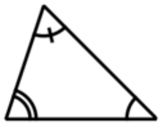
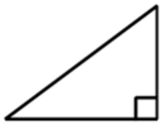
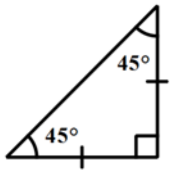
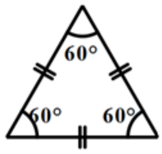
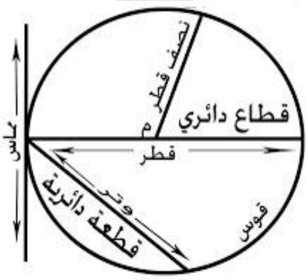
الهندسة المستوية

Prof Mustapha
KHALDI

I. المثلثات

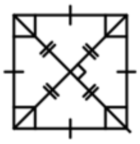
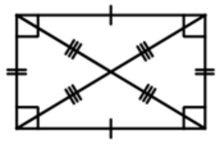
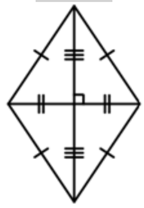
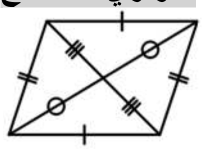
	الشكل	خواصه
المثلثات	المثلث الكيفي 	❶ مجموع زواياه الداخلية = $180°$ ❷ مجموع زواياه الخارجية = $360°$
	المثلث القائم 	❶ مجموع زواياه = $180°$ ❷ له ضلعان متعامدان ❸ لديه زاوية قائمة = $90°$ ❹ مربع الوتر = مجموع مربع الضلعان القائمان ❺ طول المتوسط المتعلق بالوتر = نصف طول الوتر (الوتر هو أكبر ضلع و يقابل الزاوية القائمة)
	المثلث متساوي الساقين 	❶ مجموع زواياه = $180°$ ❷ له ضلعان متقايسان ❸ زاويتا القاعدة متقايستان ❹ الارتفاع المتعلق بالقاعدة هو منصف زاوية الرأس ويقطع القاعدة في المنتصف
	المثلث القائم ومتساوي الساقين 	❶ مجموع زواياه = $180°$ ❷ له ضلعان متعامدان و متقايسان ❸ لديه زاوية قائمة = $90°$ ❹ زاويتا القاعدة متقايستان = $45°$ ❺ مربع الوتر = مجموع مربع الضلعان القائمان ❻ الارتفاع المتعلق بالوتر هو منصف الزاوية القائمة ويقطع الوتر في المنتصف
	المثلث متقايس الأضلاع 	❶ مجموع زواياه = $180°$ ❷ كل أضلاعه متقايسة ❸ كل زواياه متقايسة = $60°$ ❹ كل الارتفاعات تنصف الزاوية المنطلقة منها وتقطع الضلع المقابل لها في المنتصف

II. الدائرة

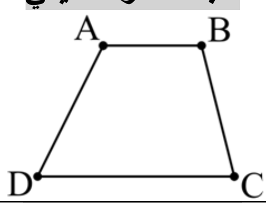
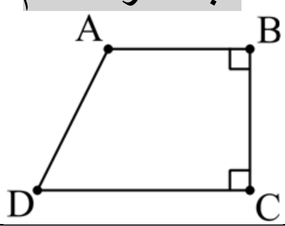
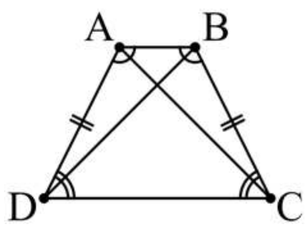
الدائرة	
	❶ الدائرة تشكل زاوية قدرها $360°$ ❷ إذا كان AB قطر للدائرة و M نقطة من محيط الدائرة فإن ABM مثلث قائم في M (مهما كان موضع M) ❸ جميع أقطارها متساوية ❹ جميع أنصاف أقطارها متساوية

Prof Mustapha
KHALDI

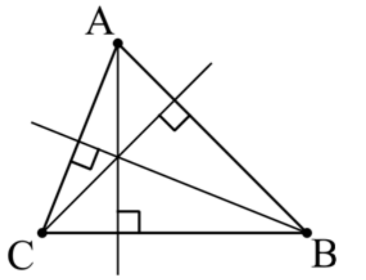
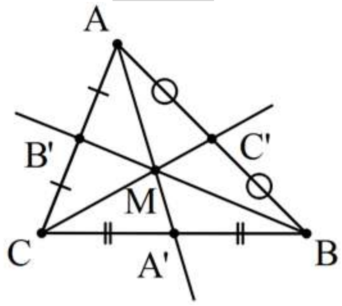
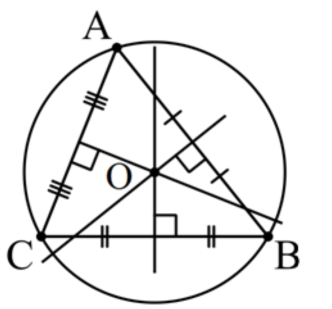
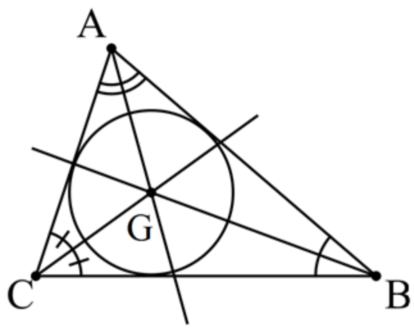
III. متوازيات الأضلاع

	الشكل	خواصه وشروطه
متوازيات الأضلاع	المربع 	❶ كل ضلعان متقابلان متوازيان ❷ كل أضلاعه متقايسة ❸ له أربع زوايا قائمة ❹ قطراه متساويان ❺ قطراه متعامدان ❻ قطراه متناصفان ❼ كل قطر ينصف الزاويتين المتعلق بهما
	المستطيل 	❶ كل ضلعان متقابلان متوازيان ❷ كل ضلعان متقابلان متقايسان ❸ له أربع زوايا قائمة ❹ قطراه متساويان ❺ قطراه متناصفان
	المعين 	❶ كل ضلعان متقابلان متوازيان ❷ كل أضلاعه متقايسة ❸ كل زاويتان متقابلتان متقايستان ❹ قطراه متعامدان ❺ قطراه متناصفان ❻ كل قطر ينصف الزاويتين المتعلق بهما
	متوازي الأضلاع 	❶ كل ضلعان متقابلان متوازيان ❷ كل ضلعان متقابلان متقايسان ❸ كل زاويتان متقابلتان متقايستان ❹ قطراه متناصفان ❺ ضلعان متقابلان متقايسان ومتوازيان

IV. الشبه منحرف

	الشكل	خواصه	خ مشتركة
الشبه منحرف	شبه منحرف كيفي 	❶ القاعدتين متوازيتين غير متساويتين ❷ الساقان غير متوازيان وغير متساويان ❸ مجموع زواياه $= 360^\circ$	• $C\hat{D}A + D\hat{A}B = 180^\circ$ • $A\hat{B}C + B\hat{C}D = 180^\circ$
	شبه منحرف القائم 	❶ القاعدتين متوازيتين غير متساويتين ❷ الساقان غير متوازيان وغير متساويان له زاويتان قائمتان ❸ مجموع زواياه $= 360^\circ$	
	شبه منحرف متساوي الساقين 	❶ القاعدتين متوازيتين غير متساويتين ❷ الساقان متساويان غير متوازيان ❸ قطراه متقايسان ❹ زاويتي القاعدة الكبرى متقايستين ❺ زاويتي القاعدة الصغرى متقايستين ❻ مجموع زواياه $= 360^\circ$	

V]. المستقيمات الخاصة في مثلث

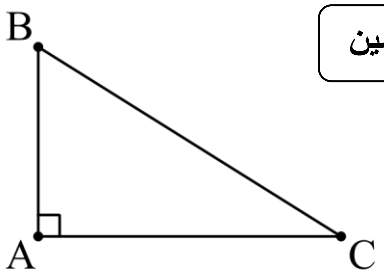
المستقيم	خواصه
الإرتفاع 	• الإرتفاع في مثلث هو المستقيم الذي يشمل أحد رؤوس المثلث ويعامد الضلع المقابل.
المتوسط 	❶ المتوسط في مثلث هو المستقيم الذي يشمل أحد رؤوس المثلث ومنتصف الضلع المقابل. ❷ نقطة تقاطع متوسطات مثلث هي مركز ثقل المثلث ❸ $\boxed{MC = 2MC'}$; $\boxed{MB = 2MB'}$; $\boxed{MA = 2MA'}$
المحور 	❶ المحور في مثلث هو المستقيم الذي يعامد أحد أضلاعه في المنتصف وليس شرط أن يشمل الرأس المقابل ❷ نقطة تقاطع محاور مثلث هي مركز الدائرة المحيطة بهذا المثلث (التي تشمل رؤوسه) ❸ $\boxed{OA = OB = OC}$
المنصف 	❶ المنصف في مثلث هو منصف إحدى زواياه ❷ نقطة تقاطع منصفات مثلث هي مركز الدائرة المرسومة داخل هذا المثلث (التي تمس أضلاعه)

Prof Mustapha
KHALDI

Prof Mustapha
KHALDI

VI]. مبرهنة فيتاغورس وعكسها

1) مبرهنة فيتاغورس



في المثلث القائم: مربع الوتر = مجموع مربع الضلعين القائمين

أي: $(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$

نستنتج أن:

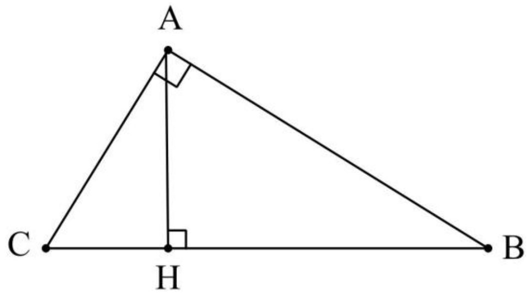
- $(AB)^2 = (BC)^2 - (AC)^2$
- $(AC)^2 = (BC)^2 - (AB)^2$

2) المبرهنة العكسية لفيتاغورس

إذا كان مربع الضلع الأكبر= مجموع مربع الضلعان الآخران فإن هذا المثلث قائم حسب المبرهنة العكسية لفيتاغورس

أي إذا كان: $(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$ فإن ABC مثلث قائم في A حسب المبرهنة العكسية لفيتاغورس

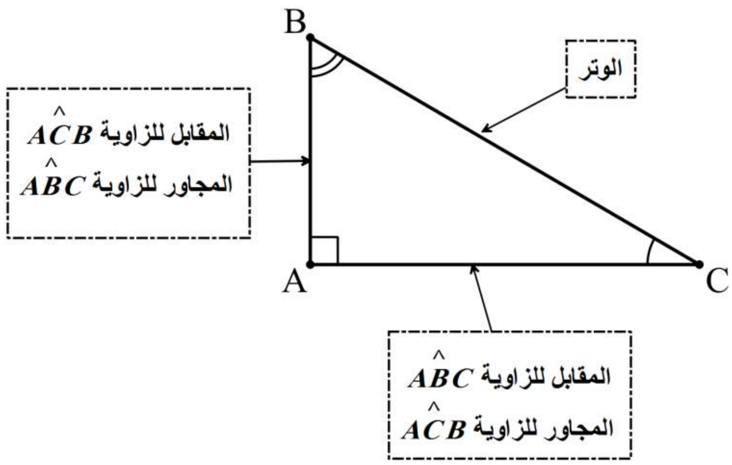
3) خواص الارتفاع في مثلث قائم



- $\boxed{AB \times AC = AH \times BC}$
- $\boxed{AB^2 = BH \times BC}$
- $\boxed{AC^2 = CH \times CB}$
- $\boxed{AH^2 = HC \times HB}$

VII]. النسب المثلثية في المثلث القائم

$$\boxed{\sin x = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}} \quad ; \quad \boxed{\cos x = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}} \quad ; \quad \boxed{\tan x = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}}$$



$$\sin A\hat{B}C = \frac{AC}{BC}$$

$$\cos A\hat{B}C = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan A\hat{B}C = \frac{AC}{AB}$$

العلاقات بين النسب المثلثية:

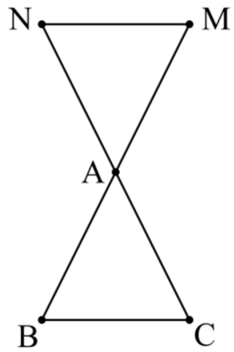
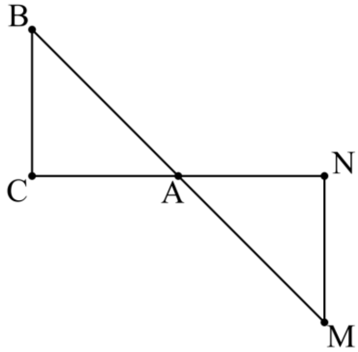
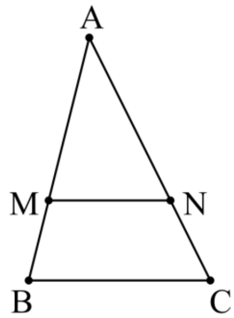
$$\boxed{\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}} \quad ; \quad \boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$$

sin : جب
cos : تجب
tan : ظل
x: زاوية

- ✓ ملاحظة 1: قيمة sin و قيمة cos دائما أصغر من 1 و أكبر من 0
- ✓ ملاحظة 2: في المثلث القائم قيم sin, cos و tan دائما **موجبة**

VIII]. مبرهنة طالس و عكسها

في كل من الأشكال التالية لدينا $(BC) \mathbin{/\!/} (MN)$ مما يعني إمكانية تطبيق مبرهنة طالس:

1) مبرهنة طالس (المباشرة):

بما أن $(BC) \mathbin{/\!/} (MN)$ حسب مبرهنة طالس لدينا: $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$

2) المبرهنة العكسية لطالس: (إثبات التوازي)

من المعطيات نختار كسرين متناسبين مثلا $\dfrac{AM}{AB}$ و $\dfrac{MN}{BC}$ ونحسب قيمة كلا منهما

نقول: بما أن $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{AM}{AB}$ و النقط A, M, B و A, N, C بنفس الترتيب على استقامية فإن

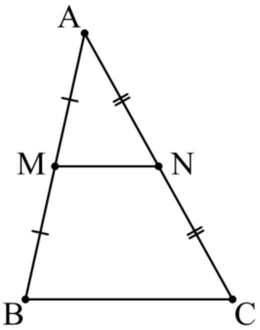
$(BC) \mathbin{/\!/} (MN)$ حسب المبرهنة العكسية لطالس

3) خاصية مستقيم المنتصفين (المباشرة):

القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين فى مثلث توازي الضلع الثالث وطولها يساوي نصفه

إذا كانت M و N منتصفي $[AB]$ و $[AC]$ على الترتيب فإن:

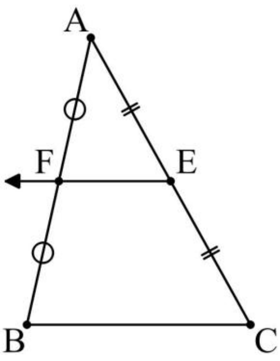
- $(MN) \mathbin{/\!/} (BC)$
- $MN = \frac{1}{2}BC$ أي $BC = 2MN$



4) الخاصية العكسية لمستقيم المنتصفين:

المستقيم المرسوم من منتصف ضلع في مثلث موازيًا أحد الضلعين الآخرين ينصف الضلع الثالث

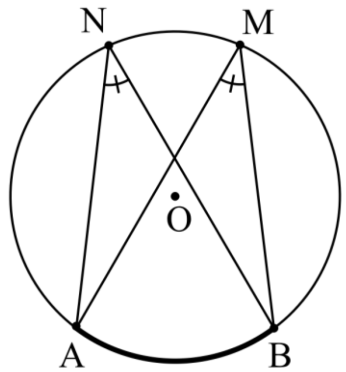
إذا كان E منتصف $[AC]$ و $(FE) \mathbin{/\!/} (BC)$ فإن F منتصف $[AB]$



Prof Mustapha
KHALDI

IX]. الزاوية المحيطية والزاوية المركزية

1) مراجعة

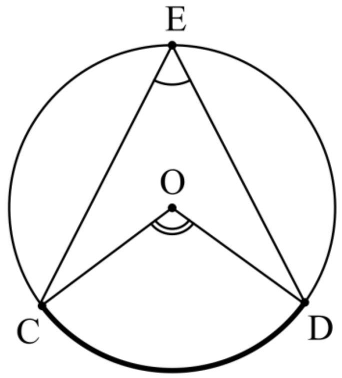


القاعدة1:

❖ الزاويتان المحيطيتان اللتان تحصران نفس القوس متقايستان

مثال1:

الزاويتان المحيطيتان $A\widehat{M}B$ و $A\widehat{N}B$ متقايستان لأنهما تحصران نفس القوس $\widehat{AB}$



القاعدة2:

إذا كانت زاوية مركزية و زاوية محيطية تحصران نفس القوس فإن:

❖ الزاوية المركزية = ضعف الزاوية المحيطية

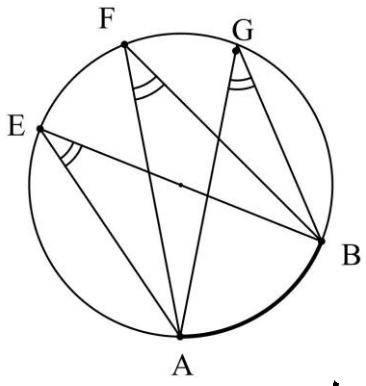
❖ الزاوية المحيطية = نصف الزاوية المركزية

مثال2:

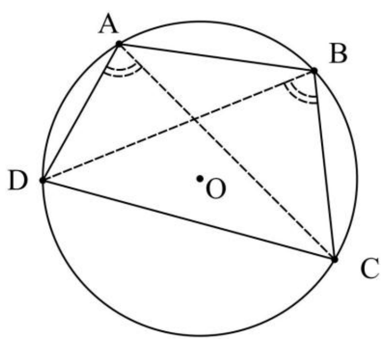
الزاوية المركزية $C\widehat{O}D$ و الزاوية المحيطية $C\widehat{E}D$ تحصران نفس القوس $\widehat{CD}$ إذن:

$C\widehat{O}D = 2\,C\widehat{E}D$ و $C\widehat{E}D = \frac{1}{2}\,C\widehat{O}D$

2) نتائج



❶ الزوايا المحيطية التي تحصر نفس القوس أو تحصر أقواسا متقايسة تكون متقايسة



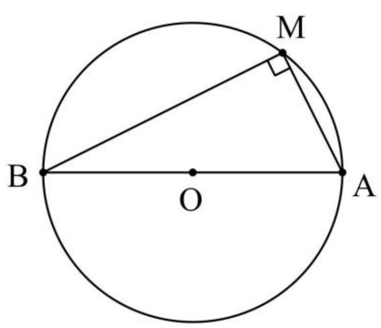
❷ تكون رؤوس الرباعي المحدب $ABCD$ من نفس الدائرة إذا تحقق أحد الشرطين:

➤ إما $D\widehat{B}C = D\widehat{A}C$ (زاويتان محيطيتان تجصران نفس القوس $\widehat{DC}$)

➤ أو $B\widehat{C}D + B\widehat{A}D = 180°$ (زاويتان متقابلتان متكاملتان)

❸ خاصية المثلث القائم في الدائرة:

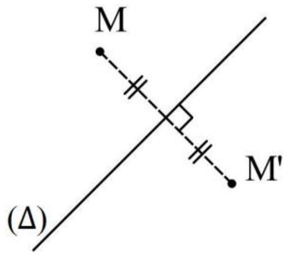
إذا كان AB قطر لدائرة و M نقطة من محيط هذه الدائرة فإن المثلث ABM قائم في M مهما كان موضع M



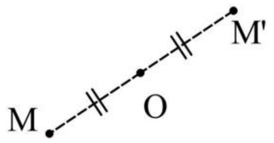
Prof Mustapha

KHALDI

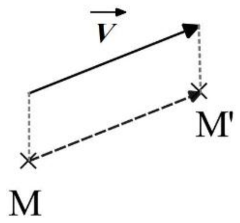
X]. التحويلات النقطية



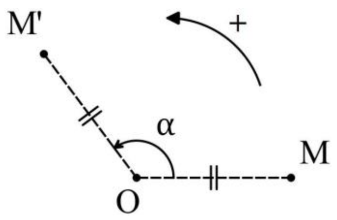
❶ **التناظر المحوري:** هو تحويل نقطي بالنسبة لمحور (Δ) يرفق بكل نقطة $\boldsymbol{M}$ النقطة $\boldsymbol{M'}$ حيث (Δ) **محور** $[\boldsymbol{MM'}]$ (أي (Δ)عمودي على $[MM']$ في منتصفها).



❷ **التناظر المركزي:** هو تحويل نقطي بالنسبة لنقطة $\boldsymbol{O}$ يرفق بكل نقطة $\boldsymbol{M}$ النقطة $\boldsymbol{M'}$ حيث $\boldsymbol{OM} = \boldsymbol{OM'}$ (أي $\boldsymbol{O}$ منتصف$[MM']$).



❸ **الانسحاب:** هو تحويل نقطي يرفق بكل نقطة $\boldsymbol{M}$ النقطة $\boldsymbol{M'}$ حيث بشعاع $\vec{\boldsymbol{v}}$ يرفق بكل نقطة $\boldsymbol{M}$ النقطة $\boldsymbol{M'}$ حيث $\overrightarrow{\boldsymbol{MM'}} = \vec{\boldsymbol{v}}$



❹ **الدوران:** هو تحويل نقطي وفق مركز O و زاوية $\boldsymbol{\alpha}$ واتجاه يرفق بكل نقطة $\boldsymbol{M}$ النقطة $\boldsymbol{M'}$ حيث $\boldsymbol{OM'} = \boldsymbol{OM}$ و $\boldsymbol{M\hat{O}M'} = \boldsymbol{\alpha}$ والاتجاه الموجب عكس اتجاه عقارب الساعة.

XI]. خواص التحويلات النقطية

❶ **النقطة الصامدة:** نقول عن نقطة إنها صامدة بواسطة تحويل نقطي، إذا كانت منطبقة على صورتها بهذا التحويل.

❷ **حفظ المسافات (التقايس)**

يحافظ كلا من التناظر المركزي والتناظر المحوري والانسحاب والدوران على المسافات لذلك نسمي هذه التحويلات عامة **بالتقايس**

✱**صورة بتقايس:** هي صورة بالتناظر المركزي أو بالتناظر المحوري أو بالانسحاب أو بالدوران

❸ **الحفاظ على الاستقامية**

إذا كانت A، B، C ثلاث نقاط في استقامية فإن صورها A'، B'، C' **بتقايس** تكون في استقامية

❹ **الحفاظ على أقياس الزوايا**

صورة زاوية **بتقايس** هي زاوية تقايسها

➤ **استنتاج:**

- صورتي مستقيمان متوازيان **بتقايس** هما مستقيمان متوازيان
- صورتي متعامدان متوازيان **بتقايس** هما مستقيمان متعامدان

Prof Mustapha
KHALDI