مجلة العبقري في الرياضيات (الترتيب -المجالات -القيمة المطلقة)

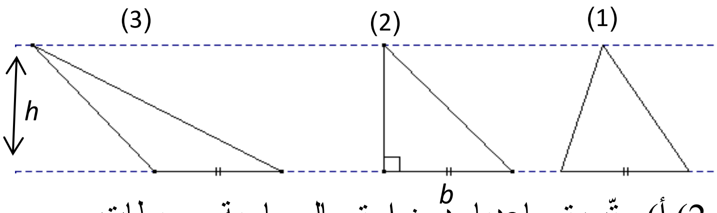
الملخص // الشعبة: الأولى جذع مشترك علوم وتكنولوجيا.

دروس: حول التّرتيب -المجالات- القيمة المطلقة// التحضير الجيد للبكالوريا// الشعبة: 01 ع.

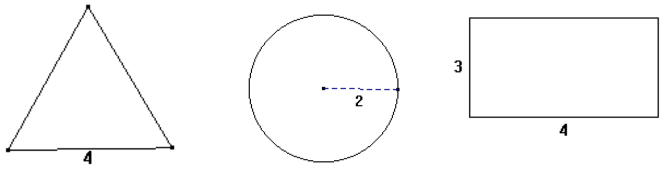
❶ الترتيب في مجموعة الأعداد الحقيقية:

النشاط 01 ص25:

1) قارن مساحات المثلثات الآتية ذات نفس القاعدة b والمرسومة على شريط عرضه h:



2) أ) رتّب تصاعديا، دون استعمال حاسبة، محيطات المستطيل والدائرة والمثلث المتقايس الأضلاع الآتية:



ب) نفس السؤال السّابق مع استبدال المحيطات بالمساحات.

حل النشاط:

1) **مقارنة مساحات المثلثات:**

تذكير:

$$\text{مساحة مثلث} = \frac{\text{الإرتفاع} \times \text{طول القاعدة}}{2} = \frac{1}{2}(\text{طول القاعدة} \times \text{الإرتفاع})$$

إذن: المثلثات متساوية من حيث المساحة $\boxed{S_1 = S_2 = S_3}$

لأنّ: لها نفس طول القاعدة b والارتفاع h.

2) **أ) ترتيب تصاعديا، دون استعمال حاسبة، محيطات المستطيل والدائرة والمثلث المتقايس الأضلاع:**

ليكن P_1 محيط المستطيل، وَ P_2 محيط الدائرة، وَ P_3 محيط المربع؛ نجد:
$$\begin{cases} P_1 = (3+4)\times 2 = 14 \\ P_2 = 2\times(2\pi) = 4\pi \\ P_3 = 4\times 3 = 12 \end{cases}.$$

إذن: $\boxed{P_3 < P_2 < P_1}$.

ب) ترتيب تصاعديا، دون استعمال حاسبة، مساحات المستطيل والدائرة والمثلث المتقايس الأضلاع:

ليكن S_1 مساحة المستطيل، وَ S_2 مساحة الدائرة، وَ S_3 مساحة المربع؛ نجد:
$$\begin{cases} S_1 = 3\times 4 = 12 \\ S_2 = \pi 2^2 = 4\pi \\ S_3 = \frac{4\times 2\sqrt3}{2} = \frac{8\sqrt3}{2} = 4\sqrt3 \end{cases}.$$

إذن: $\boxed{S_3 < S_1 < S_2}$.

النشاط 02 ص25:

1) رتّب تصاعديا الأعداد الآتية:

$\frac{14}{5}$؛ $2{,}82$؛ $2{,}732$؛ $2{,}73\times 10^{-2}$؛ $1+\sqrt3$.

2) قارن، دون استعمال حاسبة، مع التبرير.

$\frac{9}{11}$ و $\frac{7}{11}$؛ $\frac{13}{21}$ و $\frac{13}{23}$؛ $\frac{2}{3}$ و $\frac{5}{8}$؛ $0{,}25^2$ و $1{,}25^2$؛ $\frac{1}{\sqrt5}$ و $\frac{1}{2}$.

3) قارن العددين A و B، دون استعمال حاسبة، مع التبرير.

$A = \frac{3}{2}\times\frac{5}{3}$ و $B = \frac{3}{2}\times\frac{3}{5}$؛ $A = -\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}$ و $B = -\frac{3}{4}\times\frac{7}{5}$.

حل النشاط:

1) **ترتيب تصاعديا الأعداد:**

لدينا:

$\frac{14}{5} = 2{,}8000$؛

$2{,}82 = 2{,}8200$؛

$2{,}732 = 2{,}7320$؛

$2{,}73\times 10^{-2} = 0{,}0273$؛

$1+\sqrt3 \simeq 2{,}7321$.

إذن: $\boxed{2{,}73\times 10^{-2} < 2{,}732 < 1+\sqrt3 < \frac{14}{5} < 2{,}82}$.

2) **المقارنة، دون استعمال حاسبة، مع التبرير:**

$\boxed{\frac{7}{11} < \frac{9}{11}}$؛

لأنّ: **الكسرين موجبين ولهما نفس المقام** و $7 < 9$.

$\boxed{\frac{13}{21} > \frac{13}{23}}$؛

لأنّ: **الكسرين موجبين ولهما نفس البسط** و $21 < 23$.

$\boxed{\frac{2}{3} > \frac{5}{8}}$؛ لأنّه: لدينا: $\begin{cases} \frac{2}{3} = \frac{16}{24} \\ \frac{5}{8} = \frac{15}{24} \end{cases}$، وَ $15 < 16$.

أو لأنّه: لدينا: $\begin{cases} \frac{2}{3} = \frac{10}{15} \\ \frac{5}{8} = \frac{10}{16} \end{cases}$، وَ $15 < 16$.

$\boxed{0{,}25^2 < 1{,}25^2}$؛

لأنّ: $0{,}25$ وَ $1{,}25$ **موجبين** و $0{,}25 < 1{,}25$.

$\boxed{\frac{1}{\sqrt5} < \frac{1}{2}}$؛

لأنّ: 2 وَ $\sqrt5$ **من نفس الإشارة** و $\sqrt4 = 2 < \sqrt5$.

3) مقارنة العددين A و B، دون استعمال حاسبة، مع التبرير:

الحالة الأولى: $A=\frac{3}{2}\times\frac{5}{3}$ و $B=\frac{3}{2}\times\frac{3}{5}$.

بمأنّ: $\begin{cases}\frac{3}{5}<1\\ \frac{5}{3}>1\end{cases}$، فإنّ: $\frac{5}{3}>\frac{3}{5}$؛ **وبضرب** الطرفين في **نفس العدد الموجب** $\frac{3}{2}$ نجد: $\frac{3}{2}\times\frac{5}{3}>\frac{3}{2}\times\frac{3}{5}$؛ أي: $\boxed{A>B}$.

الحالة الثانية: $A=-\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}$ و $B=-\frac{3}{4}\times\frac{7}{5}$.

بمأنّ: $\begin{cases}\frac{5}{7}<1\\ \frac{7}{5}>1\end{cases}$، فإنّ: $\frac{5}{7}<\frac{7}{5}$؛ **وبضرب** الطرفين في **نفس العدد السالب** $\left(-\frac{3}{4}\right)$ نجد: $-\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}>-\frac{3}{4}\times\frac{7}{5}$؛ أي: $\boxed{A>B}$.

تعريف 01:

a وَ b عددان حقيقيان.

- القول أنّ **a أكبر من b أو يساويه** معناه **الفرق $a-b$ عدد موجب**، ونكتب: $a\geq b$.

ملاحظات:

- $a\geq b$ معناه $a-b\geq 0$ أي: $(a-b)\in\mathbb{R}^{+}$.
- $a>b$ معناه $a-b>0$ أي: $(a-b)\in\mathbb{R}_{+}^{*}$.
- $a\leq b$ معناه $a-b\leq 0$ أي: $(a-b)\in\mathbb{R}^{-}$.
- $a<b$ معناه $a-b<0$ أي: $(a-b)\in\mathbb{R}_{-}^{*}$.
- إذا كان $a>0$ وَ $b<0$ فإنّ $a>b$؛ والعكس غير صحيح **(المقارنة باستعمال الإشارة)**

مثال: (● نبيان أنّ: $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2>2\sqrt{6}$)

لدينا: $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2-2\sqrt{6}=3+2+2\sqrt{6}=5>0$

أي: $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2-2\sqrt{6}>0$

إذن: $\boxed{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2>2\sqrt{6}}$ (و هو المطلوب).

تعريف 02:

مقارنة عددين a وَ b معناه **التصريح بصحة** إحدى الحالات الثلاث الآتية:

① $a>b$ ② $a<b$ ③ $a=b$

تطبيق: تمرين 18 ص43

1) بفرض a عدد حقيقي كيفي، قارن العددين الحقيقيين (a^2-8a) وَ (-16).

2) استنتج دون استعمال الحاسبة، مقارنة العددين الحقيقيين $\left(2-8\sqrt{2}\right)$ وَ (-16).

الحل:

1) a عدد حقيقة كيفي، مقارنة العددين الحقيقيين (a^2-8a) وَ (-16):

لدينا:
$$(a^2-8a)-(-16)=a^2-8a+16$$
$$=a^2-2(4)a+4^2$$
$$=(a-4)^2\geq 0$$

أي: $(a^2-8a)-(-16)\geq 0$

إذن: $\boxed{(a^2-8a)\geq(-16)}$.

لأنّ: ⌫ إذا كان $a=4$ فإنّ: $(a-4)^2=0$

وبالتالي: $(a^2-8a)=(-16)$

⌫ إذا كان $a\neq 4$ فإنّ: $(a-4)^2>0$

وبالتالي: $(a^2-8a)>(-16)$

2) استنتاج دون استعمال الحاسبة، مقارنة العددين الحقيقيين $\left(2-8\sqrt{2}\right)$ وَ (-16):

من السؤال السابق بالمقارنة نلاحظ أنّ $a=\sqrt{2}\neq 4$.

فإنّ: $\boxed{2-8\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}^2-8\sqrt{2}\right)>-16}$.

مبرهنة 01: (المقارنة بعدد ثالث)

من أجل كلّ أعداد حقيقية a، b، c؛

إذا كان $\begin{cases}a\leq b\\ b\leq c\end{cases}$ فإنّ: $a\leq c$.

البرهان:

لدينا: $\begin{cases}a\leq b\\ b\leq c\end{cases}$ معناه: $\begin{cases}a-b\in\mathbb{R}^{-}\\ b-c\in\mathbb{R}^{-}\end{cases}$،

ولدينا: **مجموع عددين سالبين هو عدد سالب؛**

إذن: $(a-b)+(b-c)\in\mathbb{R}^{-}$

ومنه: $a-c\in\mathbb{R}^{-}$ وبالتالي: $\boxed{a\leq c}$.

مثال: (● نبيان أنّ: $\frac{9}{4}>\frac{5}{3}$)

لدينا: $\begin{cases}\frac{9}{4}>2\\ \frac{5}{3}<2\end{cases}$، إذن: $\boxed{\frac{9}{4}>\frac{5}{3}}$.

طريقة:

لمقارنة عددين حقيقيين، يُمكن:

① استعمال الحاسبة للحصول على قيم مقربة.

② مقارنة كلّ من العددين بعدد ثالث **(المبرهنة 01)**

③ دراسة إشارة الفرق **(التعريف 01)**

تمرين تطبيقي:

قارن بين العددين الحقيقيين في كل ما يأتي :

$152,125$ و $152,13$	π و $\frac{22}{7}$	$\frac{19}{13}$ و $\frac{17}{21}$	$\frac{159}{32}$ و $\frac{472}{95}$

حل مقترح: (توجد عدة طرق للمقارنة)

1) مقارنة بين $152,125$ وَ $152,13$:

بمأنّهما **موجبان وَلهما نفس الجزء الصحيح،**

تقارن جزءيهما العشري ، بمأنّ الجزء العشري للعدد $152,13$ أكبر تماما من الجزء العشري للعدد $152,125$

أي: (130>125) فإنّ: $\boxed{152{,}13 > 152{,}125}$.

2) مقارنة بين π وَ $\frac{22}{7}$:

باستعمال الآلة الحاسبة، لدينا: $\begin{cases} \pi \simeq 3{,}141\,5927 \\ \frac{22}{7} \simeq 3{,}142\,8571 \end{cases}$

بما أنّهما موجبان وَ $2 > 1$ فإنّ: $\boxed{\frac{22}{7} > \pi}$.

3) مقارنة بين $\frac{19}{13}$ و $\frac{17}{21}$:

بما أن: $\begin{cases} \frac{19}{13} > 1 \\ \frac{17}{21} < 1 \end{cases}$، فإنّ: $\boxed{\frac{19}{13} > \frac{17}{21}}$.

4) مقارنة بين $\frac{159}{32}$ و $\frac{472}{95}$:

ندرس إشارة الفرق $\frac{472}{95} - \frac{159}{32}$

لدينا: $\frac{159}{32} - \frac{472}{95} = \frac{159\times95-472\times32}{32\times95} = \frac{1}{32\times95} > 0$

إذن: $\boxed{\frac{159}{32} > \frac{472}{95}}$.

ملاحظة:

توجد طُرق أخرى **للمقارنة**.

❷ التّرتيب والعمليات:

① التّرتيب والجمع:

مبرهنة 02:

من أجل كلّ أعداد حقيقية a، b، c؛

إذا كان $a \le b$ فإنّ $a + c \le b + c$.

أي: **إضافة نفس العدد** إلى طرفي الترتيب، **لا يُغير الترتيب.**

البرهان:

لدينا: $a \le b$ معناه: $a - b \in \mathbb{R}^-$،

ومنه: $a - b + c - c \in \mathbb{R}^-$

وعليه: $(a + c) - (b + c) \in \mathbb{R}^-$

وبالتالي: $\boxed{a + c \le b + c}$.

مثال:

إذا كان: $a - 3 \le b$، فإنّ: $a - 3 + 3 \le b + 3$

وهذا يعني أنّ: $\boxed{a \le b + 3}$.

مبرهنة 03: (الجمع طرفاً لطرف)

من أجل كلّ أعداد حقيقية a، b، c،

إذا كان $\begin{cases} a \le b \\ c \le d \end{cases}$ فإنّ: $a + c \le b + d$.

أي: **الترتيب** متلائم **مع عملية الجمع.**

البرهان:

لدينا: $\begin{cases} a \le b \\ c \le d \end{cases}$ معناه: $\begin{cases} a - b \in \mathbb{R}^- \\ c - d \in \mathbb{R}^- \end{cases}$،

ولدينا: **مجموع عددين سالبين هو عدد سالب؛**

إذن: $(a - b) + (c - d) \in \mathbb{R}^-$

ومنه: $(a + c) - (b + d) \in \mathbb{R}^-$

وبالتالي: $\boxed{a + c \le b + d}$.

مثال:

لدينا: $\begin{cases} -6 < -4 \\ -1 < 2 \end{cases}$، ومنه: $-6 + (-1) < -4 + 2$

أي: $\boxed{-7 < -2}$.

ملاحظة:

إذا كان $\begin{cases} a \le b \\ c \le d \end{cases}$ فإنّ: $a - d \le b - c$.

② التّرتيب والضرب:

مبرهنة 04:

a، b، c أعداد حقيقية.

❶ من أجل $c > 0$، لدينا: $a \le b$ **تُكافئ** $ac \le bc$.

❷ من أجل $c < 0$، لدينا: $a \le b$ **تُكافئ** $ac \ge bc$.

البرهان:

لدينا: $a \le b$ معناه: $a - b \in \mathbb{R}^-$.

❶ من أجل $c > 0$،

فإنّ: $a - b$ و $c(a - b)$ لهما **نفس الإشارة**

أي: $c(a - b) \in \mathbb{R}^-$

يُكافئ: $ca - cb \in \mathbb{R}^-$ وهذا يعني أنّ: $\boxed{ca \le cb}$.

❷ من أجل $c < 0$،

فإنّ: $a - b$ و $c(a - b)$ لهما **إشارتين متعاكستين**

أي: $c(a - b) \in \mathbb{R}^+$

يُكافئ: $ca - cb \in \mathbb{R}^+$ وهذا يعني أنّ: $\boxed{ca \ge cb}$.

مثال: $0{,}2 < 0{,}3$،

بضرب الطرفين في العدد الموجب 10 نجد: $2 < 3$

بضرب الطرفين في العدد السالب (-10) نجد: $-20 > -30$

مبرهنة 05: (الضرب طرفاً بطرف)

من أجل كلّ أعداد **حقيقية موجبة** a، b، c، d

إذا كان $\begin{cases} a \le b \\ c \le d \end{cases}$ فإنّ: $ac \le bd$.

مثال: $\begin{cases} 2 < x \\ 5 < y \end{cases}$،

بضرب أطرف المتباينتين طرفاً بطرف نجد: $\boxed{10 < xy}$

ملاحظة:

في حالة **كل الأطراف سالبة**، نقوم بضرب كل الأطراف في العدد (-1) ثمّ استعمال المبرهنة 04)

تمارين 27؛ 28؛ 29 ص44

❸ قواعد المقارنة:

① ترتيب مربعي عددين حقيقيين:

مبرهنة 06:

a، b عددان حقيقيان.

❶من أجل $a \geq 0$ و $b \geq 0$،

لدينا: $a \leq b$ **يُكافئ** $a^2 \leq b^2$.

❷من أجل $a \leq 0$ و $b \leq 0$،

لدينا: $a \leq b$ **يُكافئ** $a^2 \geq b^2$.

ملاحظة:

في حالة a وَ b **من إشارتين مختلفتين**، لا توجد قاعدة.

أمثلة:

● لدينا: $0 < 3 < 5$ ومنه $3^2 < 5^2$ ، أي $9 < 25$

● لدينا: $-4 < -2 < 0$ ومنه $(-4)^2 > (-2)^2$،

أي $16 > 4$

② ترتيب جذرين تربيعيين لعددين حقيقيين موجبين:

مبرهنة 07:

a، b عددان حقيقيان موجبان ($a \geq 0$ وَ $b \geq 0$)

لدينا: $a \leq b$ **يُكافئ** $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

مثال:

● لدينا: $0 \leq 9 < 36$ ومنه $\sqrt{9} < \sqrt{36}$ ، أي $3 < 6$

③ ترتيب مقلوبي عددين حقيقيين:

مبرهنة 08:

a، b عددان حقيقيان غير معدومان.

❶إذا كان a وَ b **من نفس الإشارة** فإنّ،

$a \leq b$ **يُكافئ** $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.

❷إذا كان a وَ b **مختلفين في الإشارة** فإنّ،

$a \leq b$ **يُكافئ** $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$.

ملاحظة:

مقلوب **عدد سالب هو عدد سالب**، ومقلوب **عدد موجب**

هو عدد موجب (❷ من المبرهنة *08*)

أمثلة:

● لدينا: $0 \leq \sqrt{2} < 4$ ومنه $\frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{4}$.

● لدينا: $-5 < -\sqrt{3} \leq 0$ ومنه $\frac{1}{-\sqrt{3}} < \frac{1}{-5}$.

● لدينا: $-4 < 1$ ومنه $\frac{1}{1} < \frac{1}{-4}$.

④ ترتيب قوى عدد حقيقي موجب:

مبرهنة 09:

a **عدد حقيقي موجب.**

❶إذا كان $0 \leq a \leq 1$ فإنّ،

$a \geq a^2 \geq a^3 \geq a^4 \geq \cdots$ **ترتيب تنازلي**.

❷ إذا كان $a \geq 1$ فإنّ،

$a \leq a^2 \leq a^3 \leq a^4 \leq \cdots$ **ترتيب تصاعدي**.

أمثلة:

● لدينا: $\pi \leq \pi^2 \leq \pi^3 \leq \pi^4$ لأنّ $\boxed{\pi \geq 1}$.

● لدينا: $\frac{1}{2} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{1}{2}\right)^3 \geq \left(\frac{1}{2}\right)^4$ لأنّ $\boxed{0 \leq \frac{1}{2} \leq 1}$.

⑤ مقارنة عددين يتضمنان جذوراً تربيعية:

طريقة 02 ص36:

لمقارنة عددين يتضمنان جذوراً تربيعية، يُمكن مقارنة مربعيهما.

إذا كان مربعا عددين متساويين فإنّ هذين العددين متساويان أو متعاكسان:

(أي: إذا كان $A^2 = B^2$ فإنّ $A = B$ أو $A = -B$)

مثال 01: (● تمرين محلول ص 36)

قارن العددين الحقيقيين:

$1-\sqrt{5}$ و $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$؛ $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2^2}$ و $\frac{1}{2^3}$؛ π و π^2 و π^3.

الحل:

● نضع: $A = 1-\sqrt{5}$ و $B = \sqrt{6-2\sqrt{5}}$

نحسب A^2 و B^2:

لدينا: $A^2 = \left(1-\sqrt{5}\right)^2 = 1^2 - 2\sqrt{5} + \left(\sqrt{5}\right)^2 = 6-2\sqrt{5}$

وَ $B^2 = \left(\sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)^2 = 6-2\sqrt{5}$

نلاحظ أنّ $A^2 = B^2$ ، وكون $1-\sqrt{5} \in R^-$،

نستنتج أنّ: $A = -B$.

● لاحظ أنّ $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2^2}$ وَ $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2^3}$.

إذن: $\frac{1}{2} > \left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3$ لأنّ $\boxed{0 < \frac{1}{2} < 1}$

● لدينا: $\pi < \pi^2 < \pi^3$ لأنّ $\boxed{\pi > 1}$.

مثال 02: (● تمرين 17 ص 43)

قارن، دون استعمال الحاسبة، كل عددين فيما يلي:

$\frac{1}{2\sqrt{3}}$ و $\frac{1}{3\sqrt{2}}$؛ $\sqrt{2}-1$ و $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$؛

$1+\sqrt{7}$ و $\sqrt{2\sqrt{7}+8}$؛ $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ و $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$

الحل:

▪ $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ وَ $\frac{1}{3\sqrt{2}}$، لدينا: $\begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6} \end{cases}$

وبما أنّ: $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ فإن: $\frac{\sqrt{2}}{6} < \frac{\sqrt{3}}{6}$ وبالتالي: $\frac{1}{3\sqrt{2}} < \frac{1}{2\sqrt{3}}$

▪ $\sqrt{2} - 1$ و $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$،

لدينا: $\sqrt{2} - 1 = \frac{1(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$.

▪ $1+\sqrt{7}$ و $\sqrt{2\sqrt{7}+8}$،

لدينا: $(1+\sqrt{7})^2 = 8 + 2\sqrt{7}$ يُكافئ $1 + \sqrt{7} = \sqrt{8 + 2\sqrt{7}}$

▪ $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ و $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$

لدينا: $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6}$ يُكافئ $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$

⑥ مقارنة عددين مكتوبين على الشكل الجبري:

طريقة 03 ص36:

لمقارنة عددين مكتوبين على الشكل الجبري، يُمكن استعمال خواص المتباينات على التوالي.

مثال 01: (● تمرين محلول ص 36)

x عدد حقيقي حيث $x \geq 1$، برهن صحة المتباينتين: $2 - 5x \leq -3$؛ $\frac{1}{3x+1} \leq \frac{1}{4}$.

الحل:

▪ لدينا: $x \geq 1$؛ وبضرب طرفي المتباينة في العدد السالب -5،
نحصل على: $-5x \leq -1$؛ ثم بإضافة 2،
نستخلص: $2 - 5x \leq -3$.

▪ لدينا: $x \geq 1$؛
وبالتالي: $3x+1 \geq 4$ وذلك بالاستدلال كما في السؤال السابق.
وكون العددين الحقيقيين الموجبين $3x+1$ و 4 مرتبين في الترتيب المضاد لمقلوبيهما، نستخلص: $\frac{1}{3x+1} \leq \frac{1}{4}$.

تطبيق: 16 صفحة 43

قارن، دون استعمال الحاسبة، كل عددين فيما يلي:

$\frac{17}{22}$ و $\frac{17}{23}$؛ $-\frac{9}{11}$ و $-\frac{8}{11}$؛ -10^{-3} و -10^{-4}.

الحل:

▪ $\frac{17}{22}$ و $\frac{17}{23}$ لهما نفس البسط ومنه: $\frac{17}{23} < \frac{17}{22}$.

▪ $-\frac{9}{11}$ وَ $-\frac{8}{11}$، نقارن أولاً بين الكسرين $\frac{9}{11}$ و $\frac{8}{11}$ لهما نفس المقام و $9 > 8$؛ إذن: $\frac{9}{11} > \frac{8}{11}$ ومنه: $-\frac{9}{11} < -\frac{8}{11}$.

▪ -10^{-3} و -10^{-4} يُمكن كتابتهما على شكل كسور كما يلي:
$-\frac{1}{10^3}$ و $-\frac{1}{10^4}$

نقارن أولاً بين $\frac{1}{10^3}$ و $\frac{1}{10^4}$

لدينا: $10^4 > 10^3$، ومنه: $\frac{1}{10^4} < \frac{1}{10^3}$ إذن: $-\frac{1}{10^4} > -\frac{1}{10^3}$.

تطبيق: 24 صفحة 24

رتب تصاعديا الأعداد a، a^2، a^3 في كل حالة من الحالتين الآتيتين:

▪ $a = \sqrt{2} - 1$

▪ $a = \frac{3+\sqrt{3}}{3}$

الحل:

▪ $a = \sqrt{2} - 1$، لدينا: $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$
ومنه: $0 < a < 1$
إذن: $a^3 < a^2 < a$.

▪ $a = \frac{3+\sqrt{3}}{3}$،
لدينا: $a = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$ ومنه: $a > 1$ إذن: $a < a^2 < a^3$.

تمارين 23، 24، 25، 27، 28، 29ص 44. (تمارين مهمة)

④ الحصر:

نشاط 03 ص25:

نسكب 6 قارورات ماء سعة كلّ منها V لتر حيث $1,6 < V < 1,7$، في حوض مائي له شكل بلاطة قائمة بعدا قاعدتها a و b بالسنتمتر يحققان $20,5 < a < 20,6$ و $35,6 < b < 35,7$.

1) تحقّق من أن ارتفاع الماء y يُحقق $y = \frac{6V}{ab}$.

2) أعط حصرا للعدد y (**إرشاد:** يُمكن كتابة $y = \frac{6V}{ab} = 6V \times \frac{1}{ab}$).

حل النشاط:

لدينا: $\begin{cases} 1,6 < V < 1,7 \\ 20,5 < a < 20,6 \\ 35,6 < b < 35,7 \end{cases}$،

1) التحقّق من أن ارتفاع الماء y يُحقق $y = \frac{6V}{ab}$:

ليكن y ارتفاع الماء في الحوض و V' حجم الماء في الحوض.

نجد: $\begin{cases} V' = 6V \\ V' = aby \end{cases}$ إذن: $aby = 6V$ ومنه: $\boxed{y = \frac{6V}{ab}}$.

2) إعطاء حصرا للعدد y:

▪ لدينا: $\boxed{y = \frac{6V}{ab} = 6V \times \frac{1}{ab}}$

▪ ولدينا: $1,6 < V < 1,7$
ومنه: $6 \times 1,6 < 6V < 6 \times 1,7$
أي: $9,6 < 6V < 10,2$
نجد: $\boxed{9600 < 6V < 10200}$ ... (1)

▪ ولدينا من جهة أخرى: $\begin{cases} 20,5 < a < 20,6 \\ 35,6 < b < 35,7 \end{cases}$،
ومنه: $20,5 \times 35,6 < ab < 20,6 \times 35,7$
أي: $729.8 < ab < 735,42$
وعليه: $\frac{1}{729.8} > \frac{1}{ab} > \frac{1}{735,42}$.
وهذا يعني أنّ: $\boxed{\frac{1}{735,42} < \frac{1}{ab} < \frac{1}{729.8}}$ ... (2)

بضرب المتباينتين (1) وَ(2) طرفاً بطرف نجد:

$$9600 \times \frac{1}{735,42} < 6V \times \frac{1}{ab} < 10200 \times \frac{1}{729.8}$$

إذن: $\boxed{13,05 < y < 13,98}$.

① تعريف:

حصر عدد حقيقي x، **يعني إيجاد** عددين حقيقيين a وَ b حيث $a \leq x \leq b$.

ملاحظة:

- **سعة** هذا الحصر $a \leq x \leq b$ هي **العدد الحقيقي الموجب** $b - a$.
- إذا كان $a < x < b$ فنقول أنّ العدد x **محصور تماماً** بين العددين a وَ b.

أمثلة:

- لدينا: $1 \leq \sqrt{2} \leq 2$، هو: حصر للعدد $\sqrt{2}$ بالتقريب إلى **الوحدة**.
- لدينا: $1,41 \leq \sqrt{2} \leq 1,42$، هو: حصر للعدد $\sqrt{2}$ بالتقريب إلى 10^{-2}.
- لدينا: $1 \leq \sqrt{7} \leq 2,7$، هو: حصر للعدد $\sqrt{7}$ سعة هذا الحصر هي $1,7$.

إيجاد حصراً للعدد $\sqrt{7}$ سعته $0,001$:

- $2,645 \leq \sqrt{7} \leq 2,646$.

② حصر مجموع؛ فرق؛ جداء أو حاصل قسمة:

(طريقة 01 ص38)

لإيجاد حصر مجموع؛ فرق؛ جداء أو حاصل قسمة، نعتمد على خواص المتباينات.

هام جداً لا يُمكن حصر الفرق وحاصل القسمة **مباشرة**.

❶لحصر الفرق نتذكر أنّ الفرق يعني **إضافة المعاكس**، أي: $x - y = x + (-y)$

نحصر $(-y)$، ثمّ نستنتج حصراً لـ $x - y$.

❷لحصر حاصل قسمة نتذكر أنّ القسمة تعني **الضرب في المقلوب**، أي: $\frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y}$

نحصر $\frac{1}{y}$، ثمّ نستنتج حصراً لـ $\frac{x}{y}$.

تمرين محلول ص 38.

a و b عددان حقيقيان حيث $3 \leq a \leq 8$ وَ $1 \leq b \leq 7$

احصر الأعداد $a + b$، $a \times b$، $a - b$ وَ $\frac{a}{b}$.

الحل: لدينا: $\begin{cases} 3 \leq a \leq 8 \\ 1 \leq b \leq 7 \end{cases}$.

إيجاد حصر لـ $a + b$:

باستعمال **قاعدة الجمع طرفا لطرف** للمتباينات، نجد:

$$\boxed{4 \leq a + b \leq 15}$$

إيجاد حصر لـ $a \times b$:

كون **كل الأطراف موجبة وَبالضرب طرفا بطرف** نجد:

$$\boxed{3 \leq ab \leq 56}$$

إيجاد حصر لـ $a - b$:

نكتب $a - b$ **على الشكل** $a + (-b)$.

بضرب المتباينة المضاعفة $1 \leq b \leq 7$ في العدد السالب (-1)

نحصر $-b$: $-1 \geq -b \geq -7$

يُصبح لدينا: $\begin{cases} 3 \leq a \leq 8 \\ -7 \leq -b \leq -1 \end{cases}$، **وَبالجمع طرفا لطرف**

نجد: $\boxed{-4 \leq a - b \leq 7}$.

إيجاد حصر لـ $\frac{a}{b}$:

نكتب $\frac{a}{b}$ **على الشكل** $a \times \left(\frac{1}{b}\right)$.

أطراف المتباينة $1 \leq b \leq 7$ **من نفس الإشارة**، نحصر $\frac{1}{b}$

فيكون: $\frac{1}{1} \geq \frac{1}{b} \geq \frac{1}{7}$

يُصبح لدينا: $\begin{cases} 3 \leq a \leq 8 \\ \frac{1}{7} \leq \frac{1}{b} \leq 1 \end{cases}$، **وَبالضرب طرفا بطرف** نجد:

$$\boxed{\frac{3}{7} \leq \frac{a}{b} \leq 8}.$$

تطبيق:

مستطيل بُعداه a و b حيث،

$134m < a < 135m$ وَ $25m < b < 26m$

- أعط حصراً لمحيطه P، ولمساحته S، ولقطره D.

الحل:

لدينا: $\begin{cases} 134 < a < 135 \ldots (1) \\ 25 < b < 26 \ldots (2) \end{cases}$.

إعطاء حصر لمحيطه P:

نعلم أنّ $\boxed{P = 2(a + b)}$، حيث P هو محيط المستطيل.

بجمع (1) و(2) طرفا لطرف نجد: $159 < a + b < 161$

ومنه: $2 \times 159 < 2(a + b) < 2 \times 161$

إذن: $\boxed{318m < P < 322m}$.

إعطاء حصر لمساحته S:

نعلم أنّ $\boxed{S = ab}$، حيث S هو مساحة المستطيل.

بضرب (1) و(2) طرفا بطرف نجد: $3350 < ab < 3510$

إذن: $\boxed{3350m^2 < S < 3510m^2}$.

إعطاء حصر لقطره D:

نعلم أنّ $\boxed{D = \sqrt{a^2 + b^2}}$، حيث D هو قطر المستطيل.

من (1) نجد: $134^2 < a^2 < 135^2$

أي: $17956 < a^2 < 18225 \ldots (3)$

من (2) نجد: $25^2 < b^2 < 26^2$

أي: $625 < b^2 < 676 \ldots (4)$

بجمع (3) و(4) طرفا لطرف نجد:

$$18581 < a^2 + b^2 < 18901$$

ومنه: $\sqrt{18581} < \sqrt{a^2+b^2} < \sqrt{18901}$

أي: $\boxed{136{,}31m < D < 137{,}48m}$.

تمرين تطبيقي «②»: a و b عددان حقيقيان حيث : $\frac{1}{2} \le a \le 2$ و $2 \le b \le 4$

❖ أعط حصرا لكل من الأعداد التالية :

$1-2a$ ، $\frac{a+1}{ab+1}$ ، $\frac{a^2}{b}$ ، $\frac{1-b^2}{3}$ ، a^2-3a+b

تمارين من 69 إلى غاية 74 ص47. (تمارين مهمة)

❺ المجالات:

① تعريف:

a وَ b عددان حقيقيان حيث $a \le b$.
نسمي **مجالاً مغلقاً** حدّاه a وَ b؛ **مجموعة الأعداد الحقيقية x** حيث $a \le x \le b$، ونرمز له بالرمز $[a;b]$.

أمثلة:

● $[3;7]$ هو مجال مغلق حداه 3 وَ7، وهو **مجموعة الأعداد الحقيقية x** حيث $3 \le x \le 7$.

- $5 \in [3;7]$؛ لأنّ: $3 \le 5 \le 7$.
- $8 \notin [3;7]$؛ لأنّ: 8 ليس محصور بين 3 وَ7.
- $3 \in [3;7]$؛ لأنّ: $3 \le 3 \le 7$.
- $7 \in [3;7]$؛ لأنّ: $3 \le 7 \le 7$.

● **مجموعة الأعداد الحقيقية x** حيث $3 < x < 7$؛ وهو المجال المفتوح $]3;7[$.

② تمثيل مجال:

يُمثّل المجال $[a;b]$ **هندسيا** بالشّكل الآتي حيث A و B نقطتان فاصلتاهما a و b على الترتيب ($A(a)$ وَ $B(b)$)

③ أنواع المجالات:

المجال الذي يُرمز إليه ...	هو مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث ...	يُمثّل على المستقيم العددي بالشكل ...
$[a;b]$	$a \le x \le b$	a b
$[a;b[$	$a \le x < b$	a b
$]a;b]$	$a < x \le b$	a b
$]a;b[$	$a < x < b$	a b
$]-\infty;b]$	$x \le b$	b
$]-\infty;b[$	$x < b$	b
$[a;+\infty[$	$x \ge a$	a
$]a;+\infty[$	$x > a$	a

☜ في المجال **المغلق** $[a;b]$، العارضتان موجّهتان نحو الدّاخل.

☜ $]a;b[$ هو مجال **مفتوح**، العارضتان موجّهتان نحو الخارج.

ملاحظات:

❶ الحدّان a و b ينتميان إلى المجال $[a;b]$ ولا ينتميان إلى المجال $]a;b[$.

❷ الرمزان $-\infty$ و $+\infty$ (يُقرآن: ناقص لانهاية، زائد لانهاية) لا يُمثّلان عددين حقيقيين وبالتالي تكون العارضتان مفتوحتين عندهما.

تمرين 35 ص45.

مثّل على المستقيم العددي المجالات الآتية:

$[1;4]$ ؛ $]-2;-1[$ ؛ $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ ؛ $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right[$.

تمرين 39 ص45.

أكتب على شكل مجالات مجموعات الأعداد الحقيقية المعرفة بالمتباينات الآتية:

1) $2 \le x \le 6$ 3) $x \le -2{,}5$

2) $-4 \le x \le 3$ 4) $x > \sqrt{3}$

④ تقاطع واتحاد مجالين:

تعريف:

❶ **تقاطع مجالين** I و J هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تنتمي إلى I **و** J، ونرمز إليه بالرّمز $I \cap J$.

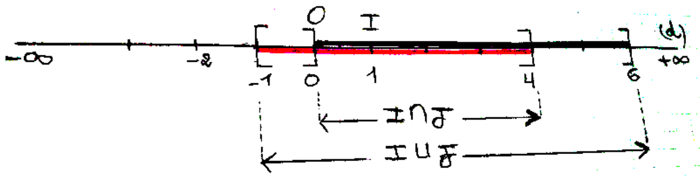
❷ **إتحاد مجالين** I و J هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تنتمي إلى I **أو** J، ونرمز إليه بالرّمز $I \cup J$.

لإيجاد التقاطع أو الإتحاد نقوم بتمثيل المجالين على نفس المستقيم الحقيقي، أو بالملاحظة.

أمثلة:

نعتبر المجالين $I = [-1;4]$ وَ $J =]0;6]$

- $I \cap J$ هو **مجموعة الأعداد الحقيقية** x التي تُحقق $-1 \le x \le 4$ **و** $0 < x \le 6$.
- $I \cup J$ هو **مجموعة الأعداد الحقيقية** x التي تُحقق $-1 \le x \le 4$ **أو** $0 < x \le 6$.



إذن: $\boxed{I \cap J =]0;4]}$؛ وَ $\boxed{I \cup J = [-1;6]}$.

تمرين 37 صفحة 44: عيّن المجالات الآتية

1) $[0;2] \cap]1;6]$ 2) $[-2;2] \cap]-2;+\infty[$

3) $[-1;3] \cap]3;+\infty[$ 4) $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right] \cap \left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

تمرين 47 صفحة 45:

أنقل ثم أكمل الجدول.

I	J	$I\cap J$	$I\cup J$
$[2;5]$	$[1;+\infty[$		
$]-1;3]$	$]-5;5[$		
$\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$	$\left]-\frac{5}{2};\frac{1}{3}\right]$		
$[1;2]$	$\left]\frac{1}{2};2\right[$		

⑤ العناصر المميزة لمجال مُغلق:

يتميز المجال المغلق $[a;b]$ بالعناصر التالية:

❶**مركزه**، العدد الحقيقي $\boxed{c=\frac{a+b}{2}}$.

❷**طوله**، العدد الحقيقي **الموجب** $\boxed{l=b-a}$.

❸**نصف قطره**، العدد الحقيقي **الموجب** $\boxed{r=\frac{b-a}{2}=\frac{l}{2}}$.

أمثلة:

المجال	حداه	مركزه	طوله	نصف قطره
$[0;2]$	$a=0$ وَ $b=2$	$c=\frac{0+2}{2}=1$	$l=2-0=2$	$r=\frac{2-0}{2}=1$
$[-1;3]$	$a=-1$ وَ $b=3$	$c=\frac{(-1)+3}{2}=1$	$l=3-(-1)=4$	$r=\frac{3-(-1)}{2}=2$

تمارين 40، 42، 43، 46 ص 45 (تمارين مهمة)

❻ القيمة المطلقة والمسافة:

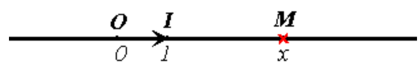
① القيمة المطلقة لعدد حقيقي:

تعريف:

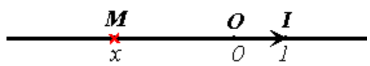
x عدد حقيقي، M نقطة من مستقيم مزوّد بمعلم $(O;I)$ فاصلتها x.

القيمة المطلقة للعدد x هي **المسافة** OM، ونرمز إليها بالرّمز $|x|$. ونكتب $OM=|x|$.

▪ **في حالة $x\geq 0$** $(OM=|x|=x)$



▪ **في حالة $x\leq 0$** $(OM=|x|=-x)$



أمثلة:

● $|5|=5$، ● $|-6|=-(-6)=6$،

● $|10^{-2}|=10^{-2}$، ● $\left|\frac{\sqrt{2}}{-4}\right|=-\left(\frac{\sqrt{2}}{-4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}$،

● $|1-\sqrt{2}|=-(1-\sqrt{2})=\sqrt{2}-1$،

● $|\sqrt{7}-2|=\sqrt{7}-2$،

● $|\sqrt{3}-\sqrt{5}|=-(\sqrt{3}-\sqrt{5})=\sqrt{5}-\sqrt{3}$.

نتائج:

❶بما أنّ **المسافة موجبة** فإنّ $(|x|\geq 0)$ من أجل كلّ **عدد حقيقي** x.

❷من أجل كلّ **عدد حقيقي** x:

$$\boxed{OM=|x|=\begin{cases}x & ;x\geq 0\\ -x; & x\leq 0\end{cases}}$$

② خواص القيمة المطلقة:

x و y عددين حقيقيين، لدينا:

❶ $|x|\geq 0$ $(|x|=0$ في حالة $x=0)$

❷ $|-x|=|x|$ ❸ $\sqrt{x^2}=|x|$

❹ $|xy|=|x|\times|y|$ ❺ $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$ مع $y\neq 0$

❻ $|x+y|\leq|x|+|y|$ **(المتباينة المثلثية)**

ملاحظة:

المتباينة المثلثية تُصبح $|x+y|=|x|+|y|$ عندما يكون العددان x و y **من نفس الإشارة**.

أمثلة:

⋆ **العدد و معاكسه لهما نفس القيمة المطلقة:** $|-7|=|7|=7$

⋆ $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}=|1-\sqrt{2}|=-(1-\sqrt{2})=\sqrt{2}-1$

⋆ $|(-2)\times 3|=|-2|\times|3|=2\times 3=6$

⋆ $|-5+7|\leq|-5|+|7|$

③ المسافة بين نقطتين:

مبرهنة 10:

إذا كانت A، B نقطتان من مستقيم مزوّد بمعلم $(O;I)$ فاصلتاهما a، b على التّرتيب فإنّ

$$AB=|b-a|=|a-b|$$

مثال: (● **تمرين 49 ص 44**)

بفرض M و N و P ثلاث نقاط ذات الفواصل -4، 0، -3 على الترتيب من المستقيم العددي.

أحسب المسافات MN و NP و MP.

الحل:

حساب المسافات MN و NP و MP:

$$MN=|x_N-x_M|=|0-(-4)|=|4|=4$$

$$NP=|x_P-x_N|=|0-(-3)|=|3|=3$$ وَ

$$MP=|x_M-x_P|=|-4-(-3)|=|-1|=1$$ وَ

④ المسافة بين عددين حقيقيين:

تعريف:

المسافة بين عددين حقيقيين a وَ b هي **العدد الحقيقي الموجب** $|b-a|$ ($|a-b|$ أو).

نكتب $d(a;b)=|b-a|=|a-b|$