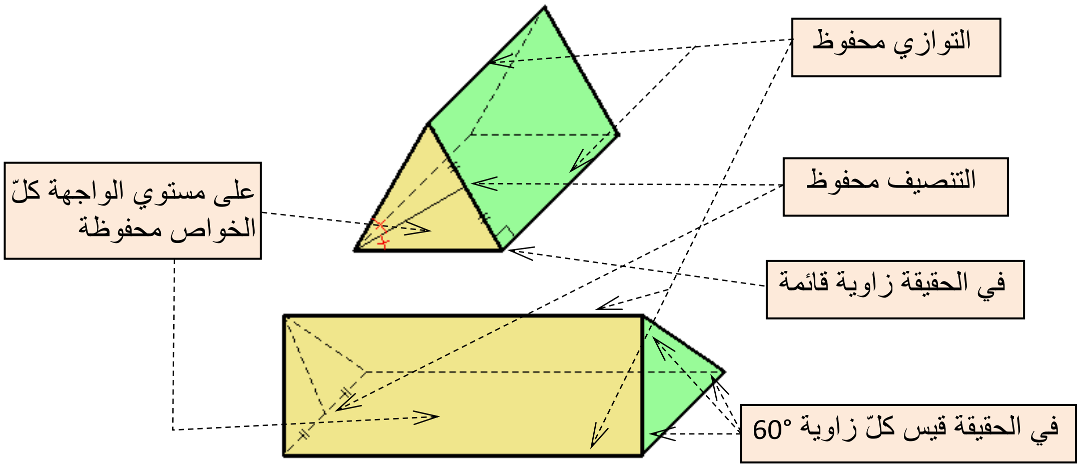
ملخص الدرس

التّمثيل بالمنظور متساوي القياس:

المنظور متساوي القياس هو تقنية لتمثيل أشياء من الفضاء على سطوح مستوية (ورقة الكرّاس، سبورة، ...)، ومن قواعد هذه التقنيّة:

1. الخطوط المخفية (التي لا تُرى عند تصوّر رؤية المجسّم) ترسم بخطوط متقطّعة.
2. على مستوي الواجهة (مستوي الإسقاط) كلّ الخواص (التّوازي، التّعامد، التّنصيف، استقامية النقط، ...)، والمقادير(الزّوايا، المسافات بمقياس، ...) محفوظة.
3. على جميع الأوجه كلّ من: استقامية النّقط، والتّوازي، ومنتصف قطعة مستقيم، وكذا النّسب بين قطع المستقيم المتوازية محفوظ.

مثال: تمثيل موشور قاعدته مثلث متقايس الأضلاع مرسوم عليه منصّف إحدى زوايا القاعدة، مرّة بأخذ القاعدة في مستوي الواجهة، وأخرى بأخذ أحد الأسطح الجانبية في مستوي الواجهة.

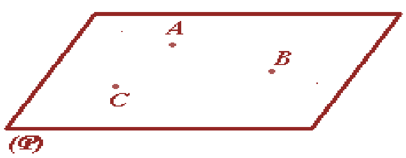


ملاحظة: المستوي في المنظور متساوي القياس يمثّل بمتوازي أضلاع.

المستقيم و المستوي في الفضاء

بديهية (1): إذا كانت نقطتان A و B متمايزتين فإنه يوجد مستقيم وحيد يشملهما.

- النّقطتان A و B تعيّنان مستقيما وحيدا، نرمز له بـ (AB) أو (BA).



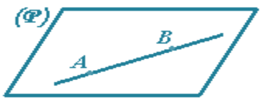
بديهية (2): إذا كانت ثلاث نقط A و B و C ليست في استقامية فإنه يوجد مستو وحيد يشملها.

بديهية (3): إذا شمل مستو نقطتين متمايزتين A و B فإنّه يشمل كلّ نقط المستقيم (AB) .

- النّقط A و B و C تعيّن مستوٍ وحيد، نرمز له بـ (ABC) أو بـ ($\mathcal{P}$).
- نمثّل المستوي في المنظور متساوي القياس بمتوازي أضلاع.

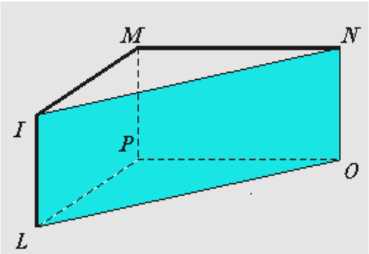
نتيجة: يتعيّن المستوي

1. إمّا بثلاث نقط ليست عل استقامة واحدة.
2. وإمّا بمستقيم ونقطة لا تنتمي إلى هذا المستقيم.
3. وإمّا بمستقيمين متمايزين متقاطعين أو متوازيين.



- كلّ من:
  - ⇦ النّقط N و I و L
  - ⇦ المستقيم (NI) والنّقطة O
  - ⇦ المستقيمان المتوازيان(OL) و(NI)
  - ⇦ المستقيمان المتقاطعان(OL) و(IL)

  تعيّن نفس المستوي (ONIL).



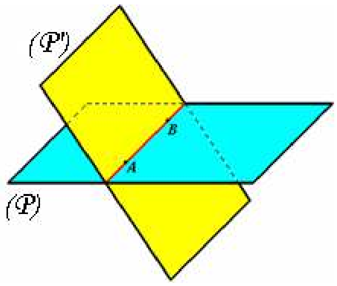
ملاحظة: كلّ خواص ونتائج الهندسة المستوية تبقى صحيحة في أي مستو من الفضاء.

الأوضاع النسبية

الأوضاع النسبية لمستويين

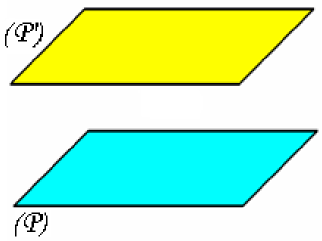
كلّ مستويين من الفضاء هما: إما متقاطعان وإما متوازيان.

المستويان $(\mathcal{P})$ و$(\mathcal{P}')$ متقاطعان

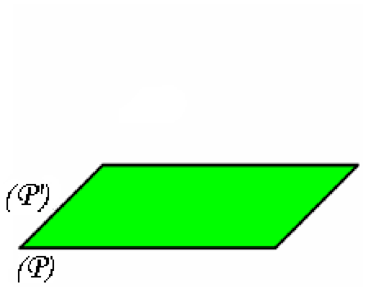


كلّ نقط المستقيم (AB) مشتركة بينهما.

المستويان $(\mathcal{P})$ و$(\mathcal{P}')$ متوازيان



لا توجد بين $(\mathcal{P})$ و$(\mathcal{P}')$ أيّة نقطة مشتركة.



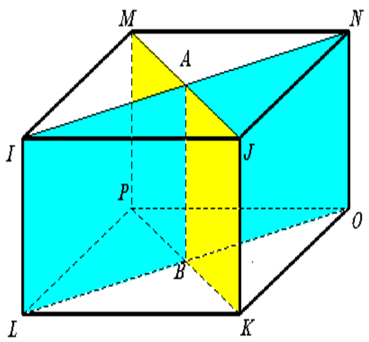
للمستويين نفس النقط.$(\mathcal{P}) = (\mathcal{P}')$

الأوضاع النسبية لمستقيم ومستو

نشاط:

الشّكل LKOPIJNM هو تمثيل مكعب بالمنظور متساوي القياس. لاحظ وأجب عن الأسئلة الآتية:

1. ما هو وضع المستقيم (NK) و المستوي $(POkL)$.
2. ما هو وضع المستقيم (MP) و المستوي $(INOL)$.
3. أذكر مستقيمان عموديان على المستقيم (OL).
4. أذكر مستقيمان يوازيان المستقيم (AB).
5. أ- ما هو الوضع النسبي للمستقيمين (MP) و (OK)



ب- هل يمكن تعيين مستوي يحتوي كل من المستقيمين (MP) و (OK)

حل النشاط

المستقيم (NK) والمستوي $(POkL)$ متقاطعان.

المستقيم (MP) و المستوي $(INOL)$ متوازيان.

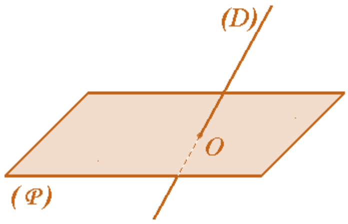
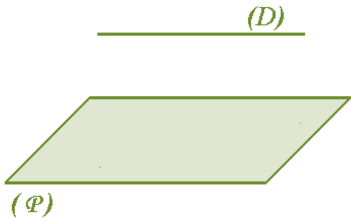
3. مستقيمان عموديان على المستقيم (OL) : (AB) و(PK) ...

4. مستقيمان يوازيان المستقيم (AB) : (MP) و(JK) ...

5.أ- للمستقيمان (MP) و (OK) ليسا من نفس المستوي

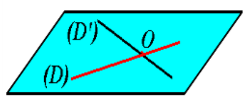
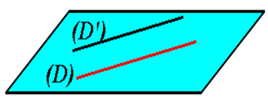
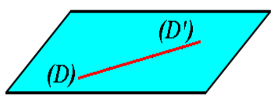
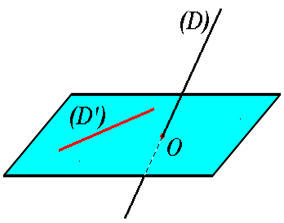
ب- لا يمكن، لأنهما غير متوازيان و غير متقاطعان

> كلّ مستقيم ومستو من الفضاء هما: إما متقاطعان وإما متوازيان.

المستوي $(\mathcal{P})$ والمستقيم (D) متقاطعان	المستوي $(\mathcal{P})$ والمستقيم (D) متوازيان	
		
توجد بين $(\mathcal{P})$ و (D) نقطة مشتركة وحيدة O.	لا توجد بين $(\mathcal{P})$ و (D) أيّة نقطة مشتركة.	كل نقط المستقيم تنتمي إلى المستوي. $(\mathcal{P})$يحتوي على (D)

الأوضاع النسبية لمستقيمين

> كلّ مستقيمين من الفضاء هما:
>
> ⇦ إما متقاطعان
> فهما من مستو واحد.
> ⇦ وإما متوازيان
>
> ⇦ وإما ليسا من مستو واحد.

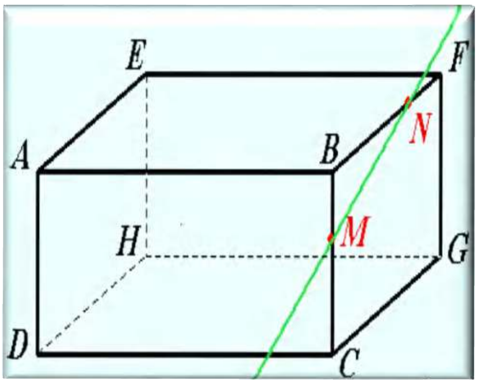
(D) و (D') متقاطعان	(D) و (D') متوازيان		ليسا من مستو واحد
			
توجد بين (D) و (D') نقطة مشتركة وحيدة O.	لا توجد بين (D) و (D') أيّة نقطة مشتركة.	المستقيمان (D) و (D') متطابقان. (D) = (D')	لا توجد بين (D) و (D') أيّة نقطة مشتركة.

تمرين 25 صفحة 206

الشّكل المقابل هو تمثيل بالمنظور متساوي القياس لمتوازي مستطيلات ABCDEFGH

$\left[BF\right]$ نقطة من N و $\left[BC\right]$ نقطة من M.

. أذكر الوضع النّسبي - مع تبرير الجواب - لكلّ من:



أ. المستقيم (MN) والمستوي (BCF).
ب. المستقيم (MN) والمستوي (ABFE).
ج. المستقيم (MN) والمستوي (ADHE).
د. المستقيم (MN) والمستقيم (CG).
هـ. المستقيم (EB) والمستقيم (HC).

و. المستوي (NBM) والمستوي (BEH).
ز. المستوي (NBM) والمستوي (AEH).

حل:

أ/- لدينا M نقطة من $\left[BC\right]$ و N نقطة من $\left[BF\right]$ اذن M و N نقطتان من (BCF) و بالتالي كل نقط المستقيم (MN) تنتمي الى المستوي (BCF) أي المستوي (BCF) يحتوي المستقيم (MN).

ب/- بما أن N نقطة من $\left[BF\right]$ فانها تنتمي الى المستوي $\left(ABFE\right)$ ، M نقطة من $\left[BC\right]$ اذن M هي خارج المستوي $\left(ABFE\right)$ و بالتالي المستقيم (MN) يقطع المستوي $\left(ABFE\right)$ في نقطة وحيدة و هي N .

ج/- المستويان $(ADHE)$ و (BCF) متوازيان و المستوي (BCF) يشمل (MN) اذن المستقيم (MN) و المستوي (BCF) متوازيان.

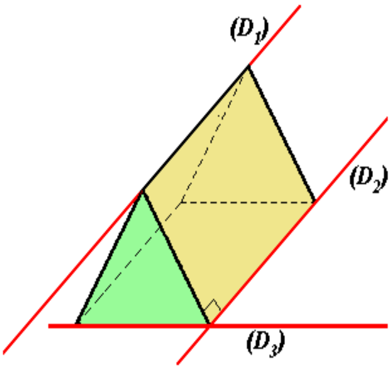
د/- المستقيمات (MN) و (CG) و (BF) من نفس المستوي (BCF) و لدينا المستقيمين (CG) و (BF) متوازيان، بما أن (MN) يقطع (BF) فان (MN) يقطع (CG).

ه/- المستويان $\left(ABFE\right)$ و $\left(DCGH\right)$ متوازيان و يشملان المستقيمان (EB) و (HC) على الترتيب اذن المستقيمين (EB) و (HC) متوازيان.

و/- المستويان (NBM) و (BEH) متمايزان و لهما نقطة مشتركة اذن هما متقاطعان في مستقيم.

ز/- المستويان (NBM) و (AEH) متوازيان للأن (NBM) هو $(BCGF)$ و (AEH) هو $(ADHE)$ و من تعريف متوازي المستطيلات لدينا $(BCGF)$ و $(ADHE)$ مستويين متوازيين.

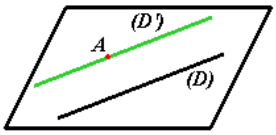
❑المستقيمات المتوازية في الفضاء



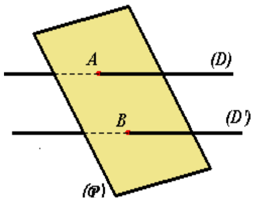
المستقيمان المتوازيان في الفضاء هما مستقيمان متطابقان، أو من نفس المستوي وغير متقاطعين.

مثال: الشّكل المقابل لموشور قائم قاعدته مثلث، نلاحظ فيه أنّ: المستقيمين (D_1) و (D_2) متوازيان، والمستقيمين (D_2) و (D_3) متقاطعان، بينما المستقيمان (D_1) و (D_3) ليسا من مستو واحد.

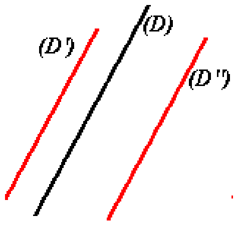
خواص



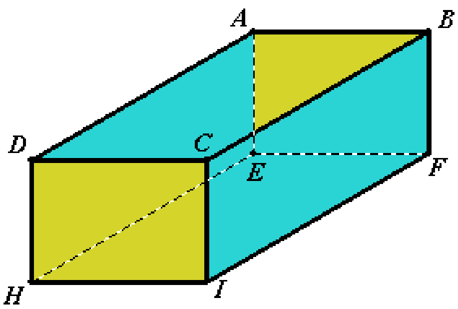
1. يوجد مستقيم وحيد يشمل نقطة معلومة ويوازي مستقيما معلوما.



2. إذا قطع مستو أحد مستقيمين متوازيين فإنّه يقطع الآخر.



3 المستقيمان الموازيان لثالث متوازيان.

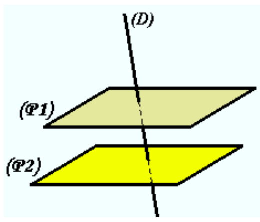


❑المستويات المتوازية

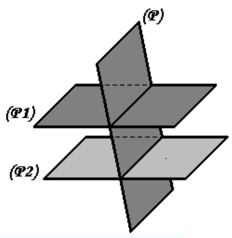
المستويان المتوازيين هما مستويان متطابقان، أومنفصلان (لا توجد بينهما أيّة نقطة مشتركة).

مثال: الشّكل المقابل لمتوازي مستطيلات، نلاحظ فيه أنّ: المستويين (BCIF) و(ADHE) متوازيان، والمستويين (ABFE) و(DCIH) متوازيان، وكذلك (ABCD) و(EFIH).

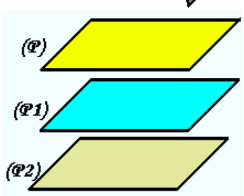
خواص



1. يوجد مستو وحيد يشمل نقطة معلومة ويوازي مستوياً معلوما.
2. إذا قطع مستقيم أحد مستويين متوازيين فإنّه يقطع الآخر.

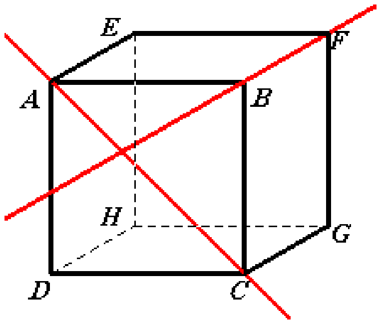


3. إذا قطع مستوي أحد مستويين متوازيين فإنّه يقطع الآخر، ويكون مستقيما التقاطع متوازيان.



4. المستويان الموازيان لثالث متوازيان.

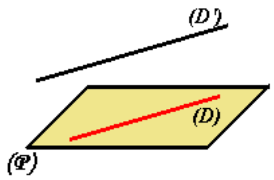
❑المستقيمات والمستويات المتوازية



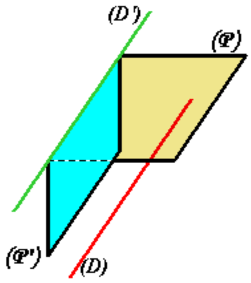
يكون مستقيم ومستو متوازيين إذا كانا منفصلين (لا توجد بينهم أيّة نقطة مشتركة)، أو كان المستقيم محتويا في هذا المستوي.

مثال: الشّكل المقابل لمكعّب، نلاحظ فيه أنّ: المستقيم (AC) يوازي كلاّ من المستويين (EFGH) و (ABCD)، وكذلك المستقيم (BF) يوازي كلاّ من المستويات (BFGC) و(BFEA) و(AEHD) و(HDCG).

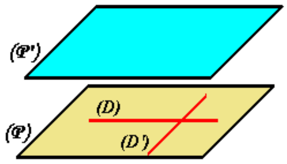
خواص



1. **يكون مستقيم مواز لمستو إذا وفقط إذا كان موازيا لمستقيم من هذا المستوي.**



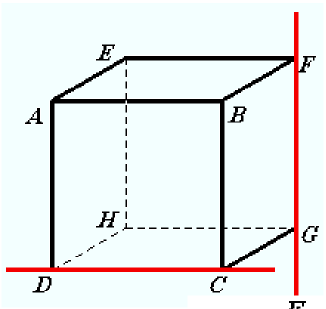
2. **إذا كان مستقيم يوازي أحد مستويين متوازيين فإنه يوازي المستوي الآخر.**
3. **إذا كان مستقيم يوازي مستويين متقاطعين فإنه يوازي مستقيم تقاطعهما.**



4. **يتوازى مستويان إذا وفقط إذا احتوى أحدهما على مستقيمين متقاطعين كلّ منهما يوازي المستوي الآخر.**
5. **المستويان الموازيان لثالث متوازيان.**

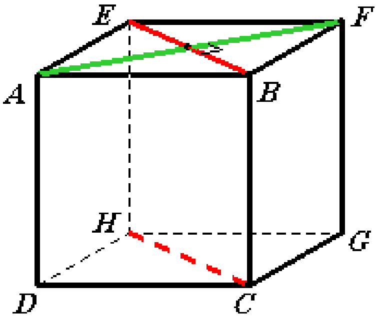
التعامد في الفضاء

✍تعامد المستقيمات في الفضاء



نقول عن مستقيمين أنّهما متعامدان إذا كان موازياهما المرسومان من نفس النّقطة متعامدين.

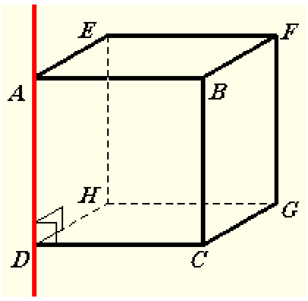
مثال: الشّكل المقابل لمكعّب، نلاحظ فيه أنّ: المستقيمين (DC) و (FG) متعامدان، لأن (DC) و (BC) متعامدان، و (BC) و(FG) متوازيان و(DC) يوازي نفسه.



خواص

1. المستقيم العمودي على أحد مستقيمين متوازيين عمودي على الآخر.
2. المستقيمان الموازيان لمستقيمين متعامدين متعامدان.

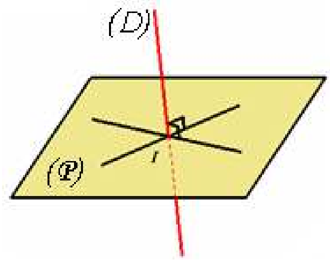
✍تعامد المستقيمات والمستويات



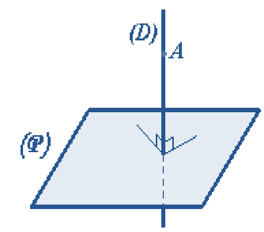
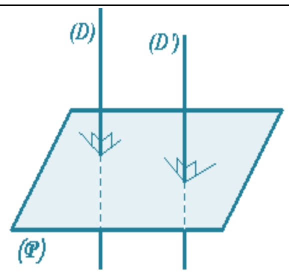
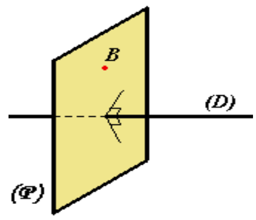
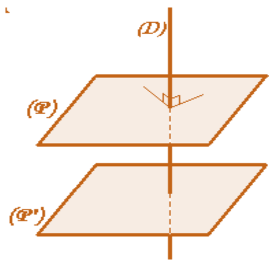
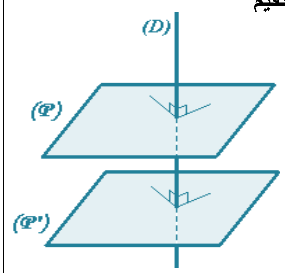
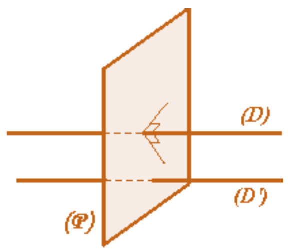
نقول عن مستقيم أنه عمودي على مستو إذا كان هذا المستقيم عموديا على كلّ مستقيمات هذا المستوي.

مثال: الشّكل المقابل لمكعّب، نلاحظ فيه أنّ: المستقيم (AD) عمودي على كلّ من المستقيمين (DC) و(DH) ، فهو عمودي على مستويهما (DCGH).

إذا كان مستقيم عموديا على مستقيمين متقاطعين من مستو فإنّه عمودي على كلّ مستقيمات هذا المستوي.



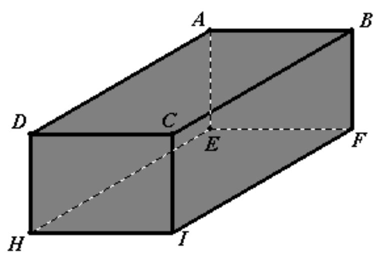
خواص

1. يوجد مستقيم وحيد يشمل نقطة معلومة ويعامد مستوٍ معلوما. 	4. المستويان العموديان على نفس المستقيم متوازيان. 
2. يوجد مستو وحيد يشمل نقطة معلومة ويعامد مستقيما معلوما. 	5. المستقيم العمودي على أحد مستويين متوازيين عمودي على الآخر. 
3. المستويان العموديان على نفس المستقيم متوازيان. 	6. المستوي العمودي على أحد مستقيمين متوازيين عمودي على الآخر. 

✍تعامد المستويات

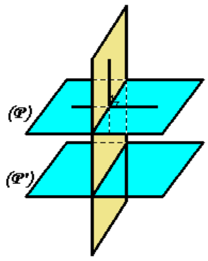
نقول عن مستويين أنّهما متعامدان إذا شمل أحدهما مستقيما عموديا على الآخر

مثال: الشّكل المقابل لمتوازي مستطيلات، على سبيل المثال نلاحظ فيه أنّ: كلاّ من المستويات (ABCD) و(CIFB) و (EHIF) و(ADHE) عمودي على المستوي (DCIH).

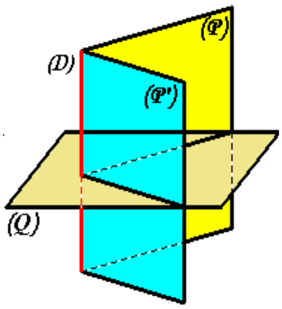


خواص

1. المستوي العمودي على أحد مستويين متوازيين عمودي على الآخر.

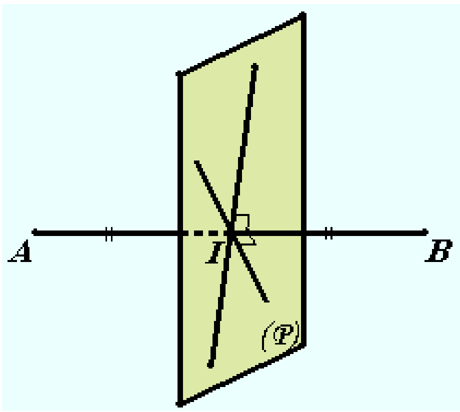


2. إذا كان (𝒫) و(𝒫') مستوين متقاطعين وكان كلّ منهما عموديا على مستو ثالث (Q) فإنّ مستقيم تقاطع المستويين (𝒫) و(𝒫') عمودي على المستوي (Q).



المستوي المحوري لقطعة مستقيم

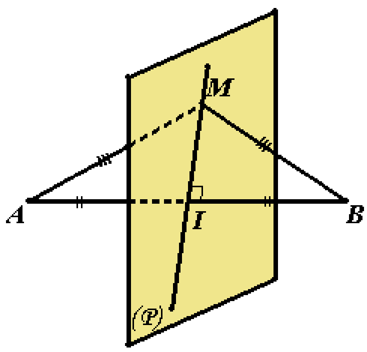
A ، B نقطتان متمايزتان، نسمي **مستويا محوريا** للقطعة [AB] المستوي العمودي على (AB) الذّي يشمل منتصف [AB].



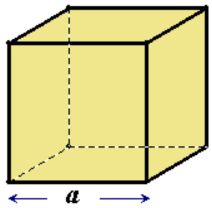
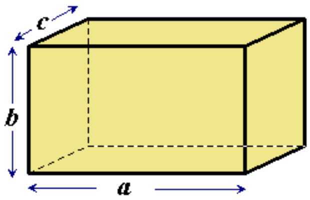
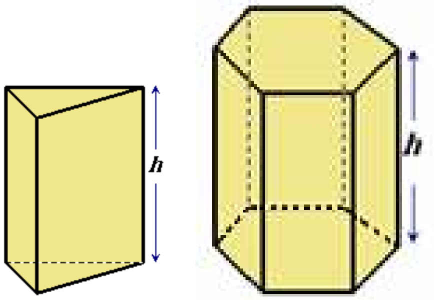
ملاحظتان:

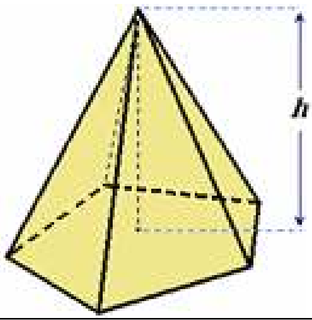
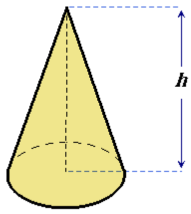
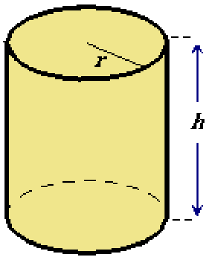
1. إذا كان (𝒫) مستويا محوريا لقطعة المستقيم [AB]، فكلّ مستقيم من المستوي (𝒫) يشمل منتصف [AB] هو محور للقطعة [AB].
2. إذا كان (𝒫) مستويا محوريا لقطعة المستقيم [AB]، فكلّ محور للقطعة [AB] محتوى في المستوي (𝒫).

مجموعة نقط الفضاء المتساوية المسافة عن نقطتين متمايزتين A ، B هي المستوي المحوري لقطعة المستقيم [AB].

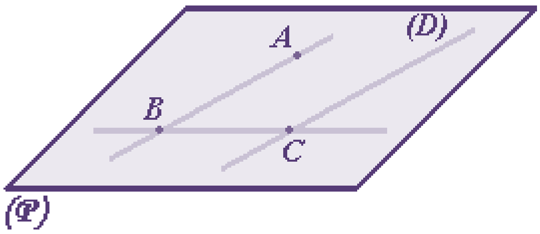


الحجوم

مكعّب	متوازي مستطيلات	موشور قائم
		
$V = a^3$	$V = a \times b \times c$	$V = h \times \mathcal{B}$ حيث $\mathcal{B}$ مساحة القاعدة

هرم	مخروط	اسطوانة دوران
		
$V = \frac{1}{3} h \times \mathcal{B}$ حيث $\mathcal{B}$ مساحة القاعدة	$V = \frac{1}{3} h \times \mathcal{B}$ حيث $\mathcal{B}$ مساحة القاعدة	$V = \pi \times r^2 \times h$

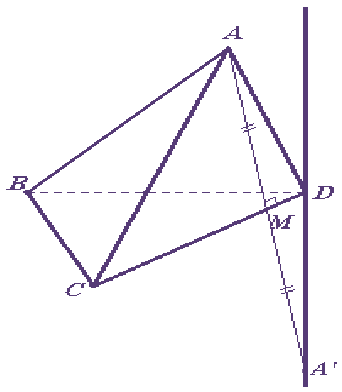
التمرين 1:



بيّن أنّ المستوي يتعيّن

1. إمّا بثلاث نقط ليست عل استقامة واحدة.
2. وإمّا بمستقيم ونقطة لا تنتمي إلى هذا المستقيم.
3. وإمّا بمستقيمين متمايزين متقاطعين أو متوازيين.

التمرين 2:

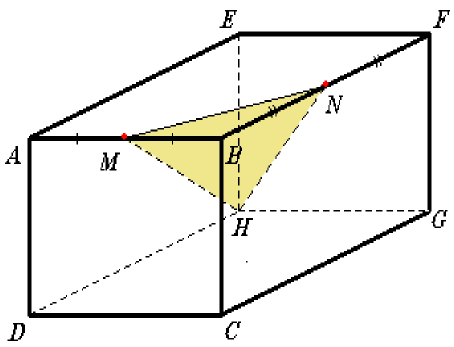


A وB وC وD أربع نقط بحيث النّقطة A لا تنتمي إلى المستوي (BDC). النّقطة 'A هي نظيرة النّقطة A بالنّسبة إلى (CD)، ممثلة في الشّكل المقابل.

1. هل الوجه (ADC) يقع في مستوي الواجهة ؟ برّر جوابك.
2. بيّن أنّ المستقيمين(AC) و (BD) غير متقاطعين.
3. بيّن أنّ المستقيم (A'D) محتوى في المستوى (ACD).

التمرين 3:

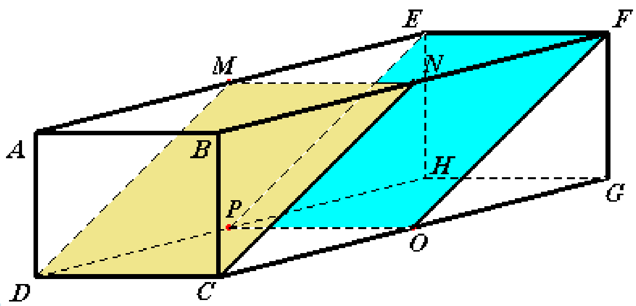
الشّكل المقابل هو لمتوازي مستطيلات ABCDEFGH ، النقطتان M و N منتصفا القطعتين [AB] و [BF] على التّرتيب .



1. حدّد الوضع النّسبي للمستقيم والمستوي في كلّ حالة وبرّر جوابك:
أ) (EN) و (ABC) ب) (MN) و (HDC) ج) (MN) و (AEF)
2. حدّد الوضع النّسبي للمستقيمين في كلّ حالة وبرّر جوابك:
أ) (EF) و (MN) ب) (AE) و (FB) ج) (EB) و (DC)
3. حدّد الوضع النّسبي للمستويين في كلّ حالة وبرّر جوابك:
أ) (ABC) و (EFH) ب) (ADC) و (ADE) ج) (ABF) و (HMN)

التمرين 4:

الشّكل المقابل هو لمتوازي مستطيلات ABCDEFGH ، النقط M و N و O و P منتصفات القطع [AE] و [BF] و [CG] و [DH] على التّرتيب.

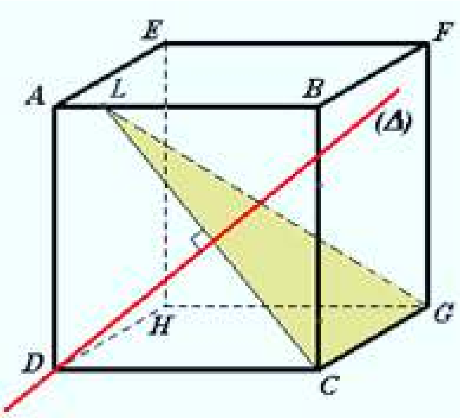


1) بين أنّ المستقيم (MN) يوازي المستوي (DCGH).
2) بين أنّ النقط M و N و C و D هي من نفس المستوي.
3) بين أنّ المستويين (MNC) و (EFO) متوازيان.

التمرين 5:

بيّن أنّه يوجد في الفضاء مستقيم وحيد يشمل نقطة معلومة ويوازي مستقيما معلوما.

التمرين 6:



ABCDEFGH مكعّب، L نقطة من [AB]، و (⍰) مستقيم عمودي على (LC) ويشمل D.

1. بيّن أنّ (⍰) عمودي على المستوي (LCG).
2. عيّن المستقيم (⍰) و المستوي (LCG) في كلّ من الحالتين:

أ) L تنطبق على A

ب) L تنطبق على B

التمرين 7:

ABDC رباعي وجوه حيث (AB) عمودي على (CD). (AH) الارتفاع المتعلّق بالقاعدة BCD.

بيّن أنّ (CD) و (BH) متعامدان.

التمرين 8:

بيّن أنّه:إذا كان (P) و(P') مستويان متقاطعين، وكان كلّ منهما عموديا على مستو ثالث (Q) ، فإنّ (D) مستقيم تقاطع المستويين (P) و(P') عمودي على المستوي (Q).

التمرين 9:

ABCDEFGH مكعّب طول حرفه 5cm. النقط L و M و N و O و L' و M' و N' و O' منتصفات أحرفه [AB] و [BF] و [FE] و [EA] و [DC] و [CG] و [GH] و [HD] على التّرتيب.

1. عيّن تقاطع المستوي (LNM') مع كلّ وجه من أوجه المكعّب.

2. النّقطتان I و J منتصفا القطعتين [FG] و [BC] على التّرتيب. بين أنّ المستويين (DJIH) و(LNM') متعامدان، وعيّن تقاطعهما.

3. بيّن أنّ المستقيمات (AG) و (EC) و (FD) و (BH) و (LN') و (MO') و (NL') و (OM') متقاطعة في نقطة واحدة.

حلول التمارين

حل التمرين :1

نعتبر ثلاث نقط ليست في استقامية A و B و C.

1. إنّها تعيّن مستويا وحيدا حسب البديهية رقم (2) نسميّه $\mathcal{P}$.
2. النقطتان A و B تعيّنان مستقيما وحيدا حسب البديهية رقم (1) نسميّه (AB) وهو محتوى في المستوي $(\mathcal{P})$ حسب البديهية (3)، والنّقطة C لا تنتمي إلى (AB). المستوي $(\mathcal{P})$ يعيّن بالمستقيم (AB) والنّقطة C.
3. المستقيمان (AB) و (BC) متقاطعان ومحتويان في المستوي $(\mathcal{P})$، المستوي $(\mathcal{P})$ يعيّن بالمستقيمين (AB) و (BC). يوجد في المستوي $(\mathcal{P})$ مستقيم وحيد (D) يشمل النّقطة C ويوازي المستقيم (AB).

المستوي $(\mathcal{P})$ يعيّن بالمستقيمين (AB) و (D).

- يوجد مستو وحيد يشمل ثلاث نقط A و B و C ليست في استقامية.
- يوجد مستقيم وحيد يشمل نقطتين متمايزتين A و B .
- إذا اشترك مستقيم ومستو في نقطتين فإنّ المستقيم محتوى في المستوي.

حل التمرين :2

1. الوجه (ADC) لا يقع في مستوي الواجهة ، لأنّ الزّاوية AMD في الحقيقة قائمة وهي ممثلة بزاوية غير قائمة.
2. لو كان المستقيمان(AC) و (BD) متقاطعين، فهما يعيّنان مستويا (حسب النتيجة أعلاه) يشمل النقط الأربع A وB وC وD، وهذا يناقض الفرض، ومنه المستقيمان(AC) و (BD) غير متقاطعين.

المستوي (ACD) يحتوي على النّقطة D، يكفي إذا إثبات أنّ النّقطة 'A تنتمي إلى المستوي (ACD):

المستقيمان ('AA) و (CD) متقاطعان فهما يعيّنان مستويا وحيدا هو المستوي (ACD)،

لأنّ المستوي (ACD) يشمل (CD)، ومنه النّقطة 'A تنتمي إلى المستوي (ACD).

أي أنّ المستوي (ACD) يشمل المستقيم (A'D).

- في التّمثيل بالمنظور المتساوي القياس على مستوى الواجهة كلّ الخواص والمقادير محفوظة.

حل التمرين :3

1. أ) المستقيم (EN) والمستوي (ABC) متقاطعان، لأنّ المستقيمين (EN) و (AB) من نفس المستوي وغير متوازيين فهما متقاطعان، ونقطة تقاطعهما تنتمي إلى المستوي (ABC) لأنها تنتمي إلى المستقيم (AB)، لكنّ المستوي (ABC) لا يشمل المستقيم (EN) لأنّه لا يشمل النقطتين E و N. ومنه المستوي (ABC) يشترك مع (EN) في نقطة ولا يشمله، فهما متقاطعان.

   ب) المستقيم (MN) والمستوي (HDC) متوازيان، لأنّ المستقيم (MN) محتوى في المستوي (AEB) الوجه المقابل للوجه (HDC) في متوازي المستطيلات، وبالتّالي لا توجد أيّة نقطة مشتركة بين المستقيم (MN) والمستوي (HDC).

   ج) المستقيم (MN) محتوى في المستوي (AEF)، لأنّ النقطتين M و N تنتميان إلى المستوي (AEF).

2. أ) المستقيمان (EF) و (MN) من نفس المستوي وغير متوازيين فهما متقاطعان.

   ب) المستقيمان (AE) و (FB) متوازيان، لأنهما حاملا ضلعين متقابلين في متوازي مستطيلات.

   ج) المستقيمان (EB) و (DC) ليسا من نفس المستوي، لأنّ المستقيم (DC) لا يشمل النّقطة B فهو يعيّن معها مستويا (BCD) يقطعه المستقيم (EB) في النّقطة B لأنّ النّقطة E لا تنتمي إلى المستوي (BCD).

3. أ) المستويان (ABC) و (EFH) متوازيان، لأنهما وجهان متقابلان لمتوازي مستطيلات (لا توجد بينهما أيّة نقطة مشتركة).

   ب) المستويان (ADC) و (ADE) متقاطعان، لأنّهما يشتركان في النقطتين A و D وهما غير منطبقين

- المستقيمان غير المتوازيين على الرّسم غير متوازيين في الحقيقة.
- المستقيمان غير المتعامدين على الرّسم ليس بالضرورة غير متعامدين في الحقيقة.
- البحث عن النقط المشتركة بين المستقيمات والمستويات وسيلة مساعدة لمعرفة الوضع النّسبي لها.

(توجد نقطة تنتمي إلى أحدهما ولا تنتمي إلى الآخر).

يتقاطع المستويان (ADC) و (ADE) في المستقيم (AD).

ج) المستويان (ABF) و (HMN) متقاطعان، لأنّهما يشتركان في النقطتين N و M وهما غير منطبقين (توجد نقطة تنتمي إلى أحدهما ولا تنتمي إلى الآخر).
يتقاطع المستويان (ABF) و (HMN) في المستقيم (MN).

حل التمرين 4:

1. المستقيم (MN) محتوى في الوجه (ABEF) الموازي للوجه (DCGH)، ومنه لا يوجد أيّة نقطة مشتركة بين (MN) والمستوي (DCGH)، فهما متوازيان.
2. لدينا: (AB) // (MN) لأنّ ABNM مستطيل، و (DC) // (AB) لأنّ ABCD مستطيل، ومنه (DC) // (MN).
   وبالتّالي النقط M و N و C و D تنتمي إلى نفس المستوي (MNDC).
3. - المستقيمان (MN) و (NC) متقاطعان وهما من المستوي (MNC).
   - و(EF) // (MN) لأنّ MNFE مستطيل، ومنه (MN) يوازي المستوي (EFO).
   - و(OF) // (NC) لأنّ NCOF متوازي أضلاع، ومنه (NC) يوازي المستوي (EFO).

- يكون مستقيم يوازي مستو إذا لم يشترك معه في أيّة نقطة، أو كان هذا المستقيم يوازي مستقيما من المستوي.
- كلّ وجهين متقابلين في متوازي المستطيلات يمثلان مستويين متوازيين.

بما أنّ المستقيمين (MN) و (NC) متقاطعان وكل منهما يوازي المستوي (EFO)،

فإنّ المستويين (MNC) و (EFO) متوازيان.

طريقة: لاثبات أنّ أربع نقط مثل M و N و C و D هي من نفس المستوي يكفي إثبات أنّها تنتمي إلى مستقيمين متوازيين.
لإثبات أنّ مستويين متوازيان نثبت أنّ أحدهما يحتوي على مستقيمين متقاطعين كلّ منهما يوازي المستوي الآخر.

حل التمرين 5:

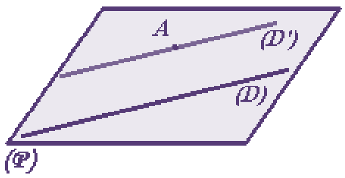
نميّز حالتين:

أ) إذا كانت النّقطة A تنتمي إلى المستقيم (D). فإنّ المستقيم الوحيد الذي يشمل A

ويوازي (D) هو المستقيم (D) نفسه.

ب) إذا كانت النّقطة A لا تنتمي إلى المستقيم (D)، فإنّ(D) و A يعيّنان مستويا وحيدا (𝒫)،

في المستوي (𝒫) يوجد مستقيم وحيد (D') يشمل A ويوازي (D) .



حل التمرين 6:

لنبيّن أنّ المستقيم (Δ) عمودي على المستوي (LCG).

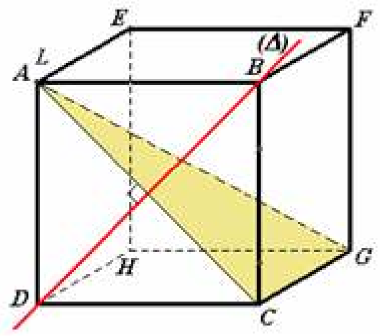
المستقيمان المتعامدان في الفضاء ليس بالضرورة متقاطعين.

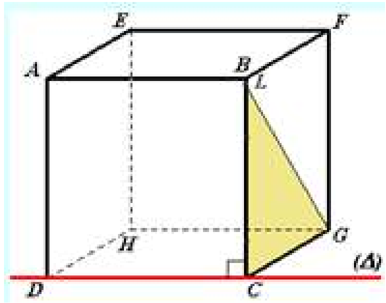
1. بما أنّ (Δ) عمودي على (LC)، لتبيين أنّ(Δ) عمودي على المستوي (LCG) يكفي أنّ نبيّن أنّ (Δ) عمودي على مستقيم من المستوي (LCG) يقطع (LC) .

لدينا المستقيم (CG) عمودي على كلّ من المستقيمين (DC) و (BC) ، ومنه فهو عمودي

على مستويهما (ABCD)، وبالتّالي فهو عمودي على كلّ مستقيم من المستوي (ABCD)، أي (CG) عمودي على (Δ).

بما أنّ (Δ) عمودي على كلّ من(LC) و(CG) فهو عمودي على مستويهما (LCG)





.2

أ) لما تنطبق النّقطة L على النّقطة A فإنّ

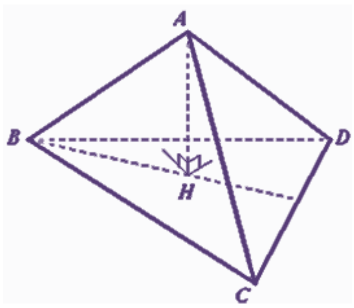
(LCG)=(ACGE) و (Δ) = (DB)

ب) لما تنطبق النّقطة L على النّقطة B فإنّ

(LCG)=(BCGF) و (Δ) = (DC)

لتبيين أنّ مستقيما عمودي على مستو نبيّن أنّه عمودي على مستقيمين متقاطعين في هذا المستوي.

حل التمرين 7:



لنبيّن أنّ المستقيم (CD) عمودي على المستوي (ABH).

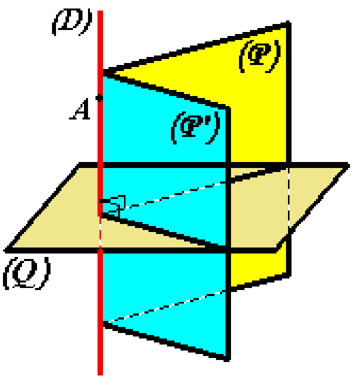
لدنيا (AH) عمودي على المستوي (BCD)، فهو عمودي على كلّ مستقيم فيه، ومنه (AH) عمودي على (CD)، و (AB) عمودي على (CD) فرضا.

ومنه (CD) عمودي على مستقيمين متقاطعين (AH) و (AB) فهو عمودي على مستويهما (ABH). وبالتالي (CD) عمودي على (BH).

المستقيمان المتعامدان من نفس المستوي متقاطعان.

طريقة: لتبيين أنّ مستقيمين متعامدان يمكن أنّ نبيّن أنّ أحدهما عمودي على مستو يحتوي على الثّاني.

حل التمرين 8:



لتكن A نقطة مشتركة بين المستويين $(\mathcal{P})$ و$(\mathcal{P}')$. المستقيم (D) الذي يشمل النّقطة A ويعامد المستوي (Q) محتوى في المستوي $(\mathcal{P})$ من ناحية، ومحتوى في المستوي $(\mathcal{P}')$ من ناحية أخرى،

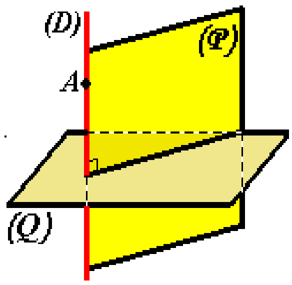
و هو مستقيم تقاطع المستويين $(\mathcal{P})$ و$(\mathcal{P}')$.

ومنه فإنّ (D) عمودي على (Q).

- المستويان المشتركان في نقطة هما إما منطبقان، وإما متقاطعان في مستقيم شما ، هذه النّقطة

- **طريقة:** يمكن الانطلاق من مستقيم معيّن عمودي على المستوي (Q)، وإثبات أنه هو تقاطع المستويين $(\mathcal{P})$ و $(\mathcal{P}')$.

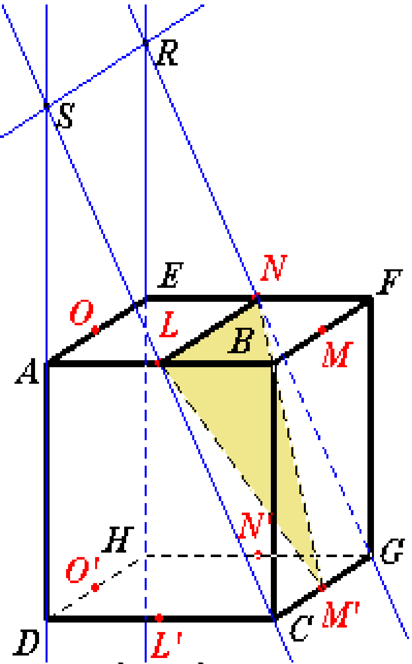
- بما أنّ المستوي $(\mathcal{P})$ والمستقيم (D) عموديان على (Q)، و(D) يشمل نقطة
- من $(\mathcal{P})$، فإنّ (D) محتوى في $(\mathcal{P})$.



1. تقاطع المستوي (LNM') مع كلّ وجه من أوجه المكعّب:

المستويان (LNM') و (ABFE) يشتركان في النّقطتين L و N وغير منطبقين فهما متقاطعان في المستقيم (LN).

أ. لدينا (LN)//(CG) لأنّ (LN)//(BF) (LNFB مستطيل) و(BF)//(CG) (BFGC مربّع)،
ومنه النقطتان C و G تنتميان إلى المستوي (LNM').



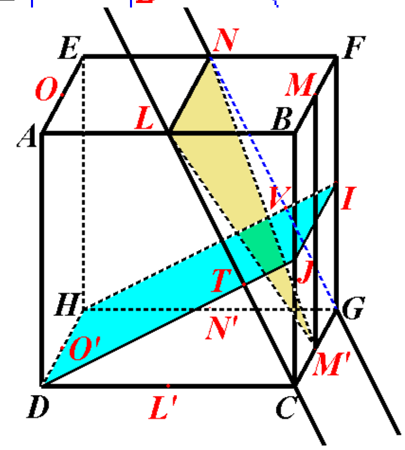
- المستويان (LNM') و(DCGH) يشتركان في النّقطتين C وG وغير منطبقين فهما متقاطعان في المستقيم (CG).
- المستويان (LNM') و (BCGF) يشتركان في النّقطتين C و G وغير منطبقين فهما متقاطعان في المستقيم (CG).
- المستويان (LNM') و (ABCD) يشتركان في النّقطتين L و C وغير منطبقين فهما متقاطعان في المستقيم (LC).
- المستويان (LNM') و (EFGH) يشتركان في النّقطتين N و G وغير منطبقين فهما متقاطعان في المستقيم (NG).

ب. المستقيمان (AD) و (LC) من المستوي (ABCD) وغير متوازيين،
لتكن S نقطة تقاطعهما. المستقيمان (NG) و (EH) من المستوي (EFGH) وغير متوازيين
، لتكن R نقطة تقاطعهما.
النقطتان S و R تنتميان إلى كلّ من المستويين (LNM') و (ADHE) غير المنطبقين،

ومنه فالمستويان (LNM') و (ADHE) متقاطعان في المستقيم (SR).

2. لإثبات أنّ المستويين (LNM') و (DJIH) متعامدان يكفي إثبات أنّ
المستقيم (DJ) عمودي على المستوي (LNM') ومن أجل ذلك سنبيّن أنّ (DJ) عمودي
على كلّ من (LC) و (CG) من المستوي (LNM'):

- نسمّي T نقطة تقاطع (DJ) و(LC).
من LB=JC و BC=CD نستنتج أنّ المثلثين LBC و JCD متقايسان ومنه BLC=CJD و BCL=CDJ.

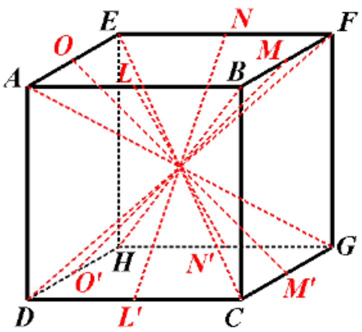


وبما أنّ BLC+BCL=90° فإنّ CJD+BCL=90° ومنه المثلّث CTJ قائم في T ، أي أنّ (DJ) عمودي على (LC).

- المستقيم (CG) عمودي على كلّ من (CB) و (CD) فهو عمودي على مستويهما (ABCD)، وبالتالي فهو
عمودي على كلّ مستقيم في هذا المستوي، ومنه (CG) عمودي على (DJ).
ومنه (DJ) عمودي على كلّ من (LC) و (CG) فهو عمودي على المستوي (LNM')

ومنه المستويان (LNM') و (DJIH) متعامدان.

- تقاطع المستويين (LNM') و (DJIH): النّقطة T تقاطع (DJ) و(LC) تنتمي إلى كلّ
من المستويين (LNM') و (DJIH)، وكذلك النّقطة V تقاطع (HI) و(NG)،
ومنه المستويان (LNM') و(DJIH) متقاطعان في المستقيم (TV).



3. الرّباعي ADGF مستطيل لأنّ (AD)//(FG) و AD=FG و(AD)،(DG) متعامدان. ومنه قطراه [AG] و [FD] متناصفان ...(1)
وكذلك الرّباعي AEGC مستطيل لأنّ (AE)//(CG) وAE=CG و(AE)،(EG) متعامدان. ومنه قطراه [AG] و[EC] متناصفان ...(2)

وبنفس الطريقة نبيّن أنّ [EC] و [HB] لهما نفس المنتصف ...(3)

من (1) و(2) و(3) نجد أنّ [AG] و[FD] و [EG] و[HB] لها نفس المنتصف... (4)

الرّباعي AOGM' متوازي أضلاع، لأنّ (AO)//(GM') و AO=GM' ومنه قطراه [AG] و [OM'] متناصفان ...(5)

وبنفس الطريقة نبيّن أنّ [AG] و [LN'] لهما نفس المنتصف و [HB] و [MO'] لهما نفس المنتصف و[FD] و [NL'] لهما نفس المنتصف و...(6)

من (4) و (5) و (6) نجد أنّ [AG] و [FD] و [EG] و [HB] و [LN'] و [MO'] و [NL'] و [OM'] لها نفس المنتصف وهو مركز المكعّب ... (4)

تمارين مقترحة

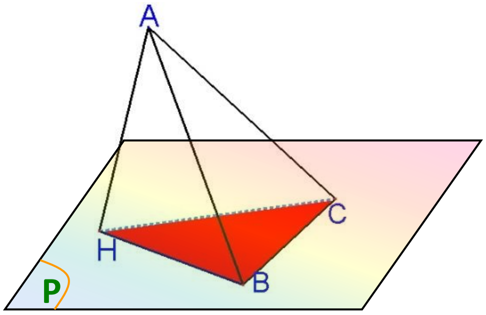
التمرين 1:

أجب بصحيح أم خطئ ؟

ليكن P مستويا و (D) مستقيما عموديا على P في النقطة H.

لتكن A نقطة من (D) تختلف عن H و لتكن B و C نقطتين من المستوي

بحيث H ، B ، C ، ليست على استقامة واحد



1. (D) ليس عموديا على (BC)
2. إذا كان (BC) عموديا على (HB) فإن (BC) عمودي على (AB) .
3. إذا كان (Δ) مستقيما من المستوي P لا يشمل النقط H ، B ، C فإن

(D) لا يكون عموديا على (Δ).

التمرين 2:

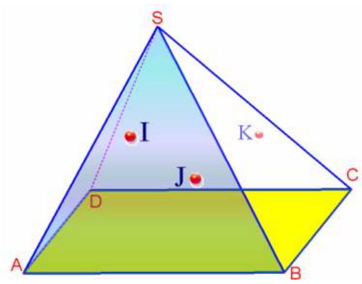
ليكن $(ABCD)$ متوازي الأضلاع و S نقطة لا تنتمي إلى المستوي $(ABCD)$

لتكن I و J نقطتان

متمايزتان من المستوي

(SAB)، و K نقطة من

المستوي (SDC)



عيّن تقاطع المستوي (IJK) مع كل من المستويات (SBC)، (SAB)، (SAD)، (SDC) و $(ABCD)$ على

التمرين 3:

ليكن (P) مستويا و (D) مستقيما من (P) .

لتكن A نقطة من (P) لا تنتمي إلى (D) و B نقطة لا تنتمي إلى المستوي (P) .

برهن أن المستقيمين (D) و (AB) ليس من نفس المستوي.

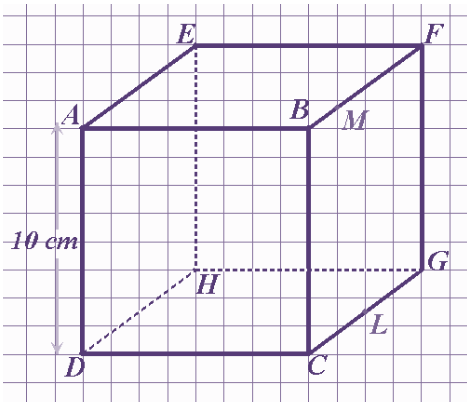
التمرين 4:

ليكن (D) و (D') مستقيمين متقاطعين لتكن A و A' نقطتين متمايزتين من (D)

B و B' نقطتين متمايزتين من (D')

برهن أن المستقيمين (AA') و (BB') هما إما متقاطعين و إما متوازيان.

التمرين 5:

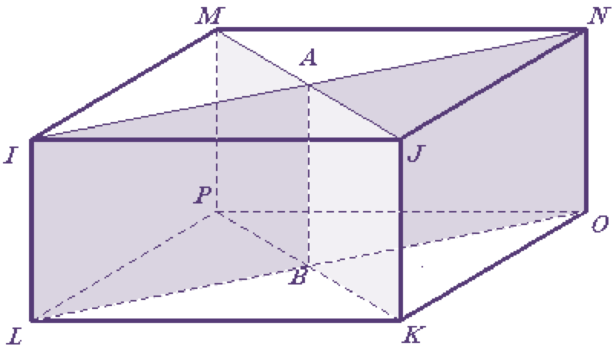


الشّكل المقابل هو لمكعّب طول حرفه 10cm مرسوم بالمنظور المتساوي القياس،

النّقطتان M وL هما تقاطع [BF] و [CG] مع مستقيمات رصف الورقة.

1. ما هو وضع المستقيم (AB) والمستوي (BCGF) ؟
2. ما هو وضع المستقيم (EB) والمستوي (AFGD) ؟
3. ما هو وضع المستقيم (EH) والمستوي (AFGD) ؟
4. ما هو تقاطع المستقيم (HB) والمستوي (AFGD) ؟

التمرين 6:



الشّكل LKOPIJNM هو تمثيل لمتوازي مستطيلات بالمنظور متساوي القياس. لاحظ وأجب عن الأسئلة الآتية:

1. اذكر مستويين متوازيين ؟
2. اذكر مستويين متعامدين ؟
3. ما هو الوضع النسبي للمستويين (NOLI) و (MJKP) ؟

الاحصاء

ملخص الدرس

مفردات الإحصاء

عندما نهتم بدراسة ظاهرة ما، مثلا عدد الإخوة والأخوات لتلاميذ المستوى النهائي في ثانوية ما، نقول أننا نجري دراسة إحصائيّة على مجتمع إحصائي هو تلاميذ المستوى النهائي لهذه الثانوية ويكون عدد الإخوة والأخوات في هذه الحالة هو الميزة الإحصائيّة التّي تسمى أيضا الطّبع الإحصائي.

نسمي عيّنة كلّ جزء من المجتمع الإحصائي، مثلا كلّ قسم نهائي في هذه الثانوية هو عيّنة.

عندما تأخذ الميزة الإحصائيّة قيما عددية نسميها ميزة كمية أو متغيرا احصائيا .

عندما يأخذ المتغير الإحصائي قيمه معزولة كما هو الحال في عدد اللاإخوة 0،1،2، ... إلخ نقول إنّ هذا المتغير الإحصائي متقطع.

إذا كنا نهتم بدراسة قامة كلّ تلميذ من هذا المجتمع الإحصائي يكون عندها المتغير الإحصائي مستمرا ويمكن حصر القامات ضمن مجالات تدعى فئات، مثلا $[165,170[$ ، $[160,165[$

وبصفة عامة نسمي مركز الفئة $[a,b[$ العدد $\frac{a+b}{2}$ و طولها العدد الموجب $b-a$.

نهتم في بعض الأحيان بدراسة ظاهرة نوعية، كلون العينين أو لون الشّعر، لا يمكن التّعبير عليها بعدد فنقول في هذه الحالة أنّ الطّبع الإحصائي هو طبع إحصائي نوعي .

التّوزيعات التّكرارية

- تكرار قيمة للطّبع الإحصائي هو عدد الأفراد الموافقة لهذه القيمة.
- تواتر قيمة للطبع الإحصائي هو حاصل قسمة تكرارها على عدد أفراد المجتمع (أي التّكرار الكلي).
- نسمي سلسلة إحصائية مجموعة القيم التّي جُمعت .

غالبا ما نمثل سلسلة إحصائية بجدول يشمل كل قيمة و تكرارها .

مثال: السّلسلة الإحصائيّة الآتية تمثل علامات 30 تلميذا .

10	15	12	17	8	7	15	8	10	10	13	17	10	7	17
12	13	7	13	15	8	10	8	13	15	10	13	10	13	15

وهي سلسلة إحصائيّة طبعها كمي متقطع. تكرارها الكلّي هو 30.

يمكن تلخيصها في الجدول التالي:

العلامات(قيم الطبع الإحصائي)	7	8	10	12	13	15	17
التّكرارات	3	4	7	2	6	5	3
التّواترات	$\frac{3}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{5}{30}$	$\frac{3}{30}$

التّوزيعات التّكرارية المجمّعة

نفرض أن قيم الميزة مرتبة ترتيبا تصاعديا.

- التّكرار المجمّع الصّاعد لقيمة (أو لفئة) هو مجموع تكرار هذه القيمة (أوالفئة) وتكرارات القيم (أو الفئات) الأصغر منها.
- التّكرار المجمّع النّازل لقيمة (أو لفئة) هو مجموع تكرار هذه القيمة وتكرارات القيم (أو الفئات) الأكبر منها.
- التّواتر المجمّع الصّاعد لقيمة (أو لفئة) هو مجموع تواتر هذه القيمة (أوالفئة) و تواترات القيم (أو الفئات) الأصغر منها.
- التّواتر المجمّع النّازل لقيمة (أو لفئة) هو مجموع توتر هذه القيمة (أوالفئة) وتوترات القيم (أو الفئات) الأكبر منها.

مثال: لدينا سلسلة إحصائيّة تتعلق بأطوال وديان بالكيلومتر

الأطوال	$[80,100[$	$[100,120[$	$[120,140[$	$[140,160[$
التّكرار	12	10	12	6
التّكرار المجمّع الصّاعد	12	22	34	40
التّكرار المجمّع النّازل	40	28	18	6
التّواتر	$\frac{12}{40}$	$\frac{10}{40}$	$\frac{12}{40}$	$\frac{6}{40}$
التّواتر المجمّع الصّاعد	$\frac{12}{40}$	$\frac{22}{40}$	$\frac{34}{40}$	1
التّواتر المجمّع النّازل	1	$\frac{28}{40}$	$\frac{18}{40}$	$\frac{6}{40}$

مؤشّرات سلسلة إحصائيّة

أ-المنوال – الفئة المنوالية

- نسمي منوالا لسلسلة ذات متغير إحصائي متقطع،كل قيمة موافقة لأكبر تكراروزنرمزله *Mod* .
- نسمي فئة منوالية لسلسلة ذات متغير إحصائي مستمر، كل فئة موافقة لأكبر تكرار.

مثال : السّلسلة الآتية لها منوالان : 10و12.

القيم (علامات التّلاميذ)	7	10	12	13	15
التّكرار (عدد التّلاميذ)	5	8	8	7	2

ب-الوسيط

لتكن سلسلة إحصائية ذات متغير متقطع قيمه مرتّبة ترتيبا تصاعديا أو تنازليا، وتكرارها الكلي N.

نسمي الوسيط لهذه السلسلة العدد الذي نرمز له بالرمز *Med*، والمعرف *كالآتي:*

- إذا كان N فرديا أي *N=2p+1* : *Med* يكون القيمة التّي رتبتها *p+1* .
- إذا كان N زوجيا أي *N=2p* : *Med* يكون نصف مجموع القيمتين اللتين رتبتاهما *p* و*p+1*

مثال 1: للسلسلتين *3,3,7,8,9* و *4,5,6,8,18,20* نفس الوسيط: *Med =7* .

مثال 2: في هذه السلسلة الاحصائية لدينا التكرار الكلي يساوي 30(أي: $N=30=2\times15$)عدد زوجي

$$Med=\frac{12+12}{2}=12$$

القيم (علامات التّلاميذ)	7	10	12	13	15
التّكرار(عدد التّلاميذ)	5	8	8	7	2

خاصية:

الوسيط يجزئ سلسلة إحصائية مرتبة ترتيبا تصاعديا أو ترتيبا تنازليا إلى جزئين لهما نفس التّكرار.

الوسط الحسابي

الوسط الحسابي: للقيم $x_1,x_2,x_3....,x_k$ التّي تكراراتها هي، على التّرتيب، $n_1,n_2,n_3,....,n_k$ هو العدد $\bar{x}$

حيث $$\bar{x}=\frac{n_1x_1+n_2x_2+n_3x_3+.........+n_kx_k}{n_1+n_2+n_3+.........+n_k}$$

مثال: الوسط الحسابي للسلسلة *4,5,6,8,18,19* هو 10 .

ملاحظة : الوسط الحسابي يتأثر بالقيم الشاذة ، مثلا الوسط الحسابي للسلسلة 10،12،14،15 هو ***12,75*** الوسط الحسابي للسلسلة 1 ، 10، 12 ، 14 هو ***9,25***.

خواص الوسط الحسابي

خاصية 1 :

لتكن سلسلة إحصائية تأخذ القيم $x_1,x_2,x_3,....,x_k$ بالتّوترات $f_1,f_2,f_3,....,f_k$ ، على التّرتيب.

الوسط الحسابي لهذه السلسلة هو العدد $\bar{x}$ حيث : $\bar{x}=f_1x_1+f_2x_2+f_3x_3+....+f_kx_k$.

مثال: *50%*من تلاميذ قسم تحصلوا على العلامة 12 و 30 % تحصلوا على العلامة 10 و 2 % تحصلوا على العلامة 13 . ما هو معدّل هذا القسم ؟

لدينا

القيم (العلامات)	10	12	13
التّواترات	0,3	0,5	0,2

الوسط الحسابي (معدّل القسم) هو :

$$\bar{x}=0{,}3\times10+0{,}5\times12+0{,}2\times13=11{,}6$$

خاصية 2 :

*عندما نضيف نفس العدد a لكل قيمة من قيم الطّبع الإحصائي: يزداد الوسط الحسابي بالمقدار a أي: $\overline{x+a} = \overline{x} + a$

*عندما نضرب في نفس العدد a كل قيمة من قيم الطّبع الإحصائي : الوسط الحسابي يضرب في العدد a أي: $\overline{a \times x} = a \times \overline{x}$

مثال: معدّل علامات تلاميذ قسم هو 9. عندما نضيف نقطتين لكل علامة، يصبح معدّل هذا القسم 11 وعندما نضرب كلّ علامة في 2 يصير المعدّل 18.

حول الرّمز $\sum$

- المجموع $a_1 + a_2 + ... + a_k$ يكتب $\sum_{i=1}^{i=k} a_i$ ونقرأ : " مجموع الأعداد a_i من $i=1$ إلى $i=k$ ".
- يمكن كتابة الوسط الحسابي $\overline{x}$ على الشكل $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{i=k} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{i=k} n_i}$. نعلم أن $f = \frac{n}{N}$، حيث التكرار n و N التكرار الكلي .

المدى

مدى سلسلة إحصائية هو الفرق بين أكبر قيمة للمتغير الإحصائي وأصغر قيمة له.

مثال : علامات عمر هي : 5 ،11 ،17 و علامات أحمد هي : 9،10،14.

مدى علامات عمر : 5-17 أي 12 ؛ مدى علامات أحمد : 9-14 أي 5

للتلميذين نفس المعدّل، ولكن علامات عمر أكثر " تشتت" بالنّسبة إلى علامات أحمد.

ملاحظة: يُسمّى كلّ من المنوال والوسيط والوسط الحسابي **مؤشّرات الموقع**، بينما يُسمّى المدى **مؤشّر التّشتت**.

التّمثيلات البيانية

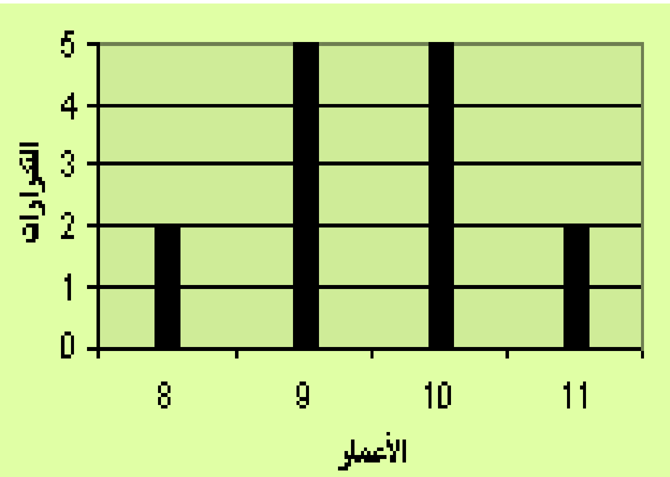
لتّمثيلات البيانية التّي نستعملها عادة هي: المخطّط بالأعمدة، المدرج التّكراري، المخطّط الدائري، مضلّع التّكرارات، مضلّع التّواترات.

المخطّط بالأعمدة

مثال1: يعبّر الجدول الآتي عن توزيع أعمار 12 طفلا:

الأعمار بالسّنوات	8	9	10	11
التّكرار	2	5	3	2

المخطّط بالأعمدة المتعلق بهذه السّلسلة الإحصائيّة هو:

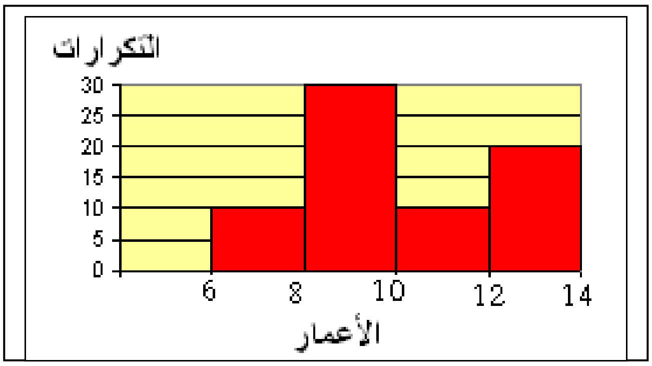


المدرج التّكراري

مثال 2: أعمار 70 طفل موزعة كالآتي:

الأعمار بالسّنوات	$[6;8[$	$[8;10[$	$[10;12[$	$[12;14[$
التّكرار	10	30	10	20

المدرج التّكراري المتعلق بهذه السّلسلة الإحصائيّة هو:

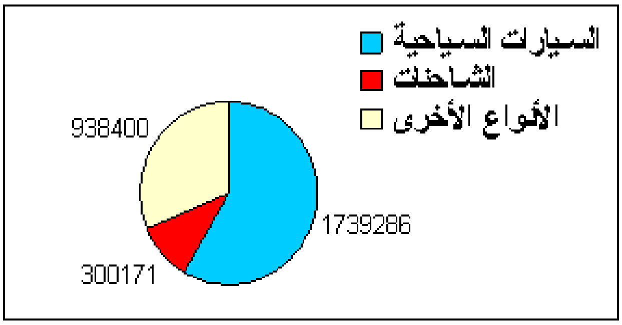


مخطّط دائري:

مثال : الجدول الآتي يبين عدد السّيارات المسجلة في الجزائر (إلى 31/12/2002). مثل هذه السّلسلة بمخطّط دائري.

السّيارات السّياحية	الشاحنات	الأنواع الأخرى
1739286	300171	938400

- التّكرار الكلّي هو: $N = 1739286 + 300171 + 938400 = 2977857$
- قيس الزّاوية الموفق للسّيارات السّياحية: $360 \times \frac{1739286}{2977857} \approx 210°$
- قيس الزّاوية الموافق للشاحنات : $360 \times \frac{300171}{2977857} \approx 36°$
- قيس الزّاوية الموافق للأنواع الأخرى : $360 \times \frac{938400}{2977857} \approx 114°$



طريقة

N هو التّكرار الكلّي، و n_i تكرار فئة (أو قيمة)، نمثل هذه الفئة (أو القيمة) بالقطاع الزّاوي الذي قيس زاويته α حيث $\alpha = 360 \times \frac{n_i}{N}$ أي $\alpha = 360 \times f_i$

التباين-الانحراف المعياري

التباين

تباين سلسلة معرفة بكل قيمها x_i، والذي نرمز إليه بالرمز V، هو وسط مربعات الفروق بين هذه القيم ووسط السلسلة $\bar{x}$، أي :

$V = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N}$ حيث N هو التكرار الكلي للسلسلة.

إذا كانت السلسلة معرفة بقيمها x_i و تكراراتها n_i، فإنّ التباين هو: $V = \dfrac{\sum n_i \times (x_i - \overline{x})^2}{\sum n_i}$.

مثال: تحصل تلميذ على العلامات التالية في فروض الرياضيات: 15 ، 12 ، 12 ، 14 ، 9 ، 4.

فكان وسط السلسلة هو 11، و التباين هو:

$$V = \frac{(15-11)^2 + (12-11)^2 + (12-11)^2 + (14-11)^2 + (9-11)^2 + (4-11)^2}{6} \approx 13{,}33$$

نظرية 1: إذا كانت السلسلة معرفة بقيمها x_i وتكراراتها n_i، فإنّ التباين هو: $V = \dfrac{\sum n_i \times x_i^2}{\sum n_i} - \overline{x}^2$.

ملاحظة: هذا الدستور عملي أكثر، لأنه لا يتطلب حساب $(x_i - \overline{x})^2$ بل نحسب فقط x_i^2.

نظرية 2: إذا كانت السلسلة معرفة بقيمها x_i و تواتراتها f_i، فإنّ التباين هو: $V = \sum f_i (x_i - \overline{x})^2$.

الانحراف المعياري

الانحراف المعياري، والذي نرمز إليه بالرمز σ، هو الجذر التربيعي للتباين: $\sigma = \sqrt{V}$ أي $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum n_i (x_i - \overline{x})^2}{\sum n_i}}$.

مثال: الانحراف المعياري للسلسلة السابقة هو: $\sigma \approx \sqrt{13{,}33} \approx 3{,}65$.

ملاحظات:

- الانحراف المعياري هو معيار تشتت قيم سلسلة حول وسطها.
- يقاس الانحراف المعياري بنفس وحدة قيم السلسلة.
- يتأثر الانحراف المعياري بالقيم الشاذة للسلسلة.

مجموع مربعات الفروق

نظرية الوسط $\overline{x}$ هو العدد الذي يجعل المجموع $S(x) = \sum (x_i - x)^2$ أصغريا.

برهان نبرهن في حالة سلسلة ذات أربع قيم x_1، x_2، x_3، x_4 وسطها $\overline{x}$:

$(x_1 - x)^2 = x_1^2 - 2x_1x + x^2$، $(x_2 - x)^2 = x_2^2 - 2x_2x + x^2$، $(x_3 - x)^2 = x_3^2 - 2x_3x + x^2$،

$(x_4 - x)^2 = x_4^2 - 2x_4x + x^2$.

إذن $S(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 4x^2$.

المجموع $S(x)$ هو من الشكل $c + bx + ax^2$، و هو ثلاثي الحدود للمتغير x حيث $a = 3$

و $b = -2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$ و .

بما أن المعامل a موجب، فإن $S(x)$ يقبل قيمة صغرى عند α حيث:

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{2(x_1+x_2+x_3+x_4)}{2\times 4} = \frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}.$$

بصفة عامة، عند جمع N مربعا، فالمعامل a هو N والمعامل b هو $-2\left(\sum x_i\right)$.

المعامل a موجب ومنه ثلاثي الحدود $S(x)$ يقبل قيمة صغرى عند α حيث: $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{2\left(\sum x_i\right)}{2\times N} = \frac{\sum x_i}{N} = \overline{x}$.

الربعيات- العشريات –المخطط بالعلبة

الربعيات والعشريات

- **الربعي الأول** ونرمز إليه بـ Q_1 هو أصغر قيمة للسلسلة حيث يكون 25% على الأقل من قيمها أصغر من أو يساوي Q_1.
- **الربعي الثالث** ونرمز إليه بـ Q_3 هو أصغر قيمة للسلسلة حيث يكون 75% على الأقل من قيمها أصغر من أو يساوي Q_3.
- $[Q_1, Q_3]$ هو **المجال الربعي** و $Q_3 - Q_1$ هو **الانحراف الربعي**.

ملاحظات:

- الربعي الثاني Q_2 هو أصغر قيمة للسلسلة بحيث يكون 50% من قيمها أصغر من أو يساوي Q_2.
- الانحراف الربعي هو معيار تشتت قيم سلسلة حول وسيطها.
- بالنسبة إلى مفهوم العشري، نستعمل نفس التعريف السابق بدءا من 10%.
- **الانحراف العشري** هو الفرق بين العشري الأول D_1 والعشري التاسع D_9 أي $D_9 - D_1$.

قيم السلسلة مرتبة ترتيبا تصاعديا و N هو التكرار الكلي لهذه السلسلة:

- إذا كان $\frac{N}{4}$ عددا طبيعيا p ، فإن الربعي الأول Q_1 هو القيمة ذات الرتبة p ، والربعي الثالث Q_3 هو القيمة ذات الرتبة $3p$.
- إذا كان $\frac{N}{4}$ ليس عددا طبيعيا، فإن الربعي الأول Q_1 هو القيمة ذات الرتبة الأكبر مباشرة من $\frac{N}{4}$، والربعي الثالث Q_3 هو القيمة ذات الرتبة الأكبر مباشرة من $3\frac{N}{4}$.

مثال1 : نعتبر السلسلة 3 ، 3 ، 4 ، 5 ، 5 ، 5 ، 7 ، 10 ، 14 ، 21 ، 21 ، 25.

التكرار الكلي لهذه السلسلة هو 12 و $\frac{12}{4} = 3$ ، إذن:

- الربعي الأول Q_1 هو القيمة ذات الرتبة 3 أي القيمة 4.

- الربعي الثالث Q_3 هو القيمة ذات الرتبة $3\times3=9$ أي القيمة 14.

مثال2 : يمثل الجدول التالي سلسلة معطاة بقيمها والتكرارات الموافقة لها.

القيمة	45	47	53	54	60	62	75
التكرار	3	6	2	4	7	8	9

التكرار الكلي لهذه السلسلة هو مجموع التكرارات أي 39 و $\frac{39}{4}=9,75$ ، **إذن:**

- الربعي الأول Q_1 هو القيمة ذات المرتبة 10 أي القيمة 53.
- الربعي الثالث Q_3 هو القيمة ذات المرتبة 30 (وهو القيمة ذات المرتبة الأكبر مباشرة من $3\times9,75$) أي القيمة 62.

ملاحظة: إذا كانت السلسلة منظمة في شكل فئات، فإنّ:

- الربعي الأول Q_1 هو القيمة الموافقة **للتواتر المجمع الصاعد** المساوي $0,25$.
- الربعي الثالث Q_3 هو القيمة الموافقة **للتواتر المجمع الصاعد** المساوي $0,75$.

. حساب الربعيات بالاعتماد على التواترات المجمعة الصاعدة.

- لتعيين الربعي الأول لسلسلة إحصائية انطلاقا من جدول التواترات المجمعة الصاعدة، نقرأ مباشرة على الجدول أصغر قيمة يكون من أجلها 25% على الأقل من قيم السلسلة أصغر أو يساوي هذه القيمة.
- لتعيين الربعي الثالث لسلسلة إحصائية انطلاقا من جدول التواترات المجمعة الصاعدة، نقرأ مباشرة على الجدول أصغر قيمة يكون من أجلها 75% على الأقل من قيم السلسلة أصغر من أو يساوي هذه القيمة.

مثال

يمثل الجدول التالي سلسلة إحصائية:

القيمة x_i	4	6	8	10	12	15
التكرار n_i	6	24	12	22	6	10

1. أتمم هذا الجدول بحساب كل من التكرارات المجمعة الصاعدة والتواترات المجمعة الصاعدة.
2. عين كلا من الربعي الأول والربعي الثالث.

حل:

1.

القيمة x_i	4	6	8	10	12	15
التكرار n_i	6	24	12	22	6	10
التكرارات المجمعة الصاعدة	6	30	42	64	70	80
التواترات المجمعة الصاعدة	0,075	0,375	0,525	0,8	0,875	1

2. بقراءة جدول التواترات المجمعة الصاعدة، نلاحظ أن أصغر قيمة للسلسلة والتي يكون من أجلها

25 % على الأقل من قيم السلسلة أصغر أو يساوي هذه القيمة هي 6. إذن $Q_1 = 6$.

. بقراءة جدول التواترات المجمعة الصاعدة، نلاحظ أن أصغر قيمة للسلسلة والتي يكون من أجلها

75 % على الأقل من قيم السلسلة أصغر أو يساوي هذه القيمة هي 10. إذن $Q_3 = 10$.

ملاحظة:

إذا كانت السلسلة معرفة بمنحنيها للتواترات المجمعة الصاعدة، فالربعي الأول Q_1 هو فاصلة النقطة من المنحنى التي ترتيبها $\frac{1}{4}$ (أو $0,25$ أو 25%)، والربعي الثالث Q_3 هو فاصلة النقطة من المنحنى التي ترتيبها $\frac{3}{4}$ (أو $0,75$ أو 75%).

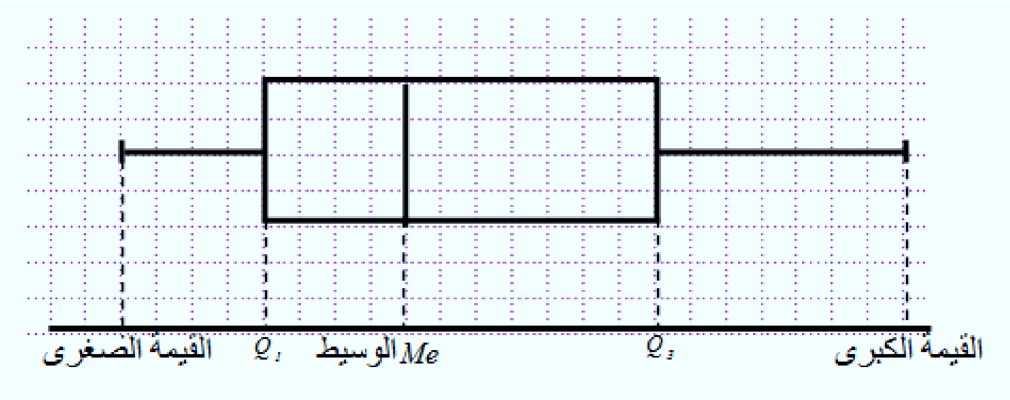
المخطط بالعلبة (أو مخطط بالربعيات)

يسمح هذا النوع من التمثيل بتلخيص سلسلة إحصائية بيانيا ودراسة توزيع قيم هذه السلسلة حول وسيطها دون اللجوء إلى مفهوم الانحراف المعياري.

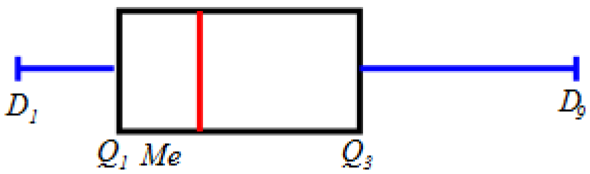
يعتمد هذا المخطط على 5 قيم، هي: القيمة الصغرى، الربعيات الثلاثة Q_1 ، Q_2 (الوسيط)، Q_3 والقيمة الكبرى.

ولإنشاء المخطط بالعلبة:

- نختار محورا (أفقيا أو عموديا) مع وحدة ملائمة.
- نعيّن القيم الخمس المذكورة سابقا.
- نرسم علبة مستطيلة الشكل طولها يساوي الانحراف بين ربعيين.
- نصل بخطين العلبة وكلا من القيمة الصغرى والقيمة الكبرى.
- نعيّن الوسيط بخط (أفقي أو عمودي) داخل اللعبة (أنظر الشكل).

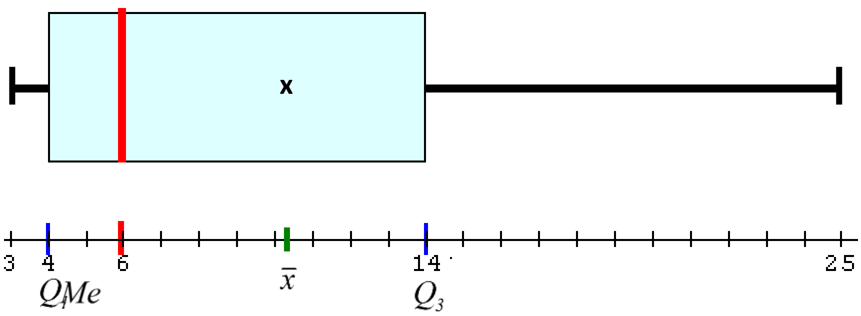


ملاحظات:- إذا كانت المعطيات كثيرة جدا ولا نعلم القيمتين الطرفيتين، نستعمل مخططا بالعشريات، حيث نعيّن العشري الأول D_1 والعشري التاسع D_9.



- غالبا ما نستعمل الإشارة x لتحديد قيمة الوسط في العلبة.

مثال: يمثل المخطط بالعلبة الموالي السلسلة المقدمة في المثال الأول من الفقرة السابقة:



ملاحظة: وسط السلسلة هو $\overline{x} = 10,25$.

تذبذب العينات والمحاكاة

أ-عيّنة إحصائيّة

لتكن سلسلة إحصائية تتكون من نتائج تجربة أُجريت n مرة. هذه السلسلة تشكل عيّنة. إحصائية مقاسها n.

مثال :

- **التّجربة** : رمي قطعة نقدية غير مزيّفة.
- **النتائج** الممكنة: ظهر أو وجه.
- **التّرميز**: نرمز بالرّقم **1** للوجه و بالرّقم **2** للظهر.
- **العيّنة**: عندما نرمي هذه القطعة 10 مرّات نتحصل على عيّنة مقاسها 10 .

نتحصل مثلا عل العيّنة : **2-2-2-2-2-1-2-1-1-1**.

سجّلنا تواتر كلّ نتيجة من النّتيجتين وتحصّلنا على الجدول الآتي:

جدول توزيع التّواترات

النتيجة	**1**	**2**
التّواتر	*0,4*	*0,6*

مثلا: *0,6* هو تواتر النتيجة **2** .

ب-تذبذب العيّنات

عندما ننجز تجربة n مرة، نتحصل على عينة مقاسها n ، وعندما نعيد نفس التّجربة n مرة في نفس الظروف نجد عينة

مثال :

التّجربة: رمي زهر نرد غير مزيّف.

النتائج الممكنة: الوجه1، الوجه2 ، الوجه3 ، الوجه4 ، الوجه 5، الوجه6.

التّرميز: نرمز لكل وجه بعدد النقط الذي يحمله ؛ مثلا الوجه هو 6 .

رمى محمد زهر النّرد 50 مرّة فتحصل على عيّنة *A*، وأنجز سعيد نفس العملية بنفس النّرد فتحصل على عيّنة *B* .

لكل عيّنة تحصلنا على توزيع التّواترات حسب الجدول الآتي:

النتيجة	1	2	3	4	5	6
تواتر *A*	0,12	0,18	0,12	0,14	0,18	0,26
تواتر *B*	0,14	0,2	0,16	0,15	0,24	0,11

نلاحظ أنّ توزيع التّواترات في العينتين ليس نفسه، أي هناك تذبذب في نتائج كلّ من سعيد ومحمد، هذه الظاهرة تعرف بتذبذب العينات.

تجربة عشوائية

عندما نرمي زهر نرد غير مزيّف ، ونهتم بالرّقم الظّاهر على الوجهه العلوي، من المؤكّد أنّنا لا نستطيع توقّع هذه النتيجة مسبقا؛ إنّ هذه التّجربة تسمى **تجربة عشوائية** .

المحاكاة: محاكاة تجربة عشوائية يعني اختيار نموذج لهذه التّجربة.

مثال:

- التّجربة العشوائية: ميلاد بنت أو ولد في 10 عائلات.
- نموذج لهذه التّجربة: حظوظ ميلاد بنت تساوي حظوظ ميلاد ولد
- تنفيذ محاكاة توزيع الجنس في 10 عائلات : يمكن محاكاة هذه التّجربة بعدة طرق، نقترح هنا طريقتين مألوفتين هما

طريقة1:

برمي قطعة نقديّة غير مزيّفة 10 مرّات حيث نرفق الوجه بالنتيجة "بنت" و الظهر بالنتيجة "ولد".

مثلا: العيّنة وجه – ظهر - وجه – وجه – ظهر - وجه- ظهر - وجه – وجه – ظهر تعبّر عن 6 بنات و 4 أولاد في العائلات العشرة. (يمكن ان نرمز *F* لـ : وجه و *P* لـ : ظهر).

طريقة2:

برمي زهر نرد غير مزيّف 10 مرّات. نرفق الوجوه 2 ، 4 ، 6 بالنتيجة "بنت" و الوجوه 1 ، 3 ، 5 بالنتيجة "ولد" .

مثلا: العيّنة 2-4-1-3-1-5-6-2-3-1 تعبّر عن 4 بنات و 6 أولاد في العائلات العشرة.

ملاحظة: إذا كرّرنا التّجربة 500 مرّة مثلا حصلنا على عيّنة مقاسها 500، ويمكن إنطلاقا منها تقدير تواتر المواليد حسب الجنس.

التمرين 1:

السّلسلة الآتية تعبّر على علامات 20 تلميذا.

10	16	8	12	10	8	12	12	16	14
10	10	14	10	8	12	8	12	10	16

مثّل هذه السّلسلة بمخطّط بالأعمدة، ثم أنشئ مضلّع التّكرارات، ومضلّع التّواترات.

التمرين 2:

أجريت دراسة على 100 مصباح لمعرفة مدة صلاحيتها و سجلت النتائج في الجدول الأتي:

مدة الصلاحية بالسّاعات	$[300;400[$	$[400;500[$	$[500;600[$	$[600;700[$
عدد المصابيح	15	35	30	20

أنشئ المدرج التّكراري لهذه السّلسلة.

التمرين 3:

أجريت دراسة على 100 مصباح لمعرفة مدة صلاحيتها و سجلت النتائج في الجدول الأتي:

مدة الصلاحية بالسّاعات	$[200;300[$	$[300;400[$	$[400;700[$	$[700;900[$
عدد المصابيح	5	30	45	20

أنشئ المدرج التّكراري لهذه السّلسلة.

التمرين 4:

الجدول الآتي يتعلق بقامات 20 تلميذا بالسّنتيمتر.

القامات	160	161	163	165	169	170	171
عدد التّلاميذ	3	2	2	5	4	1	3

1)احسب الوسط الحسابي.

2) بوّب معطيات هذا الجدول في فئات طول كلّ واحدة منها 4 ، واحسب عندئذ الوسط الحسابي.

التمرين 5:

احسب الوسط الحسابي $\bar{x}$ للأعداد : 98764,5 ؛ 98764,1 ؛ 98764,2 ؛ 98764,6 .

التمرين 6:

يتكون قسم من 15 تلميذا و 10 تلميذات، معدّل التّلاميذ *12,5* ومعدّل التّلميذات *11,3*.

ما هو معدّل القسم؟

التمرين 7:

1)عين وسيط السّلسلة *4,4,5,6,6,7,,8, 10,3* ثم منوالها.

2) عين وسيط السّلسلة *9,-3,4,7,8,7,5,2* ثم منوالها.

التمرين 8:

الجدول الآتي يتعلق بالأجور التّي يتقاضاها 81 عاملا بالدينار في اليوم . عين وسيط هذه السّلسلة.

الأجور(D.A)	$[400;450[$	$[450;550[$	$[500;550[$	$[550;600[$	$[600;650[$
عدد العمال	15	20	25	10	11

التمرين 9:

عين في كلّ وضعية من الوضعيات الآتية ،مؤشّر الموقع الذي تراه مناسبا لتلخيص السّلسلة .

الوضعية1: سلسلة متعلقة بعدد العائلات التّي مدخولها الشهري أقل من *10000DA*.

الهدف هو تقديم مساعدة إلى 50 % من هذه العائلات من قبل البلدية.

الوضعية2: سلسلة متعلقة بمقاسات الأحذية التّي باعها تاجر.

الوضعية3: سلسلة متعلقة بنتائج تلميذ في المواد الأساسية (الرّياضيات معاملها *4*، والعلوم الفيزيائية معاملها *4*، والعلوم الطّبيعية معاملها 5)

المواد	الرياضيات	العلوم الفيزيائية	العلوم الطبيعية
العلامات	12	4	11

التمرين 10:

عيّن في كلّ وضعية من الوضعيّات الآتية، القيمة التّي يجب أن "يقترب" منها تواتر كلّ نتيجة

أ) رمي قطعة نقدية عادية ،

ب) رمي قطعتين نقديتين عاديتين ،

ج) رمي زهر نرد عادي.

التمرين 11:

نعتبرالتّجربة: رمي زهر نرد غير مزيّف 50 مرّة.

1)أنجز هذه التّجربة 3مرّات (نجد 3عينات مقاس كلّ واحدة هو 50) وأتمم الجدول الآتي:

النتائج الممكنة	1	2	3	4	5	6
تواترات النتائج في العينة الأولى						
تواترات النتائج في العينة الثانية						
تواترات النتائج في العينة الثالثة						

2)عيّن في كلّ عيّنة أكبر تواتر، وأصغر تواتر.

3) عيّن في كلّ عيّنة الوسط الحسابي.

4) ارسم في نفس الشكل مضلّع التّواترات المتعلق بكل عيّنة .

التمرين 12:

أنجز محاكاة لتوزيع الأطفال حسب الجنس في 10عائلات تتكون كلّ منها من 4 أطفال.

التمرين 13:

إليك سلسلة العلامات (على 20) المحصل عليها في استجواب تلاميّذ قسم مادة الرياضيات:

8-2-6-2-3-8-5-5-7-8-8-4-8-6-8-1-1-2-5-7-8-2-8-2-5-5-6-5-9س-8-5-5-7-9-9-7.

1) نظم هذه المعطيات في جدول مبينا فيه العلامات من 0 إلى 9 والتكرارات والتكرارات المجمعة

الصاعدة والتواترات والتواترات الصاعدة، في شكل نسب مئوية مع تدوير النتائج إلى 0,1.

2) أ) عين كلا من الوسيط والربعي الأول والربعي الثالث لهذه السلسلة.

ب) مثل هذه السلسلة بمخطط بالعلبة.

ج) مثل التكرارات المجمعة الصاعدة بمخطط بالأعمدة، ثم تحقق من صحة قيم المعايير المعينة في السؤال 2.

3) أ) احسب كلا من المدى والوسط $\bar{x}$ والانحراف المعياري σ. تدور النتائج إلى0,01.

ب) احسب (بالتقريب إلى 0,1%) نسبة التلاميذ الذين تحصلوا على علامة محصورة بين $\bar{x}-\sigma$ و $\bar{x}+\sigma$.

4) بعد الملاحظة أن علامات الاستجواب ضعيفة جدا، قرر الأستاذ تغييرها بإحدى الطريقتين التاليتين:

<u>الطريقة الأولى</u>: يضيف 4 نقط إلى كل العلامات.

<u>الطرقة الثانية</u>: يضعف كلّ العلامات.

أ) عين، في كل حالة، كيف تتغير هذه المعايير بالنسبة إلى معايير السلسلة الأصلية.

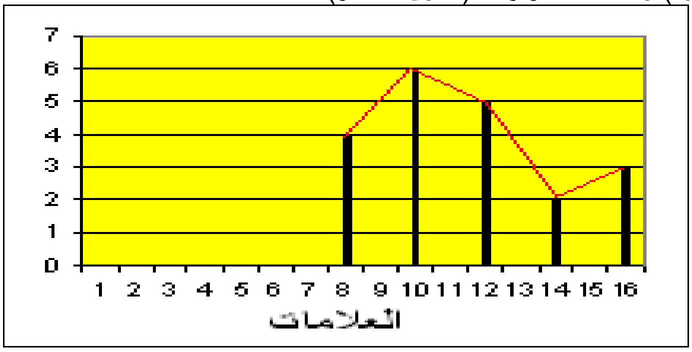
ب) استنتج خاصية للانحراف المعياري للسلسلة.

حل التمرين :1

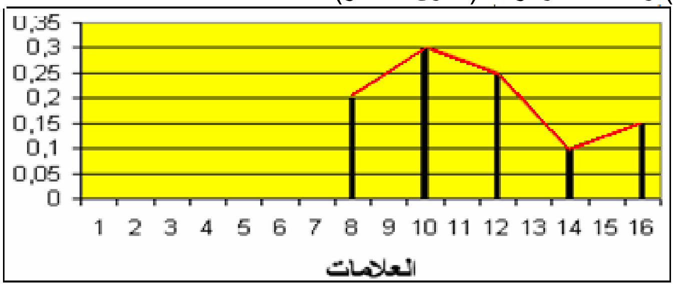
- نلخص السّلسلة في جدول الآتي:

القيم(العلامات)	8	10	12	14	16
التّكرارت(عدد التّلاميذ)	4	6	5	2	3
التّواترات	$0,2$	$0,3$	$0,25$	$0,1$	$0,15$

- لننشئ المخطّط بالأعمدة (باللون الأسود) ومخطّط التّكرارات (باللون الأحمر)



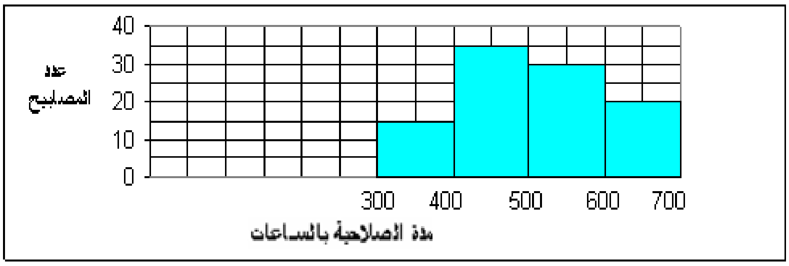
- لننشئ المخطّط بالأعمدة(باللون الأسود) ومخطّط التّواترات (باللون الأحمر)



- لاحظ أنّ قيم المتغير أعطيت على شكل خام، ولا بد من ترتيبها لتسهيل استغلالها.
- نستعمل المخطّط بالأعمدة في حالة طبع إحصائي متقطع.

أطوال الأعمدة متناسبة مع التّكرارات (و مع التّواترات) في كلّ من المخطّطين.

حل التمرين :2



طريقة: نمثل تكرار كلّ فئة بمستطيل، بعداه هما مدى الفئة وتكرارها.

حل التمرين :3

أصغر طول هو : $a=100$.

طول الفئة $[400;700[$ هو 300 و $300=k_3a$ أي $k_3=3$.

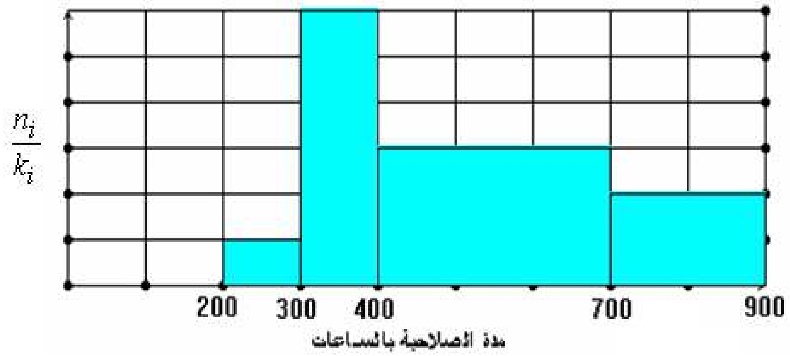
طول الفئة $[700;900[$ هو 200 و $200=k_4a$ أي $k_4=2$.

الفئات	$[200;300[$	$[300;400[$	$[400;700[$	$[700;900[$
أطوال الفئات	100	100	300	200
التّكرارات n_i	5	30	45	20
k_i	1	1	3	2
الإرتفاعات $\frac{n_i}{k_i}$	5	30	15	10

حذار:

عندما يتعلق الأمربسلسلة طبعها مستمر، مبوّبة في فئات مختلفة الطول،

فإنّ إنشاء مدرّجها التّكراري لا يتم بنفس الطريقة التّي تكون فيها الفئات متساوية الطّول.



طريقة:

الفئات مختلفة الأطوال، تحافظ على تناسب المساحات مع التّكرارات ، بالطريقة الآتية:

- نمثل الفئة التّي لها أصغر طول a ، وليكن n تكرارها بمستطيل بعداه a و n .

فيما يخص أي فئة أخرى (طولها a_i و تكرارها n_i) : نعيّن العدد الحقيقي k_i من العلاقة $a_i = k_i\, a$ ، ونمثل كلّ منها بمستطيل بعداه a_i و $\frac{n_i}{k_i}$.

حل التمرين 4:

1)الوسط الحسابي هو:

$$\frac{3\times160+2\times161+2\times163+5\times165+4\times169+1\times170+3\times171}{20}=165,6$$

2) تبويب معطيات الجدول السّابق في فئات طول كلّ واحدة 4.

الفئات	$[160,164[$	$[164,168[$	$[168,172[$
مراكز الفئات	162	166	170
عدد التّلاميذ	7	5	8

الوسط الحسابي يكون: $\frac{162\times7+166\times5+170\times8}{20}=166,2$

في 2) فرضنا أنّ كلّ القامات المحصورة في المجال $[a,b[$ متساوية وتساوي $\frac{a+b}{2}$ إذن لا نتفاجأ عندما نجد الوسط الحسابي يختلف عن *165,6 cm*.

حل التمرين 5:

للأعداد المعطاة نفس الجزء الصحيح . نحسب الوسط الحسابي للسلسلة *0,6* ؛ *0,2* ؛ *0,1* ؛ *0,5*

ونجد $\frac{1,4}{4}$ أي *0,35* إذن $\bar{x}$ هو *98764,35* .

الوسط الحسابي يزداد بالعدد a عندما نضيف a لكل قيمة من قيم السّلسلة الإحصائيّة

حل التمرين :6

معدّل القسم هو : $\frac{15\times 12,5+10\times 11,3}{25}=12,02$

يمكن تعميم هذه الطريقة إلى عدة أجزاء للسلسلة $\bar{x}=\frac{\sum_i N_i\times \bar{x_i}}{\sum_i N_i}$

طريقة:

لحساب الوسط الحسابي $\bar{x}$ لسلسلة،تكرارها الكليN،انطلاقا من وسطين حسابيين جزئيين لها $\bar{x}_1$ ، $\bar{x}_2$ تكراراهما N_1 ، N_2 على التّرتيب ($N=N_1+N_2$)،

نطبق القاعدة: $\bar{x}=\frac{N_1\times \overline{x_1}+N_2\times \overline{x_2}}{N}$

حل التمرين :7

1)- التّكرار الكلي هو9 (عدد فردي) أي $2\times 4+1$ إذن الوسيط هوالقيمة التّي رتبتها $4+1$ أي 6.

-القيمتان اللتان لها أكبرتكرار و هما :4و6 إذن السّلسلة تقبل منولين هما 4 و 6 .

2)- نرتب السّلسلة ترتيبا تصاعديا: $3,2,4,5,7,7,8,9$- .

- التّكرار الكلي هو8 (عدد زوجي) أي2×4 .

الوسيط هو نصف المجموع للقيمتين اللتين رتباهما 4 و$4+1$ أي $6=\frac{7+5}{2}$.

- القيمة التّي لها أكبر تكرار هي 7 أي المنوال هو 7 .

- إذا كان التّكرار الكلي زوجيا فإن الوسيط لا ينتمي إلى السّلسلة .
- يجب التّمييز بين قيمة ورتبتها .
- يمكن ان تقبل سلسلة أكثر من منوال واحد.

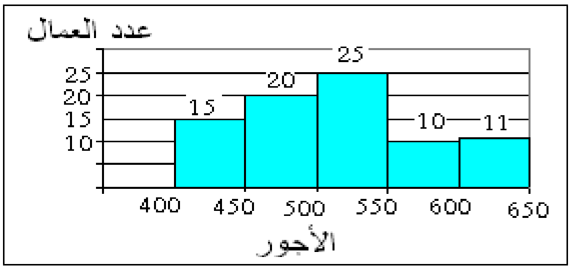
طريقة:

- لحساب وسيط سلسلة نرتّبها أولا ترتيبا تصاعديا أو تنازليا إذا لم تكن مرتبة، ثم نبحث عن القيمة الوسيطية كما ورد في تعريف الوسيط آخذين بالاعتبار شفعية التّكرار الكلّي.

لحساب منوال سلسلة نبحث عن القيمة التّي لها أكبر تكرار (أي القيمة السّائدة).

حل التمرين :8

المدرج التّكراري الذي يمثل السّلسلة الإحصائيّة هو :



- نلاحظ أنّ قائمة العمال مرتبة ترتيبا تصاعديا حسب أجورهم.

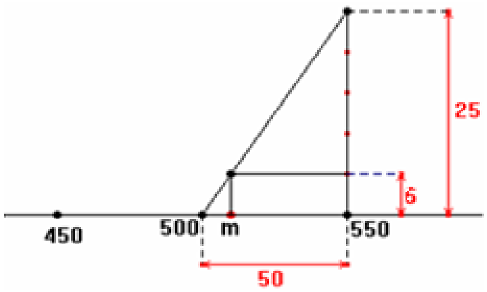
عدد العمل هو 81 و $81=2\times 40+1$ إذن رتبة الوسيط في السّلسلة هي 41 .

- أجرة العامل X الذي رتبته 41 في قائمة العمّال تكون حتما في المجال $]500,550[$ لأن عدد العمال الذين يتقاضون أجرة أقل من 500 DA هو35، وعدد العمال الذين يتقاضون أجرة أقل من 550 DA هو 60.

وبالتّالي فإنّ الوسيط ينتمي حتما إلى المجال $]500\,;550[$ الذي يُسمّى **الفئةالوسيطية**.

- عدد العمال الذين يتقاضون أجرة أقل من الوسيط أو تساويه هو 41= 35+6 . وبالتّالي فإنّ رتبة الوسيط هي 6 في الفئة $]500\,;550[$.

لإيجد قيمة مقرّبة m للوسيط يمكن توظيف خاصية طاليس كالآتي:



$\frac{6}{25}=\frac{m-500}{50}$ أي $m=500+\frac{6}{25}\times 50$ أي $m=512$

طريقة:

لحساب وسيط سلسلة طبعها مستمر.

- نعين الفئة $[a,b[$ الّتي تشمل الوسيط (Med) (وهي الفئة الوسيطية) .
- نعين r رتبة الوسيط (Med) في الفئة $[a,b[$.

إذا سمّينا l طول الفئة $[a,b[$ و d تكرارها، نجد تقديرا m للوسيط Med كالآتي : $m=a+\frac{r}{d}\times l$

حل التمرين 9:

- في الوضعية1 : نختار الوسيط لأن 50 % من القيم تكون أقل من الوسيط .
- في الوضعية2 : نختار المنوال لأن التّاجر يزوّد دكّانه حسب طلب الزبائن.

في الوضعية3 : نختارالوسط الحسابي للسلسلة للحصول على معدّل التّلميذ.

حل التمرين 10:

أ) للنتيجتين الممكنتين : وجه ،ظهر نفس الحظوظ .

القيمة التّي يجب أن يقترب منها تواتر كلّ نتيجة هي $\frac{1}{2}$.

ب) لدينا 4 نتائج ممكنة لها نفس الحظوظ .

القيمة التّي يجب أن يقترب منها تواتر كلّ نتيجة هي $\frac{1}{4}$.

جـ) لدينا 6 نتائج ممكنة لها نفس الحظوظ .

القيمة التّي يجب أن يقترب منها تواتر كلّ نتيجة هي $\frac{1}{6}$

- نقصد بقطعة نقدية عادية أو زهر نرد عادي، كلّ الوجوه لها نفس الحظوظ للظهور.
- يعتبر هذا التّقدير نظريا لأنه ينطلق من اعتبارات حدسية تتوافق مع تصورنا لنتائج التّجربة.
- يسمح لنا هذا التّقدير بإعطاء نموذج رياضي.

حل التمرين 11:

.1

النتائج الممكنة	1	2	3	4	5	6
تواترات النتائج في العيّنة الأولى	0,2	0,16	0,18	0,12	0,14	0,2
تواترات النتائج في العيّنة الثانية	0,12	0,22	0,1	0,22	0,16	0,18
تواترات النتائج في العيّنة الثالثة	0,18	0,2	0,1	0,18	0,22	0,12

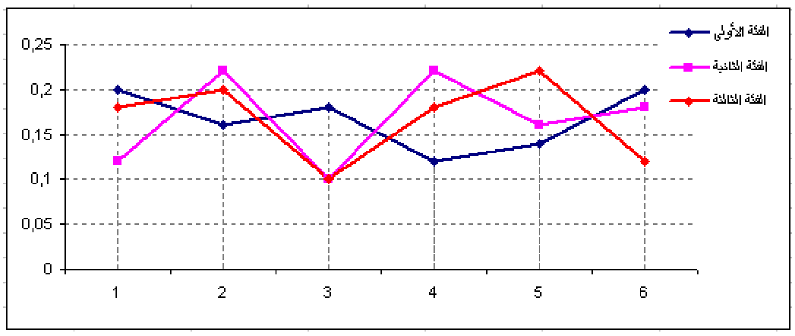
- لاحظ : أنجزنا نفس التّجربة في نفس الظروف (عدة مرّات) ولم نجد نفس النتائج ؛ نسمي هذه الظّاهرة: **تذبذب العينات**.
- شاهد على التّمثيلات البيانية هذا التّذبذب.

.3.2

	العيّنة الأولى	العيّنة الثانية	العيّنة الثالثة
أصغر تواتر	0,12	0,1	0,1
أكبر تواتر	0,2	0,22	0,22
الوسط الحسابي	3,44	3,62	3,42

لاحظ : كلّ النتائج الممكنة لها نفس الحظوظ للظهور؛ فنظريا تواتر كلّ نتيجة هو $\frac{1}{6}$ ($\frac{1}{6} \approx 0{,}16$)، غير أنّ التّجربة أعطيت خلاف ذلك في العيّنات الثلاث.

.4



حل التمرين 12:

1) تشبيه التّجربة :

نشبّه ولادة طفل في عائلة بتجربة عشوائية تؤدي إلى نتيجتين ممكنتين.

2)اختيار نموذج:

نعتبر أنّ كلّ ولادة تحتمل بنتا أو ولدا، وأنّ حظوظ ولادة ولد تساوي حظوظ ولادة بنت.

3) اختيار السّند المادّي:

نختار السّند المادّي المناسب : زهر نرد غير مزيّف.

4) تحقيق التّجربة :

نحاكي توزيع الأطفال حسب الجنس في العائلة الواحدة عندما نلقي زهر النّرد 4 مرّات متتالية، ونعتبر ظهور رقم فردي يعني ولادة ولد، وظهور رقم زوجي يعني ولادة بنت.

نكرّر هذه العملية 10 مرّات حتى نحاك التّوزيع في كلّ العائلات.

كانت النتائج المتحصل عليها كما يأتي:

النتائج	ترجمتها	النتائج	ترجمتها
4-6-3-5	بنتان و ولدان	3-3-1-4	3أولاد و بنت
1-3-3-1	4أولاد	1-1-1-1	4 أولاد
3-1-2-2	بنتان و ولدان	2-4-1-2	ولد و 3 بنات
2-2-2-2	4بنات	4-2-1-2	ولد و 3 بنات
4-4-3-3	بنتان و ولدان	1-1-2-3	3 أولاد و بنت

حل التمرين 13:

1. تسجل العلامات في الجدول، ثم تعين التكرارات بعناية ويملأ الجدول.

العلامات	1	2	3	4	5	6	7	8	9
التكرارات	2	5	1	1	8	3	4	9	3
التكرارات المجمعة الصاعدة	2	7	8	9	17	20	24	33	36
التواترات (%)	5,6	13,9	2,8	2,8	22,2	8,3	11,1	25	8,3
التواترات المجمعة الصاعدة (%)	5,6	19,5	22,3	25	47,3	55,6	66,7	91,7	100

2) أ) التكرار الكلي لسلسلة العلامات هو 36:

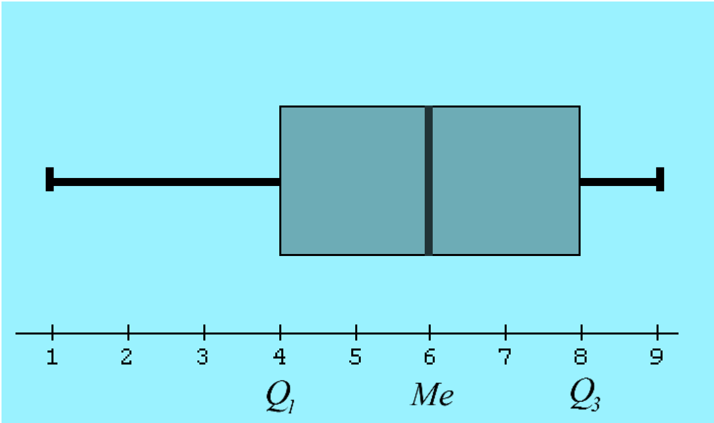
وسيطها هو وسط العلامة من الرتبة 18 والعلامة من الرتبة 19 إذن: $Me = \frac{6+6}{2} = 6$.

فالوسيط هو $\boldsymbol{Me = 6}$.

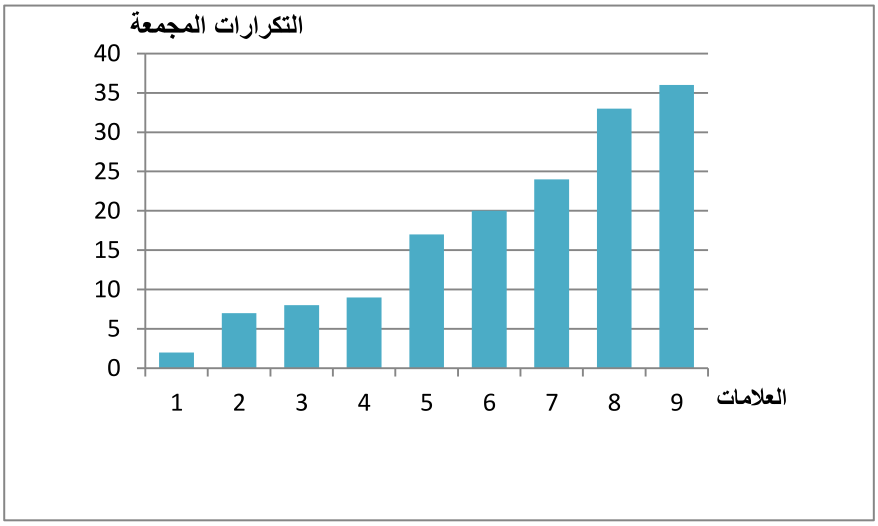
الربعي الأول هو القيمة من الرتبة $\frac{36}{4}$ أي القيمة من الرتبة 9 ، إذن الربعي الأول هو $\boldsymbol{Q_1 = 4}$.

الربعي الثالث هو القيمة من الرتبة $3 \times \frac{36}{4}$ أي القيمة من الرتبة 27 ، إذن الربعي الثلث هو $\boldsymbol{Q_3 = 8}$.

ب) تمثيل السلسلة بالمخطط بالعلبة:



ج)



- الوسيط يوافق العلامة التي تكرارها المجمع الصاعد، يساوي نصف التكرار الكلي، إذن هو **6**.

- الربعي الأول يوافق العلامة التي تكرارها المجمع الصاعد ، يساوي ربع التكرار الكلي، إذن هو **4**.

- الربعي الثالث يوافق العلامة التي تكرارها المجمع الصاعد، يساوي ثلاث أربع التكرار الكلي، إذن هو **8**.

2) أ)

- المدى هو الفرق بين أصغر علامة واكبر علامة، إذن هو $9-1=8$ أي **8**.
- الوسط: $\bar{x}=\dfrac{1\times2+2\times5+3\times1+4\times1+5\times8+6\times3+7\times4+8\times9+9\times3}{36}\approx5,7$ ، أي $\boldsymbol{\bar{x}=5,7}$.
- الانحراف المعياري هو:

$$\sigma\approx\sqrt{\frac{2\times1^2+5\times2^2+1\times3^2+1\times4^2+8\times5^2+3\times6^2+4\times7^2+9\times8^2+3\times9^2}{36}-5,7^2}$$ أي $\boldsymbol{\sigma\approx2,4}$

ب) $\bar{x}-\sigma\approx5,7-2,4\approx3,3$ و $\bar{x}+\sigma\approx5,7+2,4\approx8,1$ ، إذن عدد التلاميذ الذين تحصلوا عل علامة محصورة بين $3,3$ و $8,1$ هو مجموع تكرارات العلامات 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 أي $1+8+3+4+9=25$ ،

ومنه النسبة المئوية هي $\dfrac{25}{36}\times100\approx69,4$ أي **69,4 %**.

3) - بتطبيق **الطريقة الأولى** أي إضافة 4 إلى كل علامة:

- مدى السلسلة الجديدة هو: $(9+4)-(1+4)=8$ أي ***8*** إذن المدى لا يتغير.
- حسب خواص الوسط، فإن وسط السلسلة الجديدة يزيد بنفس زيادة العلامات.

إذن وسط السلسلة الجديدة هو: $5,7+4$ أي ***9,7***.

- الانحراف المعياري للسلسلة الجديدة هو: $\sigma=\sqrt{\dfrac{\sum n_i\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{36}}=\sqrt{\dfrac{\sum n_i\left[\left(x_i+4\right)-\left(\bar{x}+4\right)\right]^2}{36}}$ ،
- أي $\boldsymbol{\sigma\approx2,4}$. إذن الانحراف المعياري لا يتغير.

- بتطبيق **الطريقة الثانية** أي تضعيف كل علامة:

- مدى السلسلة الجديدة هو: $(9\times2)-(1\times2)$ أي ***16***. إذن المدى يضعف.
- حسب خواص الوسط، فإن وسط السلسلة الجديدة يضعف أيضا.

إذن وسط السلسلة الجديدة هو: $5,7\times2$ أي ***11,4***.

- الانحراف المعياري للسلسلة الجديدة هو:

$$2\times\sigma=2\sqrt{\frac{\sum n_i\times\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{36}}=\sqrt{\frac{\sum n_i\times4\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{36}}=\sqrt{\frac{\sum n_i\left[2\left(x_i-\bar{x}\right)\right]^2}{36}}=\sqrt{\frac{\sum n_i\left[\left(x_i\times2\right)-\left(\bar{x}\times2\right)\right]^2}{36}}$$

- أي $2,4\times2$. إذن الانحراف المعياري يضعف

ب) **خاصية:**

- إذا أضفنا نفس العدد b إلى كل قيم سلسلة، فإن الانحراف المعياري لا يتغير.
- إذا ضربنا كل قيم سلسلة في نفس العدد a ، فإن الانحراف المعياري يضرب في نفس العدد a .

التمرين 1:

تحصل محمد على العلامات التالية في التاريخ:

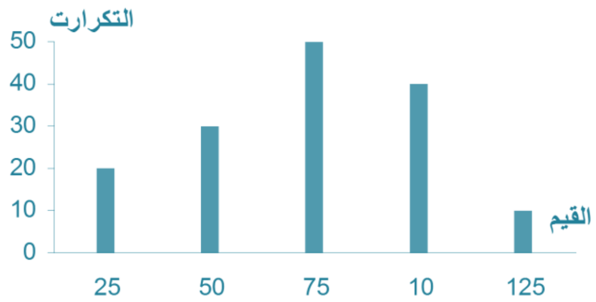
12،7،11،9،10،11.

1) تحقق أن معدل العلامات هو 10.

2) احسب التباين والانحراف المعياري لهذه السلسلة.

التمرين 2:

نعتبر المخطط بالأعمدة التالي:



1) اجمع هذه المعطيات في جدول.

2) أحسب كلا من الوسط، لتباين، الانحراف المعياري لهذه السلسلة. تدوّر النتائج إلى 0,01.

التمرين 3:

تحصل تلميذ على العلامات التالية في فروض مادة اللغة العربية: 8،10. 12،14.

1) احسب كلا من الوسط والانحراف المعياري لسلسلة العلامات.

2) قرر الأستاذ إضافة نقطة واحدة إلى كل علامة من علامات التلميذ. كيف يصبح كل من الوسط والانحراف المعياري.

3) نفس السؤال في حالة إضافة 10% إلى كل علامة.

التمرين 4:

يمثل الجدول التالي علامات التلاميذ 3 أقسام في اختبار مادة الرياضيات:

	العلامة	4	5	6	7	9	10	11	12	13	14	15	17	18
القسم 1	عدد التلاميذ	0	1	1	1	6	9	7	0	1	1	0	0	0
القسم 2	عدد التلاميذ	1	1	2	3	1	5	3	8	4	1	1	0	1
القسم 3	عدد التلاميذ	6	4	2	1	1	0	0	1	5	6	3	4	1

1.احسب كلا من الوسط والانحراف المعياري لكل من الأقسام الثلاثة ثم علق عن هذه النتائج.

2. باستعمال المخطط بالعلبة، مثل، في نفس البيان، كلا من سلاسل علامات الأقسام الثلاثة. ماذا تلاحظ؟

التمرين 5:

x عدد حقيقي. نعتبر السلسلة التالية: **3 ، 4 ، 5 ، 10 ، 13 ،** $6x$.

1) عبر بدلالة x عن كل من الوسط $\overline{x}$ و التباين V لهذه السلسلة.

2) هل توجد قيم للعدد x من أجلها يكون $V=2$؟

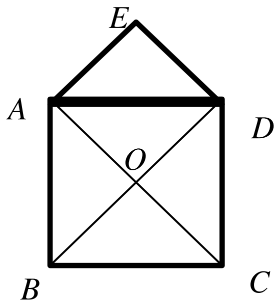
3) أوجد أصغر قيمة للتباين V.

ما هي، في هذه الحالة، قيمة الوسط $\overline{x}$.

نماذج امتحانات الفصل الثالث

التمرين الأول:

اليك الشكل المقابل



ضع العلامة ☑ أمام كل جملة صحيحة و العلامة ☒ أمام كل جملة خاطئة

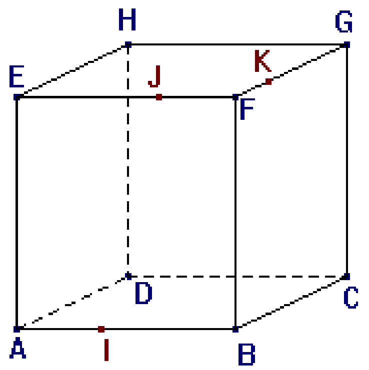
1.صورة D بالتناظر الذي محوره (AC) هي B.	5. صورة O بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AE}$ هي D.
2.صورة A بالتناظر الذي مركزه O هي C .	6.صورة D بالدوران الذي زاويته $\frac{\pi}{2}$ و مركزه O هي A.
3.صورة $[CD]$ بالتناظر الذي محوره (AC) هي $[AB]$.	7. صورة C بالدوران الذي زاويته $\frac{\pi}{4}$ و مركزه O هي O.
4.صورة O بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AE}$ هي E.	8.صورة C بالدوران الذي زاويته π و مركزه O هي A.

التمرين الثاني:

I. $ABCD$ رباعي وجوه. I، J و K ثلاث نقط تنتمي عل الترتيب إلى الأحرف $[BC]$، $[AC]$ و $[AD]$.

المستقيمان (JK) و (CD) غير متوازيين.

1. عين تقاطع المستوي (IJK) مع الوجهين ABC و ACD.
2. بين أن المستقيمين (JK) و (CD) يتقاطعان في نقطة M و حيث أن المستقيم (IM) محتوى في المستويين (IJK) و (BCD).
3. أنشئ مقطع رباعي الوجوه $ABCD$ بالمستوي (IJK).



II. $ABCDEFGH$ مكعب. I، J و K ثلاث نقط تنتمي على الترتيب إلى الأحرف $[AB]$، $[EF]$ و $[FG]$.

1. عين تقاطع المستوي (IJK) مع الأوجه $(ABFE)$، $(EFGH)$ و $(ABCD)$.
2. أنشئ مقطع المكعب $ABCDEFGH$ بالمستوي (IJK).

التمرين الثالث:

ليكن y عدد حقيقي غير معدوم نعتبر السلسلة الاحصائية التالية: $6, 8, 10, 12y, 26$.

1.عبر بدلالة y عن كل من : أ- الوسيط $\overline{x}$.

ب- التباين V و الانحراف المعياري σ لهذه السلسلة.

2.أوجد قيمة y حتى يكون الوسيط $\overline{x} = 10.8$. من أجل هذه القيمة ، أحسب التباين و الانحراف المعياري.

انتهى الموضوع

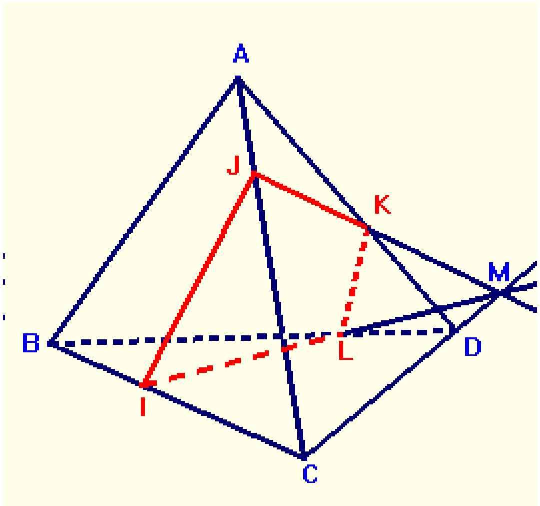
تصحيح مقترح نموذج ① اختبار الفصل الثالث

حل التمرين الأول:

1. صحيح	3.خطئ	5.صحيح	7. خطئ
2.صحيح	4. خطئ	6.صحيح	8.صحيح

حل التمرين الثاني:

.I

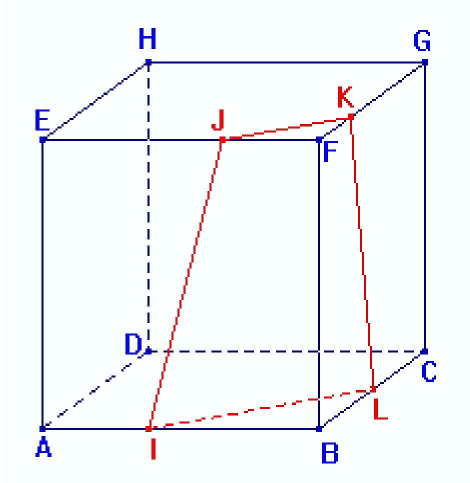


1. المستوي (IJK) يقطع الوجه ABC وفق القطعة $[IJ]$ و الوجه ACD وفق القطعة $[JK]$.

2. المستقيمان (JK) و (CD) ينتميان إلى المستوي ACD و بما أنهما غير متوازيين فهما متقاطعان في نقطة M. النقطة I تنتمي إلى المستويين (IJK) و (BCD). كذلك النقطة M تنتمي إلى المستويين (IJK) و (BCD) لأنها تنتمي إلى المستقيمين (JK) و (CD). و منه المستقيم (IM) محتوى في المستويين (IJK) و (BCD).

3. يتقاطع المستقيمان (IM) و (BD) في نقطة L. مقطع رباعي الوجوه $ABCD$ هو إذن الرباعي $IJKL$.

.II



1. تنتمي I و J إلى المستوي (IJK) و إلى الوجه $(ABFE)$. و منه المستوي (IJK) يقطع الوجه $(ABFE)$ وفق القطعة $[IJ]$.
كذلك المستوي (IJK) يقطع الوجه $(EFGH)$ وفق القطعة $[JK]$.
المستوي (IJK) يقطع المستويين المتوازيين $(EFGH)$ و $(ABCD)$ وفق مستقيمين متوازيين. المستقيم الذي يمر من I والموازي للمستقيم (JK) يقطع (BC) في النقطة L. إذن (IJK) يقطع $(ABCD)$ وفق $[IL]$.

2. المستوي (IJK) يقطع الوجه $(BCGF)$ وفق القطعة $[KL]$.
مقطع المكعب $ABCDEFGH$ **بالمستوي** (IJK) هو الرباعي $IJKL$

حل التمرين الثالث:

ليكن y عدد حقيقي غير معدوم نعتبر السلسلة الاحصائية التالية: $6,8,10,12y,26$.

1.التعبير بدلالة y عن كل من :

أ- الوسيط $\bar{x}$.

$$\bar{x}=\frac{6+8+10+12y+26}{5}=\frac{50+2y}{5}=10+0.4y$$

ب- التباين V :

$$V=\frac{[6-(10+0.4y)]^2+[5-(10+0.4y)]^2+[10-(10+0.4y)]^2+[12y-(10+0.4y)]^2+[26-(10+0.4y)]^2}{5}$$

أي: $V=\frac{154,4y^2-265,6y+376}{5}=30,88y^2-53,12y+75,2$

الانحراف المعياري σ :

$$\sigma=\sqrt{V}=\sqrt{30,88y^2-53,12y+75,2}$$

2.أوجد قيمة y حتى يكون الوسيط $\bar{x}=10.8$.

مما سبق وجدنا أنه: $\bar{x}=10+0.4y$ نعوض قيمة $\bar{x}$ نجد: $10+0.4y=10.8 \Rightarrow y=\frac{0,8}{0,4}=2$

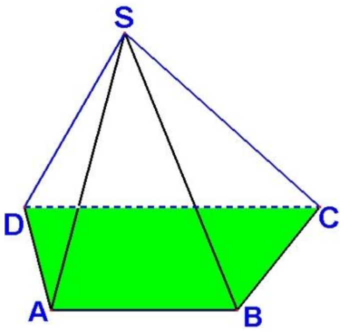
اذن: $y=2$

من أجل هذه القيمة ، أحسب التباين و الانحراف المعياري.

بالتعويض نجد:

$$V=30,88(2)^2-53,12(2)+75,2=92,48$$
$$\sigma=\sqrt{V}=\sqrt{92,48}=9,61$$

انتهى التصحيح



التمرين الأول:

أجب بصحيح أو خطئ في كل مما يلي:

①. $ABCD$ شبه منحرف فيه (AB) يوازي (CD). النقطة S هي نقطة لا تنتمي إلى المستوى (ABC)

1) المستويان (SAB) و (SCB) يتقاطعان عند نقطة واحدة وهي S.
2) المستويان (SAB) و (SCB) يتقاطعان وفق مستقيم يشمل S ويوازي المستوي (SAB).
3) المستويان (SAB) و (SCB) يتقاطعان وفق مستقيم يشمل S و يقطع المستوي عند نقطة أخرى ثابتة.

②. (D) و (D') مستقيمان من الفضاء .

1) إذا كان (D) و (D') ليس لهما أيّة نقطة مشتركة ، فإنهما متوازيان.
2) إذا كان (D) و (D') ليس لهما أيّة نقطة مشتركة فيوجد إذن مستوي يشملهما .
3) إذا كان (D) و (D') ليس لهما أيّة نقطة مشتركة وهما من نفس المستوي فإنهما إذن متوازيان .

التمرين الثاني:

ABCD متوازي أضلاع ، النّقط E ، F ، G H منتصفات أضلاعه [AB] ، [BC] ، [CD] [DA] على التّرتيب.

1. ما طبيعة الرّباعي EFGH ؟
2. بيّن أنّ للقطع [AC] ، [BD] ، [EG] ، [FH] نفس المنتصف.
3. قارن بين مساحتي ABCD و EFGH.

التمرين الثالث:

ABC مثلث متساوي الساقين رأسه A.

أنشئ المستقيم (d) الموازي للمستقيم (BC) و الذي يقطع $[AB]$ في النقطة M و $[AC]$ في النقطة N .

1. أنشئ شكلا مناسبا.
2. أثبت أن: $AM = AN$.
3. برهن أن المثلثين AMC و ANB متقايسان .
4 . استنتج أن: $CM = BN$.

التمرين الرابع:

الجدول التالي يمثل قامات لعينة متكونة من 100 رجل.

القامات (cm)	$[140;150[$	$[150;160[$	$[160;170[$	$[170;180[$	$[180;190[$
التكرار	2	10	40	26	22

1. هل ميزة هذه السلسلة كمية أو نوعية؟.
2. هل ميزة هذه السلسلة مستمرة أو متقطعة؟.
3. أكمل الجدول بتعين كل من مراكز الفئات، التكرار المجمع الصاعد.
4. احسب كل من المنوال و الوسط الحسابي لهذه السلسلة.
5. أنشئ المدرج التكراري لهذه السلسلة.

انتهى الموضوع

نموذج امتحان الاستدراك ⏲ المدة ساعتان

التمرين الأول: (06 نقاط) **الحساب الشعاعي**

المستوي منسوب الى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، نعتبر النقط $A(2,3)$ ، $B(2,-1)$ و $C(3,2)$.

1/- بين أن النقط C,B,A ليست في استقامية.

2/- عين احداثيتي النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع.

3/- عين احداثيتي النقطة E مركز متوازي الأضلاع $ABCD$.

4/- أكتب معادلة المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A و يوازي المستقيم (BC).

5/- حل في $\mathbb{R}$ جملة المعادلتين التالية: $\begin{cases}-x+y=-2\\7x+y=22\end{cases}$.

التمرين الثاني: (06 نقاط) **العبارات الجبرية**

1/- لتكن $E(x)$ العبارة الجبرية المعرفة كما يلي:

$$E(x)=3x^2+5x+2$$

أ- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التالية: $E(x)=0$.

ب- حلل $E(x)$ الى جداء عاملين من الدرجة الأولى.

ج- أكتب $E(x)$ على الشكل النموذجي.

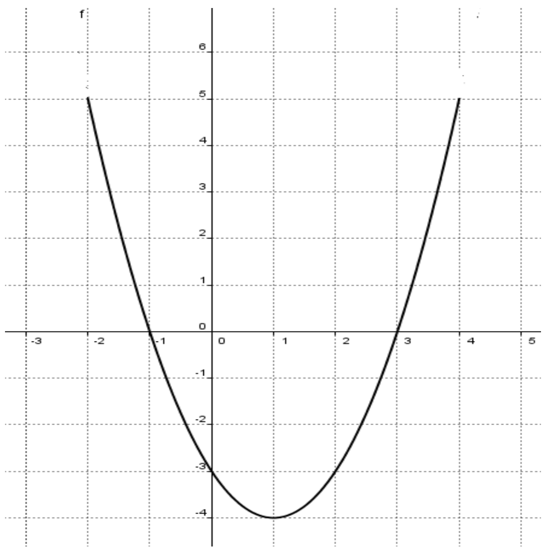
د- حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $E(x)<0$

2/- $B(x)$ عبارة جبرية حيث: $B(x)=x^2+4$

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التالية : $B(x)=4x$

التمرين الثالث: (08 نقاط) **عموميات على الدوال**

I) - f دالة عددية معرفة بتمثيلها البياني (C_f) في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$. من البيان عين :



1/- مجموعة تعريف الدالة f.

2/-صورة كل من 2- ، 0 بواسطة الدالة f.

3/-ما هي سوابق 3- ، 0 بواسطة الدالة f.

4/-هل تقبل الدالة f قيمة حدية حددها وعينها ان وجدت .

5/-لخص إشارة الدالة f في جدول اشارة .

6/-شكل جدول تغيرات الدالة f.

II) - لتكن g الدالة المعرفة على المجال $[-2;4]$ حيث : $g(x)=x-3$

1/-أعد رسم منحنى الدالة f ثم أنشئ g في نفس المعلم

2/-حل بيانيا المعادلة: $f(x)=g(x)$.

3/-حل بيانيا المتراجحة : $f(x)\leq g(x)$

انتهى الموضوع

مع تحيات الأستاذ شعبان

تجدون هذا الملف في صفحة 5min Maths

و على حساب النستغرام 5minmaths