مجلة الأعداد و الحساب

المستوى السنة أولى جذع مشترك علوم و تكنولوجيا:

تتضمن ملخصات

+ أمثلة محلولة

من إعداد : الأستاذة عثماني . أ.

المجموعات الاساسية لاعداد

الأعداد الطبيعة :

تعريف مجموعة الاعداد الطبيعية هي الاعداد 0و 1 و 2 الى غير ذالك من الاعداد و نرمز الى مجموعة الاعدا الطبيعية بـ N

أمثلة :

العدد 4 ينتمى الى مجموعة الاعداد الطبيعية ونكتب $4 \in \mathbb{N}$

العدد $4,01$ لا ينتمى الى مجموعة الاعداد الطبيعية ونكتب $4,01 \notin \mathbb{N}$

ملاحظات :

مجموعة الاعداد الطبيعية غير معدومة نرمز لها بالرمز $\mathbb{N}^*$

المجموعة $\mathbb{N}$ غير منتهية

الأعداد الصحيحة النسبية:

تعريف: مجموعة الاعداد 3-و 2- , 1- ، 0، 3،2،1 ....هي اعداد صحيحة نسبية و نرمز لها بـZ

أمثلة: العدد -12 ينتمى الى الأعداد الصحيحة النسبية ونكتب $-12 \in \mathbb{Z}$

العدد $\sqrt{12}$ لا ينتمى الى الأعدادالصحيحةالنسبيةونكتب $\sqrt{12} \notin \mathbb{Z}$

ملاحظات : كل عدد طبيعي هو عدد صحيح نسبي أي أن : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

مجموعة الاعدد الصحيحة النسبية غير معدومة نرمز لها بالرمز $\mathbb{Z}^*$

كل عدد زوجي يكتب على شكل $a = 2k$ حيث k عدد صحيح نسبي

نكل عدد فردي b يكتب على شكل $b = 2k + 1$ حيث k عدد صحيح نسبي

أمثلة: 161 هو عدد فردي لانه يكتب على شكل $161 = 2 \times 80 + 1$

-242 هو عدد زوجي لانه يكتب على شكل $-242 = 2 \times (-122) + 1$

مجموعةالأعدادالعشرية:

يعرف العدد العشري كل عدد يكتب من الشكل $\frac{p}{10^n}$ حيث $p \in Z$ و $n \in N$. نرمز لمجموعة الاعداد العشرية ب Q

مجموعةالأعدادالناطقة

العدد الناطق هو كل عدد يكتب من الشكل $\frac{p}{q}$ حيث $p \in Z; q \in Z^*$ و ترمز لمجموعة الاعداد الناطقة بـ Q

أمثلة :

الأعداد -4 , 2 , $-\frac{2}{7}$, $\frac{5}{3}$ هي أعداد ناطقة

الأعداد -4 , $\frac{2}{10^2}$, 0.06 هي اعداد عشرية لان

$-4=-\frac{40}{10}$, $0.06=\frac{6}{10^2}$

$\frac{0.9}{3}$ هو عدد ناطق لان يمكن كتابته على شكل $\frac{9}{30}$

ملاحظات :

كل عدد صحيح نسبي n هو عدد ناطق و عشري لان يمكن كتابته على شكل $\frac{n}{1}$ وشكل $\frac{n}{10^0}$

$\frac{13}{3}$ هو عدد ناطق وليس عشري لان لا يمكن كتابته على شكل $\frac{p}{10^n}$

تمرين :

من بين الأعداد التالية عين الأعداد الطبيعة والاعداد الصحيحة النسبية والأعداد العشرية :

$\sqrt{25}$, $7+2$, $4-12$, -7 , $\frac{5}{2}$, 2.12 , $\sqrt{2}$, 6

عين الأعداد الزوجية المحصورة بين 11 و 23

عين الأعداد الفردية المحصورة بين 4 و 14

حل التمرين

الأعداد الطبيعية هي : $\sqrt{25}$, $7+2$, 5 **لان** $\sqrt{25}=5$ و $7+2=9$

الأعداد الصحيحة النسبية هي : $\sqrt{25}$, $7+2$, $4-12$, -7 , 6 **لان** $\sqrt{25}=5$, $7+2=9$ و $4-12=-8$

الأعداد الناطقة هي : $\sqrt{25}$, $7+2$, $4-12$, -7 , $\frac{5}{2}$, 2.12 , , 6 **لان**

$\sqrt{25}=\frac{5}{1}$, $7+2=\frac{9}{1}$, $4-12=-\frac{8}{1}$, -7 , $\frac{5}{2}$, $2.12=\frac{212}{100}$, 6

الأعداد العشرية هي : $\sqrt{25}$, $7+2$, $4-12$, -7 , $\frac{5}{2}$, 2.12 , 6

الأعداد الزوجية المحصورة بين 11 و 23 هي : 12 , 14 , 16 , 18 , 20 , 22

الأعداد الفردية المحصورة بين 4 و 14 هي : 5 , 7 , 9 , 11 , 13

بعض الخـــــــــــــــــــــــــــــــــواص

نشاط: مقترح

1 - باستعمال الآلة الحاسبة أحسب الأعداد التالية:

$\frac{15}{7}$ ؛ $\frac{5}{6}$ ؛ $\frac{1}{2}$ ؛ $\frac{2}{3}$ **ماذا تستنتج ؟**

2- ليكن العدد الناطق $x=\frac{p}{2^n\times 5^m}$ **حيث أن** n **و** m **عددان طبيعيين**

بين ان العدد $x=\frac{p}{2^n\times 5^m}$ **يمكن كتابته على شكل** $\frac{p'}{10^n}$ **في الحالتين** $n\ge m$ **و** $n<m$

ماذا تستنتج؟

حل النشاط :

1- باستعمال الألة الحاسبة نجد :

$$\frac{15}{7}=2.5 \quad ، \quad \frac{5}{6}=0.8333333333 \quad ، \quad \frac{1}{2}=0.5 \quad ، \quad \frac{2}{3}=0.666666666666$$

نستنتج أن كل عدد ناطق يكتب بكتابة عشرية منتهة او غير منهية وتتضمن دور

2- نفرض أن $n\ge m$ **: ونضع** $n-m=\lambda$.

$x=\frac{p}{2^n\times 5^m}$ **ومنه :** $x=\frac{p}{2^n\,x\,5^m\,x\,5^{-\lambda}}$ **إذن :** $x=\frac{px\,5^{\lambda}}{10^n}$ **أي :** $x=\frac{p'}{10^n}$

- **نفرض أن** $n<m$ **: ونضع** $m-n=\lambda$

$x=\frac{p}{2^{-\lambda}\,x\,2^m\times 5^m}$ **ومنه :** $x=\frac{p}{2^m\,x\,5^m\,x\,2^{-\lambda}}$ **إذن :** $x=\frac{px\,2^{\lambda}}{10^m}$ **أي :** $x=\frac{p'}{10^m}$

نستنتج أن x عدد عشري ومنه إذا كان تحليل مقام العدد x إلى جداء عوامل أولية لا يشمل إلا العاملين 2 أو 5 فإن العدد x هو عدد عشري.

خاصية01:

يتميز كل عدد ناطق بكتابة عشرية تتضمن دورا

خاصية02:

كل عدد ناطق يقبل كتابة وحيدة على شكل كسر غير قابل للاختزال

خاصية03: الخاصية المميزة للعدد العشري

عشريا إذا وفقط إذا كان تحليل $\frac{p}{q}$ qعدد ناطق غير قابل للاختزال . يكون $\frac{p}{q}$ إلى جداء عوامل أولية لا يشمل إلا قوى 2 أو 5

أمثلة:

يتكرر في الجزء العشري) 45 ($0.\overline{45}454545$ عدد ناطق يكتب بكتابة عشرية تتضمن دور $\frac{5}{11}$

عدد عشري لان يمكن كتابته على شكل $\frac{3}{10}$ $\frac{3}{5\times 2}=\frac{3}{10}$

ليس عدد عشري لان لا يمكن كتابته على شكل $\frac{4}{11}-\frac{p}{5^n\times 2^m}$

انتقال من الكتابة العشرية الى كتابة الكسريةلعدد ناطق:

الطريقة :لانتقال من الكتابة العشرية للعدد a الى الكتابة الكسرية نتبع الخطوات التالية :
نحسب عدد ارقام الدور الموجودة في الجزء العشري وليكن مثلا n عدد ارقام الدور
نضرب العدد a في العدد 10^n
نكتب العدد $(10^n a-a)$ بطريقتين مختلفتين
باستعمال الكتابتين المختلفين للعد $(10^n a-a)$ نشكل معادلة ذات مجهول a

مثال: لنكتب العدد $58,125125125...$ على الشكل الكسري $n=3$

$$(10^n a-a)=10^3 a-a=999a$$

$$1000\times 58,\overline{125}125125-58,\overline{125}125125=58067$$

من الكتابتين نجد $999a=58067$ ومنه $a=\frac{58067}{999}$

•الأعداد الصـــــــــــــــــــــــــــــماء:

النشاط: استعمل الآلة الحاسبة وأعط الكتابة العشرية للعدد $\sqrt{2}$. هل العدد $\sqrt{2}$ عدد ناطق؟

مناقشة النشاط:

العدد $\sqrt{2}$ عدد غير ناطق لأن $\sqrt{2}=1.4142135623731$ يتميز بكتابة عشرية غير دورية (أي جزوه العشري لا يحتوي على دور).
نقول أن العدد $\sqrt{2}$ عدد أصم.

تعريف العدد الأصم: العدد الأصم هو كل عدد حقيقي غير ناطق

مثال: $\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{7}$ أعداد صماء .

$\pi,2\pi$ أعداد صماء.

هل الأعداد التالية -3 $\left(\sqrt{2}+1\right)^2$, $\sqrt{49}$, $\pi-3.14$, $\frac{\sqrt{8}}{2\sqrt{2}}$ أعداد صماء؟

•مجموعة الأعداد الحقيقية:

مناقشة نشاط: يمثل التلميذ النقط على مستقيم عددي, كما يستعمل نظرية	نشاط:مثل على مستقيم مزود بمعلم

النقط الممثلة بالأعداد التالية $(o;\vec{i})$: $-2, 2\pi, \frac{8}{3}, \sqrt{5}, -\frac{3}{2}$. هل توجد أعداد لا يمكن تمثيلها على مستقيم عددي ؟	طاليس لتمثيل النقط المرفقة بكسور. ويستنتج أن كل الأعداد يمكن تمثيلها على مستقيم عددي.

تعريف: مجموعة الأعداد الحقيقية،P ، هي مجموعة فواصل نقط مستقيم عددي مزود بمعلم.

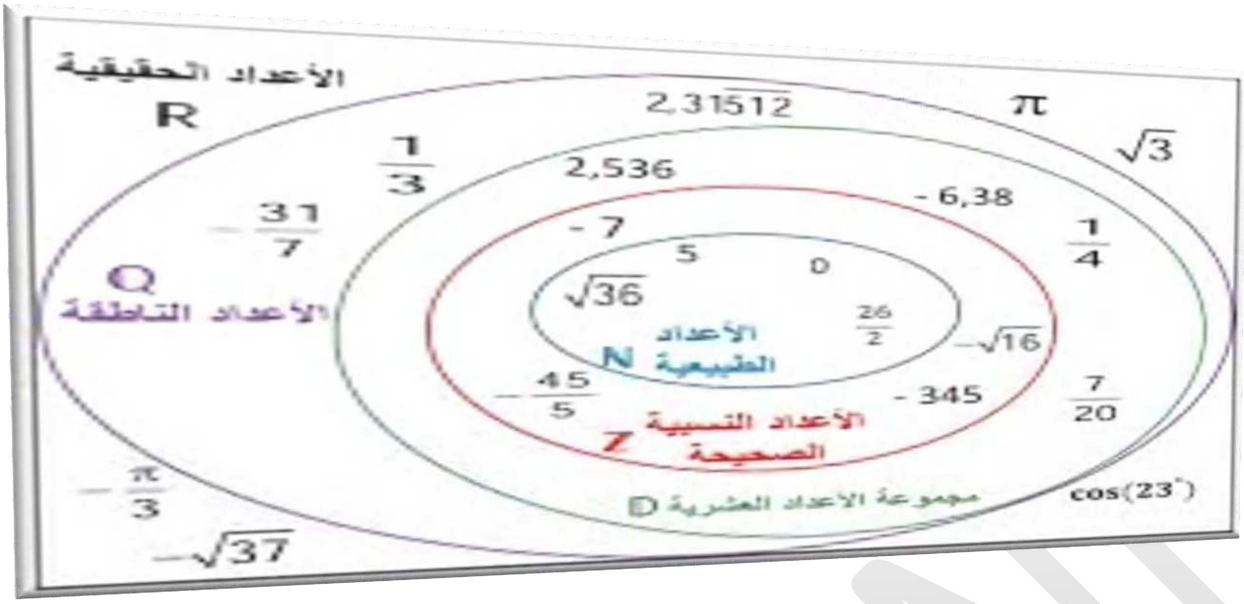
ملاحظة 1: نرمز إلى مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة بالرمز $\mathbb{R}^+$ وإلى مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة بالرمز $\mathbb{R}^-$.	**ملاحظة 2:** 0 عنصر من $\mathbb{R}^+$ ومن $\mathbb{R}^-$.	**ملاحظة 3:** نعني بالرمز $\mathbb{R}^*$ مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا الصفر.

• مقارنة مجموعات الأعداد

خاصية : تحقق المجموعات العددية الاحتواءات الآتية: $N \subset Z, Z \subset D, D \subset Q, Q \subset R$

ملاحظة 1:

تتوقف طبيعة العدد على أصغر مجموعة ينتمي إليها



مثال: لدينا $\frac{\sqrt{64}}{4} \in \square$, لكن $\frac{\sqrt{64}}{4} = \frac{8}{4} = 2, 2 \in \square$ إذن $\frac{\sqrt{64}}{4} \in \square$.

الجـــــــــــــــــــــــــــــــذور التربيعية :

♦ **تعريف:**

تعريف : a عدد حقيقي موجب .نسمي الجذر التربيعي للعدد الحقيقي a ، العدد الحقيقي الموجب الذي مربعه يساوي a ونرمز إليه بالرمز $\sqrt{a}$

➢ **أمثلة :** $\sqrt{0.25} = 0.5,, \sqrt{100} = 10$

➢ **خواص:** من أجل b,a عددان حقيقيان مو جبان و b غير معدوم و نكتب :

1. $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a, \sqrt{a} \geq 0$
2. $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
3. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
4. $\sqrt{a^2 \times b^2} = a \times b$

$\sqrt{a^2} = a$

➢ **أمثلة :** $\sqrt{15} = \sqrt{5} \times \sqrt{3}, (\sqrt{3})^2 = 3$ ، $\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}$

طرائق :

➢ تحويل عبارة تتضمن جذورا

➢ مثال

1. أنشر الأعداد الحقيقية التالية : $A=(1+\sqrt{2})^2$ و $B=(1-\sqrt{2})^2$

2 . أحسب مايلي : $C=\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{3+2\sqrt{2}}$

- تحويل نسبة يتضمن مقامها جذورا إلى نسبة مقامها عدد ناطق

الحساب على القوى الصحيحة في شتى العمليات الرياضية

القوى الصحيحة:

- تعريف :

ليكن a عدد حقيقي كيفي و n عدد طبيعي غيرمعدوم. نسمي القوة ذات الرتبة n للعدد الحقيقي a، العدد a^n حيث :
$a^n=\underbrace{a\times a\times a\times a.....\times a}_{n}$.

- من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم a و n عدد طبيعي ، $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$.

- اصطلاح : نصطلح أنه : من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم a ، $a^0=1$
- أمثلة : $10\times10\times10=10^3$ $\quad 10^{-3}=0.001=\frac{1}{1000}=\frac{1}{10^3}$
- خواص: a,b عددان حقيقيان عير معدومين ، n,m عددان صحيحان نسبيان

تمرين:

أكتب العبارات التالية على أبسط شكل ممكن :

- $A=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}+\sqrt{\frac{5}{2}}-\frac{7}{3+\sqrt{5}}+\frac{21}{4}-\sqrt{6}$
- $B=\sqrt{75}+\sqrt{432}-\frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}}$

تمرين رقم: 34 / 35 ص 20

خـــــــــــــــــواص

$(a.b)^n=a^n\times b^n$

$(a^n)^m=a^{n\times m}$

$a^n\times a^m=a^{n+m}$

$\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$

أمثلة : $2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}, 2^{-3\times5}=(2^{-3})^5=\frac{1}{8^5}$ ،

$3^3\times2^3=(3\times2)^3$ ، $\left(\frac{5}{3}\right)^{-5}=\frac{5^{-5}}{3^{-5}}=\frac{3^5}{5^5}=\left(\frac{3}{5}\right)^5$

• **حالات خاصة:**

1. من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم a و n عدد طبيعي غير معدوم: $a^{n-n} = a^0 = 1$
2. من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم:
   - إذا كان n زوجيا فإن: $(-1)^n = 1$
   - إذا كان n فرديا فإن: $(-1)^n = -1$

✓ **(الأعداد الأولية)**

➢ تعريف :

نسمّي عددا أوليا كلّ عدد طبيعي يقبل، بالضبط، قاسمين مختلفين هما : 1 و العدد نفسه.

• أمثلة و نماذج :

تحليل عدد إلى جداء عوامل أولية :

مبرهنة

كل عدد طبيعي غير أولي اكبر من 2 يمكن كتابته على شكل جداء عوامل أولية

ترميز

نرمز للقاسم المشترك الاكبر لعددين طبيعين بالرمز PGCD
نرمز للمضاعف المشترك الاصغر لعددين طبيعين بالرمز PPCM

مثال

* $42 = 2 \times 3 \times 7$

$120 = 2^3 \times 3 \times 5$

$$* \quad 180000 = 18 \times 10000$$

$$= 2 \times 3^2 \times 10^4$$

$$= 2 \times 3^2 \times (2 \times 5)^4$$

$$= 2 \times 3^2 \times 2^4 \times 5^4 \quad = 2^5 \times 3^2 \times 5^4$$

تعيين القاسم المشترك الاكبر للعددين 42 و 120

$PGCD(42,120)=2\times3=6$

$PPCM(42,120) = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7$

• اختبار أولية عدد طبيعي

مثال هل العدد 197 أوليّ ؟

طريقة

نختبر قابلية قسمة العدد على كلّ من الأع داد الأولية حسب ترتيبها التصاعدي.

نتوقف عن عمليات القسمة عند أوّل باق معدوم أو عندما نصادف أوّل حاصل قسمة أصغر من المقسوم عليه.

نستخلص: إذا صادفنا الباقي المعدوم يكون العدد غير أولي وإلاّ فهو أولي.

الحل

- **العدد 197 لا يقبل القسمة على كلّ من 2 و3 و5.**
- **نختبر إن كان العدد 197 يقبل القسمة على الأعداد الأولية حسب ترتيبها في قائمة الأعداد الأولية الأولى:**

هل يقبل العدد القسمة على	2	3	5	7	11	13
	لا	لا	لا	لا	لا	لا

- نقسم 197 على العدد الأولي 17. نجد $197 \div 17 \approx 11$.

وباعتبار $17 > 11$، ننهي عمليات القسمة. نستخلص، العدد 197 أولي.

تمرين حلل إلى جداء عوامل أولية العددين: 224 ، 648. اختزل الكسر $\frac{224}{648}$

✓ القيم المظبوطة و القيم المقربة :

مُدوّ ر عدد حقيقي •

➢ تعريف :

A عدد حقيقي مكتوب في شكله العشري، وليكن d رقمه العشري ذو الرتبة.نسمّي مُدوّر A إلى 10^{-p} العدد الذي نحصل عليه كما يلي:

- إذا كان $d \geq 5$ ، نأخذ العدد بأرقامه العشرية إلى الرقم العشري الذي رتبته p ، ونضيف1 إلى هذا الرقم.
- إذا كان $d <$ 5 ، نأخذ العدد بأرقامه العشرية إلى الرقم العشري الذي رتبته p .

• أمثلة و نماذج :

	المدوّر إلى الوحدة	المدوّر إلى 10^{-3}	المدوّر إلى 10^{-5}
141592653589793	3	3.142	3.14159

➢ الكتابة العلمية:

<u>مبرهنة</u> كتابة عدد عشري على الشكل العلمي، تعني التعبير عنه على الشكل (او) حيث عدد عشري يحقق $1 \leq a < 10$ و عدد صحيح نسبي.

رتبة مقدار عدد

لإيجاد رتبة مقدار عدد:

- **نكتب العدد على الشكل العلمي.**
- **ندوّر العدد العشري في كتابته العلمية إلى العدد الصحيح الأقرب منه ونحتفظ بقوة 10.**

✓ حساب رتبة مقدار جداء و حاصل قسمة

لتعيين رتبة مقدار لجداء اعداد

- **نعين كل حد في الجداء على الشكل العلمي**
- **ندور كلا من هذه الاعداد العشرية في هذه الكتابات العلمية الئ العدد الصحيح الاقرب**
- **بعد الكتابة على الشكل العلمي وتدويره نتحصل على رتبة مقدار**

الاعداد والحاسبة:

- تمثيل الأعداد في الحاسبة :

نتعامل مع العدد بثلاثة انواع و هي -

-القيمة المضبوطة - القيمة الظاهرة - القيمة المخزنة

<u>مثال1 :</u>

عند استعمال الحاسبة العلمية التي لها سعة إظهار النتائج بعشرة ارقام فقط ,بالنسبة ل $\sqrt{2}$ نجد

القيمة المضبوطة$\sqrt{2}$

القيمة الظاهرة$1,414213562$

القيمة المخزنة$1,4142136237$

2-تنظيم حساب باليد او بالحاسبة :

عند إجراء حساب ما، نتبع عادة الخطوات التالية احتراما لأولويات العمليات حيث ننجز على التوالي:

- ✓ الحسابات داخل الأقواس.
- ✓ الحسابات المتعلقة بالقوى والجذور التربيعية.
- ✓ عمليات الضرب والقسمة حسب ترتيب كتابتها.
- ✓ عمليات الجمع والطرح حسب ترتيب كتابتها.

مثال2 :

كتابة برنامج حساب العددبالحاسبة $\frac{2\times10^{-2}}{3-0,5}$ هو كالتالي :

2	×	1	0	^	(-)	2	÷	(	3	-	0	.	5	)

تمرين

1- احسب باليد كلا من: $A=(-15+8)\times2+10$ ؛ $B=\frac{9\times2-10}{12-8}$

2- باستخدام حاسبة علمية احسب كلا من $A=(-15+8)\times2+10$ و $B=\frac{9\times2-10}{12-8}$

حل تمرين

-1 $A=(-15+8)\times2+10=(-7)\times2+10=-4$, $B=\frac{-2}{4}$

-2

باستعمال الحاسبة البيانية

(	-	15	+	8	)	×	2	10	=

9	×	2	-	10	÷	(	12	-	8	)	=