

4 :

اختبار في مادة الرياضيات

على كل مترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين .

التمرين الأول: ( 04 )

5 ويكتب  $\overline{bbab}^8$

$\overline{abcca}^5$  عدد طبيعي غير معدوم يكتب  $N$

(1) بين أن  $N$  يحقق :  $309a + 15c = 226b$  .8

(2) بين أن العدد 3  $b$  .

(3) فيما يلي نفرض :  $b = 3$  .

( بين أن ،  $309(a - 2) = 60 - 15c$  )

(  $a - 2$  ) 5 (  $a - 2$  )

(  $N$  ) 10

التمرين الثاني: ( 04 )

$I B, A$   $(O, \vec{u}, \vec{v})$

لواحقها على الترتيب ،  $z_A = -2$   $z_B = -1 + i$   $z_I = i$

حيث  $z \neq -2$  :  $z' = \frac{iz + i + 1}{z + 2}$

حيث  $M$   $M'$   $z$

( -1 )  $z' = \frac{i(z + 1 - i)}{z + 2}$

(C) يطلب  $M'$   $[AB]$   $M$  بين أنه إذا كانت النقطة  $M$

تعيين عناصرها .

( عين طبيعة (E)  $M(z)$  المستوي بحيث يكون  $z'$  تخيلا .

( -2 )  $z' - i = \frac{1 - i}{z + 2}$

(  $IM \times AM = \sqrt{2}$  :  $(\vec{u}, \overline{IM'}) + (\vec{u}, \overline{AM}) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$  )

$M'$  1  $A$  (Γ)  $M$  بين أنه إذا كانت النقطة  $M$

إلى مجموعة يطلب تعيينها .

3-  $z_E = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$   $E$

( بين أن النقطة  $E$  (Γ) ثم بين أن  $(\vec{u}, \overline{AE}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$  )

( 2 )  $E'$   $E$

التمرين الثالث ( 05 )

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  :  $u_0 = \frac{1}{5}$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$   $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 1}$

1- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$   $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2u_n + 1}$ .

2- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$   $0 < u_n < \frac{1}{2}$

( تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$   $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1 - 2u_n)}{2u_n + 1}$  ثم بين أن المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متزايدة

( هل  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متقاربة ؟ عين نهايتها .

3- نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_n = \frac{3^n u_n}{2u_n - 1}$

( أثبت أن المتتالية  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  هندسية أساسها  $q = 6$  .

(  $v_n = \frac{2^n}{3 + 2^{n+1}}$   $u_n = \frac{2^n}{3 + 2^{n+1}}$   $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  )

التمرين ا ( 07 ) :

I. نعتبر الدالة العددية  $g$  :  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $g(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} - \ln(e^x + 1)$

وليكن  $(C_g)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

(1)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$  وفسر النتيجة هندسيا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  .

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$   $g'(x) = \frac{-e^{2x}}{(e^x + 1)^2}$  ثم استنتج اتجاه تغير الدالة  $g$  وشكل جدول تغيراتها

(3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$   $g(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} - \ln(1 + e^{-x}) - x$

(4)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - (-x + 1)]$  ثم فسر النتيجة هندسيا .

(5)  $(C_g)$   $(\Delta)$

(6)  $g(x)$  عندما يتغير  $x$   $\mathbb{R}$  .

II. الدالة العددية المعرفة على المجموعة  $\mathbb{R}$  :  $f(x) = e^{-x} \ln(e^x + 1)$

(1) برهن أن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$   $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  .

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$   $f'(x) = e^{-x} \times g(x)$  ثم استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  وشكل جدول تغيراتها

(3) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$   $\frac{1}{e^x + 1} = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$   $\int_{-\ln 3}^0 \frac{1}{e^x + 1} dx$  :

(4)  $\int_{-\ln 3}^0 f(x) dx$

التمرين الأول ( 04 )

$r$  عدد حقيقي موجب تماما و  $\theta$  عدد حقيقي حيث  $\theta \in [0; \pi]$ .

$$z_2 = \sqrt{3}(1+i) \quad z_1 = r^2(\sin \theta + i \cos \theta) \quad z_0 = r(-\cos \theta + i \sin \theta) :$$

$$z_2 \quad z_1, z_0 \quad (1)$$

( 2 ) عين العددين الحقيقيين  $r$   $\theta$  بحيث يكون :  $z_1 = \bar{z}_0$ .

( 3 ) عين عندئذ قيم العدد الطبيعي  $n$  بحيث يكون العدد  $\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^n$  حقيقيا .

$$\theta = \frac{\pi}{3} \quad r = 1 \quad (3)$$

C B,A (O,  $\vec{u}, \vec{v}$ )

لواحقها :  $z_2, z_1, z_0$  على الترتيب .

( عين  $z_G$  )  $G$   $\{(A; 2), (B; 2), (C, -1)\}$

( عين طبيعة  $(\Gamma)$  )  $M$  من المستوي حيث ،  $\|2\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC}\| = 3$

التمرين الثاني : ( 04 )

$$(E): 5x - 6y = 3 \quad : \quad \mathbb{Z}^2$$

1- ( أثبت أنه إذا كانت الثنائية  $(x, y)$  (E)  $x$  (E) 3

(E)  $\mathbb{Z}^2$  (E) (E)

$$\begin{cases} x \equiv -1[6] \\ x \equiv -4[5] \end{cases} : (S)$$

2-  $a$   $b$  عدنان طبيعيين حيث :

$$a = \overline{1\alpha 0\alpha 00} \quad 3 \quad b = \overline{\alpha\beta 0\alpha}$$

• عين  $\alpha$   $\beta$  حتى تكون الثنائية  $(a; b)$  (E) .

التمرين الثالث ( 04 )

B(6;1;5), A(3;-2;2) (O,  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ )

$$(P): x + y + z - 3 = 0 \quad C(6; -2; -1)$$

(1) برهن أن المثلث ABC .

(2) برهن أن المستوي (P) عمودي على المستقيم (AB) ويمر من النقطة A.

(3) أكتب معادلة ديكرتية للمستوي (P') (AC) A

(4) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم  $(\Delta)$  مستقيم تقاطع كلا من المستويين (P) (P')

(5) (D(0;4;-1) بين أن المستقيم (AD) (ABC) (

.ABCD (

( بين أن قيس الزاوية  $\widehat{BDC}$  هو  $\frac{\pi}{4}$  rad .

( BDC ثم استنتج المسافة بين النقطة A (BDC)

### التمرين الرابع: (08)

I. نعتبر الدالة العددية f

$$f(x) = x - (x^2 + 1)e^{-x+1} : \mathbb{R}$$

$$(C_f) \quad f \quad (O, \vec{i}, \vec{j})$$

$$-1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ وبيّن أن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

( بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x  $f'(x) = 1 + (x-1)^2 e^{-x+1}$

( استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

$$-2 \quad \text{بين أن المستقيم } (\Delta) \quad y = x \quad (C_f) \quad +\infty$$

$$(C_f) \quad (\Delta)$$

$$-3 \quad \text{بيّن } f(x) = 0 \text{ تقبل حلا وحيدا } \alpha \text{ حيث } 1.8 < \alpha < 1.9$$

$$-4 \quad \text{أكتب معادلة ديكرتية للمماس } (T) \quad (C_f) \quad 1$$

$$-5 \quad \text{بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي } x \quad f''(x) = -(x-1)(x-3)e^{-x+1} \quad (C_f) \text{ يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيينهما .}$$

$$-6 \quad f(3), f(0) \quad (T) \quad (\Delta) \quad (C_f)$$

-7 ناقش بيانها وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة طول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية :

$$(E) : f(x) = x + m$$

$$II \quad \text{نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم } n \quad I_n = \int_0^1 x^n e^{-x+1} dx$$

$$-1 \quad \text{بين أن الدالة } G \quad \mathbb{R} : G(x) = -(x+1)e^{-x+1} \text{ هي دالة أصلية للدالة } x \mapsto xe^{-x+1}$$

$$(I_1)$$

$$-2 \quad \text{باستعمال الكاملة بالتجزئة بين أن } I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n \text{ لكل عدد طبيعي غير معدوم } n$$

$$(I_2)$$

$$-3 \quad \text{الحيز المستوي المحدد بالمنحني } (C_f) \text{ و المستقيم } (\Delta) \text{ والمستقيمين الذين معادلتيهما :}$$

$$cm^2 \quad x=1 \quad x=0$$

مع تمنياتكم بالتوفيق والنجاح في البكالوريا جوان 2015

العلامة	الإجابة
<b>الموضوع الأول</b>	
<b>04</b>	<b>التمرين الأول</b>
01	<p>لدينا : <math>N = \overline{bbab}^8</math> و <math>N = \overline{abcca}^5</math></p> <p>(1) تبيان أن <math>N</math> يحقق : <math>309a + 15c = 226b</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>لدينا : <math>N = a \times 5^4 + b \times 5^3 + c \times 5^2 + c \times 5 + a \times 5^0 = 625a + 125b + 25c + 5c + a</math></li> <li><math>N = 626a + 125b + 30c</math></li> <li>ولدينا : <math>N = b \times 8^3 + b \times 8^2 + a \times 8 + b \times 8^0 = 512b + 64b + 8a + b</math></li> <li>أي <math>N = 577b + 8a</math></li> <li>إذن : <math>626a + 125b + 30c = 577b + 8a</math></li> <li>أي <math>618a + 30c = 452b</math> ومنه <math>309a + 15c = 226b</math></li> </ul>
0.25	<p>(2) تبيان أن العدد 3 قاسم للعدد <math>b</math> :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>لدينا : <math>3(103a + 5c) = 226b</math></li> <li>- لدينا : <math>3 / 226b</math> و <math>3 \wedge 226 = 1</math> ومنه <math>3 / b</math> حسب مبرهنة غوص .</li> </ul>
0.75	<p>(3) نفرض <math>b = 3</math></p> <p>(أ) تبيان أن : <math>309(a - 2) = 60 - 15c</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>لدينا : <math>3(103a + 5c) = 226b</math> ومنه <math>309a + 15c = 678</math></li> <li>ولدينا : <math>309a - 618 = 60 - 15c</math></li> <li>ومنه <math>309(a - 2) = 60 - 15c</math></li> </ul>
$2 \times 0.75$	<p>(ب) استنتاج أن العدد 5 يقسم العدد <math>a - 2</math> :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>لدينا : <math>309(a - 2) = 5(12 - 3c)</math></li> <li><math>309(a - 2) = 5(12 - 3c)</math> و <math>5 \wedge 309 = 1</math> ومنه <math>5 / (a - 2)</math> حسب مبرهنة غوص .</li> <li>استنتاج قيمة <math>a</math> :</li> <li>بما أن <math>5 / (a - 2)</math> فان : <math>a - 2 = 5k (k \in \mathbb{N})</math></li> <li>ولدينا : <math>a &lt; 5</math> أي أن : <math>a = 2</math> .</li> <li>استنتاج قيمة العدد <math>c</math> :</li> <li>لدينا : <math>309 \times 2 + 15c = 678</math> ومنه <math>15c = 678 - 618</math></li> <li>أي <math>c = 4</math></li> </ul>
0.5	<p>(ج) كتابة العدد <math>N</math> في نظام التعداد 10 :</p> <p><math>N = 577(3) + 8(2) = 1747</math></p>
<b>04 نقاط</b>	<b>التمرين الثاني</b>
0.25	<ul style="list-style-type: none"> <li>لدينا : <math>z' = \frac{iz + i + 1}{z + 2}</math> من أجل <math>z \neq -2</math></li> <li>(1- أ) التحقق من أن : <math>z' = \frac{i(z + 1 - i)}{z + 2}</math></li> <li>لدينا : <math>z' = \frac{iz + i + 1}{z + 2} = \frac{i\left(z + \frac{i}{i} + \frac{1}{i}\right)}{z + 2} = \frac{i(z + 1 - i)}{z + 2}</math></li> </ul>

0.5	<p>(ب) تبين أنه إذا كانت <math>M</math> تنتمي إلى محور القطعة <math>[AB]</math> فإن <math>M'</math> تنتمي إلى دائرة <math>(\mathcal{C})</math>:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• لدينا <math>M</math> تنتمي إلى محور القطعة <math>[AB]</math> معناه <math>AM = BM</math></li> <li>• ولدينا: <math> z'  = \left  \frac{i(z+1-i)}{z+2} \right  = \frac{ i  \times  z+1-i }{ z+2 }</math> أي <math>OM' = \frac{BM}{AM} = 1</math></li> <li>• إذن <math>OM' = 1</math> ومنه <math>M'</math> تنتمي إلى دائرة <math>(\mathcal{C})</math> مركزها <math>O(0;0)</math> ونصف قطرها <math>R = 1</math></li> </ul>
0.5	<p>(ج) تعيين طبيعة المجموعة <math>(E)</math> بحيث يكون <math>z'</math> تخيلياً صرفاً:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>z'</math> تخيلي صرف معناه <math>Arg(z') = \frac{\pi}{2} + k\pi</math></li> <li>• ومنه <math>Arg\left(\frac{i(z+1-i)}{z+2}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi</math> أي <math>Arg(i) + Arg\left(\frac{z+1-i}{z+2}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi</math></li> <li>• معناه: <math>\frac{\pi}{2} + Arg\left(\frac{z+1-i}{z+2}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi</math> ومنه <math>Arg\left(\frac{z+1-i}{z+2}\right) = k\pi</math></li> <li>• أي <math>(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}) = k\pi</math></li> <li>• المجموعة <math>(E)</math> هي المستقيم <math>(AB)</math> ماعدا النقطتين <math>A</math> و <math>B</math>.</li> <li>• <math>(E) = (AB) - \{A, B\}</math></li> </ul>
0.25	<p>2- أ) التحقق من أن: <math>z'-i = \frac{1-i}{z+2}</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• لدينا: <math>z'-i = \frac{1-i}{z+2}</math> أي <math>z'-i = \frac{iz+i+1}{z+2} - i = \frac{iz+i+1-iz-2i}{z+2} = \frac{1-i}{z+2}</math></li> </ul>
0.25	<p>(ب) استنتاج أن: <math>IM' \times AM = \sqrt{2}</math>:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• لدينا: <math>z'-i = \frac{1-i}{z+2}</math> ومنه <math> z'-i  = \frac{ 1-i }{ z+2 }</math> أي <math> z'-i  = \frac{ 1-i }{ z+2 }</math></li> <li>• وبالتالي: <math>IM' = \frac{\sqrt{2}}{AM}</math> ومنه <math>IM' \times AM = \sqrt{2}</math></li> </ul>
0.5	<ul style="list-style-type: none"> <li>• استنتاج أن: <math>(\vec{u}, \overrightarrow{IM'}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = -\frac{\pi}{4}[2\pi]</math></li> <li>• لدينا: <math>z'-i = \frac{1-i}{z+2}</math> ومنه <math>Arg(z'-i) = Arg\left(\frac{1-i}{z+2}\right)</math></li> <li>• أي <math>Arg(z'-i) = Arg(1-i) - Arg(z+2)</math> ومنه</li> <li>• <math>Arg(z'-i) + Arg(z+2) = -\frac{\pi}{4}[2\pi]</math></li> <li>• أي <math>(\vec{u}, \overrightarrow{IM'}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = -\frac{\pi}{4}[2\pi]</math></li> </ul>
0.5	<p>(ج) تبين أنه إذا كانت النقطة <math>M</math> تنتمي إلى الدائرة <math>(\Gamma)</math> ذات المركز <math>A</math> ونصف القطر 1 فإن النقطة <math>M'</math> تنتمي إلى مجموعة يطلب تعيينها:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• لدينا <math>M</math> تنتمي إلى الدائرة <math>(\Gamma)</math> ذات المركز <math>A</math> ونصف القطر 1 معناه <math>AM = 1</math></li> <li>• ولدينا: <math>IM' \times AM = \sqrt{2}</math></li> <li>• أي <math>IM' = \sqrt{2}</math> ومنه <math>M'</math> تنتمي إلى دائرة مركزها <math>I</math> ونصف قطرها <math>R = \sqrt{2}</math></li> </ul>

3- لدينا :  $z_E = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

(أ) تبيان أن النقطة  $E$  تنتمي إلى المجموعة  $(\Gamma)$  :

0.25

• لدينا :  $AE = |z_E - z_A| = \left| -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$  ومنه  $E \in (\Gamma)$

• تبيان أن :  $(\vec{u}, \overline{AE}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

0.5

ولدينا :  $z_{\overline{AE}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  وبالتالي :

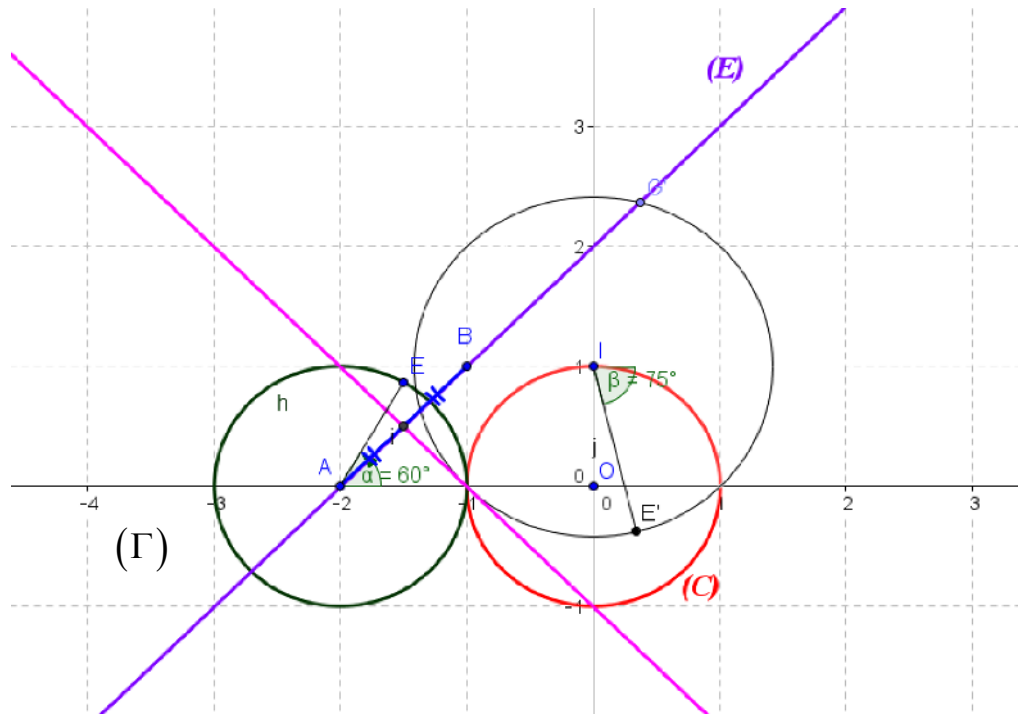
$(\vec{u}, \overline{AE}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$  أي  $(\vec{u}, \overline{AE}) = \arg(z_{\overline{AE}}) = \text{Arg}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

(ب) انشاء النقطة  $E'$  المرفقة بالنقطة  $E$  :

لدينا :  $EE' = \sqrt{2}$  ولدينا :  $(\vec{u}, \overline{IE'}) + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} [2\pi]$  أي

$(\vec{u}, \overline{IE'}) = -\frac{7\pi}{12} [2\pi]$  ومنه  $(\vec{u}, \overline{IE'}) = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} [2\pi]$

0.5



05 نقاط

### التمرين الثالث

0.25

• لدينا :  $u_0 = \frac{1}{5}$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 1}$

1- التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2u_n + 1}$

	<p>- لدينا : <math>u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2u_n + 1}</math> ومنه : <math>u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 1} = \frac{2u_n + 1 - 1}{2u_n + 1} = 1 - \frac{1}{2u_n + 1}</math></p>
0.75	<p><b>2- أ) البرهان على أنه من أجل كل عدد طبيعي <math>n</math> ، <math>0 &lt; u_n &lt; \frac{1}{2}</math></b>  نسمي <math>P(n)</math> هذه الخاصية .  -1 من أجل <math>n = 0</math> لدينا : <math>u_0 = \frac{1}{5}</math> و <math>0 &lt; \frac{1}{5} &lt; \frac{1}{2}</math> أي <math>0 &lt; u_0 &lt; \frac{1}{2}</math>  اذن <math>P(n)</math> صحيحة من أجل <math>n = 0</math> .  -2 نفرض صحة <math>P(n)</math> أي نفرض أن : <math>0 &lt; u_n &lt; \frac{1}{2}</math> ونبرهن صحة <math>P(n+1)</math> أي نبرهن  أن : <math>0 &lt; u_{n+1} &lt; \frac{1}{2}</math> .  - لدينا : <math>0 &lt; u_n &lt; \frac{1}{2}</math> ومنه <math>0 &lt; 2u_n &lt; 1</math> أي <math>1 &lt; 2u_n + 1 &lt; 2</math>  وبالتالي <math>1 &lt; \frac{1}{2u_n + 1} &lt; 2</math> إذن <math>-\frac{1}{2} &lt; -\frac{1}{2u_n + 1} &lt; -1</math>  وأخيرا : <math>0 &lt; 1 - \frac{1}{2u_n + 1} &lt; \frac{1}{2}</math> أي <math>0 &lt; u_{n+1} &lt; \frac{1}{2}</math> ومنه <math>P(n+1)</math> صحيحة .  -3 حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فان <math>P(n)</math> صحيحة من أجل كل عدد طبيعي <math>n</math> .</p>
0.25	<p><b>ب) التحقق انه من أجل كل عدد طبيعي <math>n</math> ، <math>u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n + 1}</math></b>  • لدينا : <math>u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{2u_n + 1} - u_n = \frac{2u_n - 2u_n^2 - u_n}{2u_n + 1} = \frac{u_n - 2u_n^2}{2u_n + 1} = \frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n + 1}</math>  • <b>تبيان أن المتتالية <math>(u_n)_{n \in \mathbb{N}}</math> متزايدة :</b>  ندرس اشارة الفرق : <math>u_{n+1} - u_n</math>  - لدينا : <math>u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n + 1}</math></p>
0.5	<p>ولدينا : <math>0 &lt; u_n &lt; \frac{1}{2}</math> ومنه <math>-1 &lt; -2u_n &lt; 0</math> أي <math>0 &lt; 1 - 2u_n &lt; 1</math>  وبالتالي : <math>0 &lt; u_n(1-2u_n) &lt; \frac{1}{2}</math>  - ولدينا : <math>\frac{1}{2} &lt; \frac{1}{2u_n + 1} &lt; 1</math> ومنه <math>0 &lt; \frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n + 1} &lt; \frac{1}{2}</math>  - أي <math>u_{n+1} - u_n &gt; 0</math> وبالتالي المتتالية <math>(u_n)_{n \in \mathbb{N}}</math> متزايدة.</p>
0.5	<p><b>ج) دراسة تقارب المتتالية <math>(u_n)_{n \in \mathbb{N}}</math> :</b>  • <math>(u_n)_{n \in \mathbb{N}}</math> متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد <math>\frac{1}{2}</math> فهي متقاربة وتتقارب من العدد <math>\frac{1}{2}</math> .  • <b>تعيين نهاية المتتالية <math>(u_n)_{n \in \mathbb{N}}</math> :</b> <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}</math></p>

3- لدينا من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_n = \frac{3^n u_n}{2u_n - 1}$

(أ) اثبات أن المتتالية  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  هندسية :

• لدينا :  $v_{n+1} = \frac{3^{n+1} u_{n+1}}{2u_{n+1} - 1}$

0.75

$$v_{n+1} = \frac{3 \times 3^n \times \frac{2u_n}{2u_n + 1}}{2 \times \frac{2u_n}{2u_n + 1} - 1} = \frac{6 \times 3^n \times u_n}{4u_n - 2u_n - 1} = \frac{6 \times 3^n \times u_n}{2u_n + 1}$$

ومنه  $v_{n+1} = 6 \times \frac{3^n \times u_n}{2u_n - 1} \times \frac{2u_n + 1}{2u_n + 1} = 6 \times \frac{3^n \times u_n}{2u_n - 1} = 6v_n$  هندسية أساسها  $q = 6$

وحدها الأول  $v_0 = \frac{3^0 \times u_0}{2u_0 - 1} = \frac{1 \times \frac{1}{5}}{2 \times \frac{1}{5} - 1} = \frac{\frac{1}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{1}{3}$

0.5

(ب) حساب عبارة الحد العام  $v_n$  بدلالة  $n$  :

• لدينا :  $v_n = v_0 \times q^n = -\frac{1}{3} \times 6^n$

• استنتاج أن :  $u_n = \frac{2^n}{3 + 2^{n+1}}$

- لدينا :  $v_n = \frac{3^n u_n}{2u_n - 1}$  ومنه  $2u_n v_n - v_n = 3^n u_n$  أي  $2u_n v_n - 3^n u_n = v_n$

- ومنه  $(2v_n - 3^n)u_n = v_n$  وبالتالي :  $u_n = \frac{v_n}{2v_n - 3^n}$

0.75

إذن :  $u_n = \frac{-\frac{1}{3} \times 6^n}{2 \left( -\frac{1}{3} \times 6^n \right) - 3^n} = -\frac{6^n}{-2 \times 6^n - 3 \times 3^n}$  ومنه

أي  $u_n = -\frac{6^n}{-2 \times 6^n - 3 \times 3^n} = \frac{2^n \times 3^n}{2 \times 3^n \times 2^n + 3 \times 3^n}$

0.5

• حساب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2^n}{2^{n+1} + 3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{2^n \left( 2 + \frac{3}{2^n} \right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2 + 3 \left( \frac{1}{2} \right)^n} = \frac{1}{2}$

07 نقاط

### التمرين الرابع

I. لدينا :  $g(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} - \ln(e^x + 1)$

(1) حساب النهايات :

• حساب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$  :

0.25	$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^x + 1) = 0 \end{cases}$									
0.25	<p>- التفسير الهندسي : <math>y = 0</math> مستقيم مقارب أفقي للمنحني <math>(C_g)</math> بجوار <math>-\infty</math></p>									
0.25	<p>• حساب <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)</math> :</p> $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x + 1) = +\infty \end{cases}$ <p>لأن <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{e^x}{e^x + 1} - \ln(e^x + 1) \right) = -\infty</math></p>									
0.5	<p>(2) تبين أن <math>g'(x) = \frac{-e^{2x}}{(e^x + 1)^2}</math></p> <p>• لدينا : <math>g'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x \times e^x}{(e^x + 1)^2} - \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x} - e^{2x} - e^x}{(e^x + 1)^2}</math></p> <p>أي <math>g'(x) = \frac{-e^{2x}}{(e^x + 1)^2}</math></p>									
0.25	<p>• استنتاج اتجاه تغير الدالة <math>g</math> :</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th><math>x</math></th> <th><math>-\infty</math></th> <th><math>+\infty</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>-e^{2x}</math></td> <td></td> <td>-</td> </tr> <tr> <td><math>g'(x)</math></td> <td></td> <td>-</td> </tr> </tbody> </table>	$x$	$-\infty$	$+\infty$	$-e^{2x}$		-	$g'(x)$		-
$x$	$-\infty$	$+\infty$								
$-e^{2x}$		-								
$g'(x)$		-								
0.5	<p>• جدول التغيرات :</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th><math>x</math></th> <th><math>-\infty</math></th> <th><math>+\infty</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>g'(x)</math></td> <td></td> <td>-</td> </tr> <tr> <td><math>g(x)</math></td> <td>0</td> <td><math>-\infty</math></td> </tr> </tbody> </table>	$x$	$-\infty$	$+\infty$	$g'(x)$		-	$g(x)$	0	$-\infty$
$x$	$-\infty$	$+\infty$								
$g'(x)$		-								
$g(x)$	0	$-\infty$								
0.5	<p>(3) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي <math>x</math> : <math>g(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} + \ln(1+e^{-x}) - x</math></p> <p>• لدينا : <math>g(x) = \frac{e^x}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} - \ln \left[ e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right) \right]</math> ومنه :</p> <p>أي <math>g(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} - \ln(e^x) - \ln(1+e^{-x})</math></p>									

(4 أ) حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - (-x+1)]$

0.5

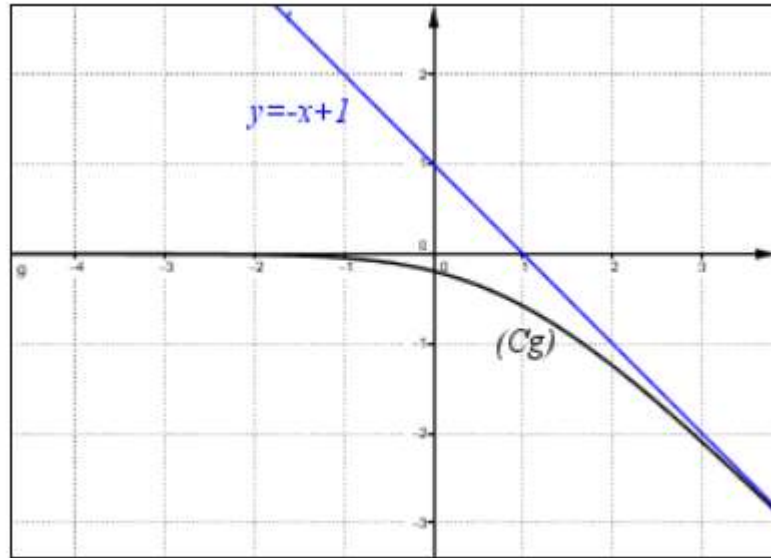
• لدينا :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - (-x+1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{1+e^{-x}} - \ln(1+e^{-x}) - x + x - 1 \right]$

ومنه  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - (-x+1)] = 0$  لأن  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+e^{-x}) = 0 \end{cases}$

0.25

• تفسير النتيجة : المستقيم ذي المعادلة  $y = -x + 1$  مقارب مائل للمنحني  $(C_g)$  عند  $-\infty$ .

(5) الرسم :



0.75

(6) استنتاج اشارة  $g(x)$  :

0.25

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$g(x)$		-

II. لدينا :  $f(x) = e^{-x} \ln(1+e^x)$

(1) البرهان أن :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

0.25

• نضع  $e^x = t$  وبالتالي عندما  $x \rightarrow -\infty$  فإن  $t \rightarrow 0$

إذن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} \ln(1+e^x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(e^x + 1)}{e^x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(t+1)}{t} = 1$

أي  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

0.25

• حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \ln(1+e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x + 1)}{e^x} = 0$

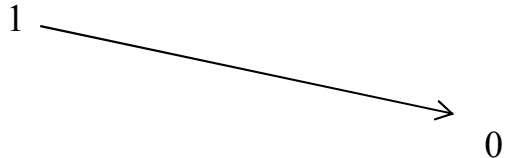
(2) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $f'(x) = e^{-x} \times g(x)$

0.5

• لدينا :  $f'(x) = -e^{-x} \times \ln(e^x + 1) + e^{-x} \times \frac{e^x}{e^x + 1} = e^{-x} \left( \frac{e^x}{e^x + 1} - \ln(e^x + 1) \right)$

أي  $f'(x) = e^{-x} \times g(x)$

0.25	$x$	$+\infty$ $-\infty$	<ul style="list-style-type: none"> <li>استنتاج اتجاه تغير الدالة <math>f</math> : إشارة <math>f'(x)</math> من إشارة <math>g(x)</math></li> </ul>
	$g(x)$	-	
	$f'(x)$	-	

0.5	$x$	$+\infty$ $-\infty$	<ul style="list-style-type: none"> <li>جدول تغيرات الدالة <math>f</math> :</li> </ul>
	$f'(x)$	-	
	$f(x)$	1 	

0.25	<p>(3) التحقق من أنه من أجل كل عدد حقيقي <math>x</math> : <math>\frac{1}{e^x + 1} = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}</math></p>	
	0.5	<p>من أجل كل عدد حقيقي <math>x</math> لدينا : <math>\frac{1}{e^x + 1} = \frac{1}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}</math></p> <p>حساب <math>\int_{-\ln 3}^0 \frac{1}{e^x + 1} dx</math></p> <p>أي <math>\int_{-\ln 3}^0 \frac{1}{e^x + 1} dx = -\ln 2 + \ln 4 = -\ln 2 + 2 \ln 2 = \ln 2</math></p>

0.5	<p>(4) حساب <math>\int_{-\ln 3}^0 f(x) dx</math> بالمكاملة بالتجزئة</p> <p><math>\int_{-\ln 3}^0 f(x) dx = \int_{-\ln 3}^0 e^{-x} \ln(e^x + 1) dx</math></p> <p>نضع : <math>u(x) = -e^{-x}</math> ومنه <math>u'(x) = e^{-x}</math></p> <p>و <math>v(x) = \ln(e^x + 1)</math> ومنه <math>v'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}</math></p> <p>إذن :</p> <p>أي <math>\int_{-\ln 3}^0 f(x) dx = -\ln 2 + e^{\ln 3} \ln(e^{-\ln 3} + 1) + \int_{-\ln 3}^0 \frac{1}{e^x + 1} dx</math></p> <p>أي <math>\int_{-\ln 3}^0 f(x) dx = 3 \ln \frac{4}{3}</math> إذن <math>\int_{-\ln 3}^0 f(x) dx = -\ln 2 + 3 \ln \left(\frac{1}{3} + 1\right) + \ln 2 = 3 \ln \frac{4}{3}</math></p>	
-----	--	--

العلامة	الإجابة
04 نقاط	التمرين الأول :
3×0.5	<p>• لدينا : <math>z_2 = \sqrt{3}(1+i)</math> و <math>z_1 = r^2(\sin\theta + i\cos\theta)</math> ، <math>z_0 = r(-\cos\theta + i\sin\theta)</math> حيث <math>\theta \in [0; \pi]</math> و <math>r \in \mathbb{R}^{*+}</math></p> <p>(1) كتابة الأعداد <math>z_2</math> و <math>z_1, z_0</math> على الشكل المثلثي :</p> <p>• لدينا : <math>z_0 = r(\cos(\pi - \theta) + i\sin(\pi - \theta))</math></p> $z_1 = r^2 \left( \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \right)$ $z_2 = \sqrt{3} \times \sqrt{2} \left( \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{6} \left( \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} \right)$
0.75	<p>(2) أ) تعيين العددين الحقيقيين <math>r</math> و <math>\theta</math> بحيث يكون : <math>z_1 = \overline{z_0}</math></p> <p>• لدينا : <math>\overline{z_0} = r(\cos(-\pi + \theta) + i\sin(-\pi + \theta))</math></p> <p>- <math>z_1 = \overline{z_0}</math> معناه</p> $r^2 \left( \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \right) = r(\cos(-\pi + \theta) + i\sin(-\pi + \theta))$ <p>ومنه : أي <math>\begin{cases} r^2 = r \\ \frac{\pi}{2} - \theta = -\pi + \theta + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}</math></p> $\begin{cases} r^2 - r = 0 \\ -2\theta = -\frac{\pi}{2} - \pi + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$ <p>وبالتالي : <math>\begin{cases} r = 0 \vee r = 1 \\ -2\theta = -\frac{3\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}</math> إذن <math>\begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{3\pi}{4} - k\pi (k \in \{0; 1\}) \end{cases}</math></p> <p>من أجل <math>k = 0</math> نجد : <math>\theta = \frac{3\pi}{4}</math> (مقبول لأن <math>\theta \in [0; \pi]</math>)</p> <p>من أجل <math>k = 1</math> نجد <math>\theta = \frac{3\pi}{4} - \pi</math> (مرفوض)</p> <p><math>\begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{3\pi}{4} \end{cases}</math> معناه <math>z_1 = \overline{z_0}</math></p>

(ب) تعيين قيم العدد الطبيعي  $n$  بحيث يكون العدد  $\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^n$  حقيقيا :

0.25

• لدينا : 
$$\frac{z_0}{z_1} = \frac{1 \left( \cos \left( \pi - \frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left( \pi - \frac{3\pi}{4} \right) \right)}{1^2 \left( \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} \right) \right)}$$

$$\frac{z_0}{z_1} = \cos \left( \pi - \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left( \pi - \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$

0.25

• اي 
$$\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^n = \cos \frac{n\pi}{2} + i \sin \frac{n\pi}{2}$$

• إذن  $\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^n$  حقيقي معناه  $\sin \frac{n\pi}{2} = 0$  أي  $\frac{n\pi}{2} = k\pi$  وبالتالي :  $n = 2k (k \in \mathbb{N})$

0.5

(3) لدينا :  $r = 1$  و  $\theta = \frac{\pi}{3}$

• إذن :  $z_1 = \sin \frac{\pi}{3} + i \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$  ،  $z_0 = -\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$

(أ) تعيين  $z_G$  لاحقة النقطة  $G$  مرجح الجملة المثقلة  $\{(A;2), (B;2), (C;-1)\}$

• لدينا :  $z_G = \frac{2z_A + 2z_B - z_C}{2+2-1} = \frac{-1 + i\sqrt{3} + \sqrt{3} + i - \sqrt{3} - i\sqrt{3}}{3} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}i$

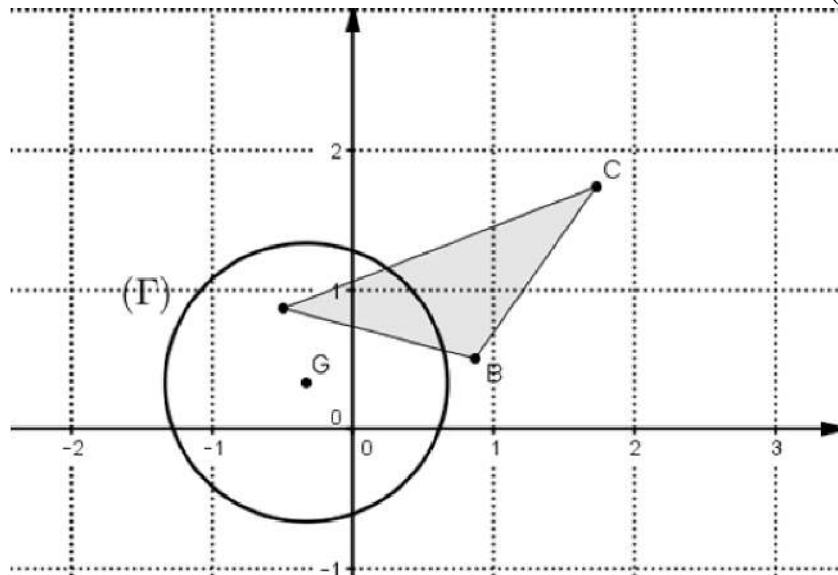
0.75

(ب) تعيين طبيعة المجموعة  $(\Gamma)$  :

• لدينا :  $\|3\overline{MG}\| = 3$  معناه  $\|2\overline{MA} + 2\overline{MB} - \overline{MC}\| = 3$

ومنه  $3MG = 3$  أي  $MG = 1$

وبالتالي  $(\Gamma)$  هي دائرة مركزها النقطة  $G$  ونصف قطرها  $R = 1$



04 نقاط	التمرين الثاني
0.25	<p>لدينا : <math>(E): 5x - 6y = 3</math></p> <p><b>(1 أ) اثبات أنه إذا كانت الثنائية <math>(x; y)</math> حل للمعادلة <math>(E)</math> فإن <math>x</math> مضاعف للعدد 3:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• لدينا : <math>5x - 6y = 3</math> تكافئ <math>5x = 3 + 6y</math></li> <li>أي <math>5x = 3(1 + 2y)</math></li> <li>• لدينا : <math>3 \wedge 5 = 1</math> و <math>3 \wedge 5x = 3</math> حسب مبرهنة غوص أي <math>x</math> مضاعف للعدد 3</li> </ul>
0.5	<p><b>(ب) تعيين حل خاص للمعادلة <math>(E)</math> :</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• نفرض <math>x = 3</math> وبالتالي : <math>y = \frac{5 \times 3 - 3}{6} = \frac{12}{6} = 2</math> أي الثنائية <math>(3; 2)</math> حل للمعادلة <math>(E)</math></li> </ul>
0.5	<p><b>حل المعادلة <math>(E)</math> :</b> لدينا : <math>5x - 6y = 5 \times 3 - 6 \times 2</math> يكافئ <math>5x - 5 \times 3 = 6y - 6 \times 2</math></p> <p>أي <math>(*) : 5(x - 3) = 6(y - 2)</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• لدينا : <math>6 \wedge 5 = 1</math> و <math>6 \wedge 5(x - 3) = 6</math> حسب مبرهنة غوص .</li> <li>أي <math>x - 3 = 6k (k \in \mathbb{Z})</math> وبالتالي <math>x = 6k + 3 (k \in \mathbb{Z})</math></li> <li>• من أجل <math>x = 6k + 3</math> نعوض في المعادلة <math>(*)</math> نجد : <math>5(6k + 3 - 3) = 6(y - 2)</math></li> <li>ومنه <math>y - 2 = 5k (k \in \mathbb{Z})</math> أي <math>y = 5k + 2 (k \in \mathbb{Z})</math></li> <li>- مجموعة حلول المعادلة : <math>S = \{(6k + 3; 5k + 2), k \in \mathbb{Z}\}</math></li> </ul>
0.75	<p><b>(ج) استنتاج حلول الجملة :</b></p> $(S) : \begin{cases} x \equiv -1 [6] \\ x \equiv -4 [5] \end{cases}$ <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\begin{cases} x = 6m - 1 \\ x = 5n - 4 \end{cases}</math> تكافئ <math>\begin{cases} x \equiv -1 [6] \\ x \equiv -4 [5] \end{cases}</math></li> <li>أي <math>6m - 1 = 5n - 4</math> ومنه <math>5n - 6m = 3</math></li> <li>ومنه : <math>n = 6k + 3</math> وبالتالي <math>x = 5(6k + 3) - 4 = 30k + 11 (k \in \mathbb{Z})</math></li> </ul>
0.75	<p><b>2- لدينا : <math>a = \overline{1\alpha 0\alpha 00}^3</math> و <math>b = \overline{\alpha\beta 0\alpha}^5</math></b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>تعيين <math>(\alpha; \beta)</math> بحيث تكون <math>(a; b)</math> حل للمعادلة <math>(E)</math> :</b></li> <li>- لدينا : <math>a = 1 \times 3^5 + \alpha \times 3^4 + \alpha \times 3^2 = 243 + 81\alpha + 9\alpha = 243 + 90\alpha</math></li> <li>ولدينا : <math>b = \alpha \times 5^3 + \beta \times 5^2 + \alpha \times 5^0 = 125\alpha + 25\beta + \alpha = 126\alpha + 25\beta</math></li> <li>مع <math>\alpha \leq 2</math> و <math>\beta \leq 4</math></li> <li>• <b>الثنائية <math>(a; b)</math> حل للمعادلة <math>(E)</math> معناه <math>5a - 6b = 3</math></b></li> <li>ومنه <math>5(243 + 90\alpha) - 6(126\alpha + 25\beta) = 3</math></li> <li>أي <math>1215 + 450\alpha - 756\alpha - 150\beta = 3</math> ومنه <math>-306\alpha - 150\beta = -1212</math></li> <li>بعد تقسيم الطرفين على العدد 3- نجد :</li> <li><math>102\alpha + 50\beta = 404</math> وبالتالي <math>(\alpha; \beta) = (2; 4)</math> حل للمعادلة</li> </ul>

04 نقاط	التمرين الثالث
0.5	<p>لدينا : <math>A(3;-2;2), B(6;1;5), C(6;-2;-1)</math> والمستوي <math>(P): x+y+z-3=0</math></p> <p><b>(1) البرهان على أن المثلث <math>ABC</math> قائم :</b></p> <p>- لدينا : <math>\overline{AB}(3;3;3)</math> ، <math>\overline{AC}(3;0;-3)</math> و <math>\overline{BC}(0;-3;-6)</math></p> <p>ولدينا : <math>AB = \sqrt{(3)^2 + (3)^2 + (3)^2} = 3\sqrt{3}</math> و <math>AC = \sqrt{(3)^2 + (0)^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}</math></p> <p>و <math>BC = \sqrt{(0)^2 + (-3)^2 + (-6)^2} = 3\sqrt{5}</math></p> <p>إذن : <math>BC^2 = AB^2 + AC^2</math> ومنه المثلث <math>ABC</math> قائم في النقطة <math>A</math>.</p>
0.5	<p><b>(2) البرهان على أن المستوي <math>(P)</math> عمودي على المستقيم <math>(AB)</math> ويمر من النقطة <math>A</math> :</b></p> <p>• لدينا : شعاع ناظمي للمستوي <math>(P)</math> <math>\vec{n}(1;1;1)</math></p> <p>- إذن : <math>\frac{3}{1} = \frac{3}{1} = \frac{3}{1} = 3</math> ومنه <math>\overline{AB} = 3\vec{n}</math> أي <math>\overline{AB} \parallel \vec{n}</math> وبالتالي <math>(AB) \perp (P)</math></p> <p>- نعوض بإحداثيات النقطة <math>A</math> في معادلة <math>(P)</math> نجد : <math>3 - 2 + 2 - 3 = 0</math> أي <math>A \in (P)</math></p> <p>وبالتالي : المستوي <math>(P)</math> عمودي على المستقيم <math>(AB)</math> ويمر من النقطة <math>A</math></p>
0.5	<p><b>(3) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي <math>(P')</math> العمودي على المستقيم <math>(AC)</math> والمار من النقطة <math>A</math> :</b></p> <p>لدينا : شعاع ناظمي للمستوي <math>(P')</math> <math>\overline{AC}(3;0;-3)</math></p> <p>الشكل : <math>3x - 3z + d = 0</math></p> <p>- تعيين قيمة <math>d</math> نعوض بإحداثيات النقطة <math>A</math> نجد :</p> <p><math>d = -3</math> ومنه <math>3(3) - 3(2) + d = 0</math></p> <p>وبالتالي معادلة للمستوي <math>(P')</math> : <math>3x - 3z - 3 = 0</math> أي <math>x - z - 1 = 0</math></p>
0.5	<p><b>(4) كتابة تمثيل وسيطي لـ <math>(\Delta)</math> مستقيم تقاطع المستويين <math>(P)</math> و <math>(P')</math> :</b></p> <p>• لدينا : <math>\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ x-z-1=0 \end{cases}</math> أي <math>\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ x=z+1 \end{cases}</math> وبالتالي</p> <p>إذن : <math>\begin{cases} z+1+y+z-3=0 \\ x=z+1 \end{cases}</math></p> <p>- نضع : <math>z = t</math> وبالتالي : <math>(t \in \mathbb{R})</math> : <math>\begin{cases} x = t+1 \\ y = -2t+2 \\ z = t \end{cases}</math></p>
0.5	<p><b>(5) أ) تبين أن المستقيم <math>(AD)</math> عمودي على المستوي <math>(ABC)</math></b></p> <p>• لدينا : <math>D(0;4;-1)</math> وبالتالي <math>\overline{AD}(-3;6;-3)</math> إذن :</p> <p>- <math>\overline{AD} \perp \overline{AB}</math> ومنه <math>\overline{AD} \cdot \overline{AB} = -3(3) + 6(3) - 3(3) = -18 + 18 = 0</math></p> <p>- <math>\overline{AD} \perp \overline{AC}</math> ومنه <math>\overline{AD} \cdot \overline{AC} = -3(3) + 6(0) - 3(-3) = -9 + 9 = 0</math></p> <p>- وبالتالي المستقيم <math>(AD)</math> عمودي على المستوي <math>(ABC)</math></p>

(ب) حساب حجم رباعي الوجوه  $ABCD$ :

$$v_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \times AD$$

- لدينا:  $S_{ABC} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{3\sqrt{3} \times 3\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{6}}{2}$  و

$$AD = \sqrt{(-3)^2 + (6)^2 + (-3)^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

- أي  $v_{ABCD} = \frac{1}{3} \times \frac{9\sqrt{6}}{2} \times 3\sqrt{6} = 27uv$

0.5

(ج) تبيان أن قيس الزاوية  $\widehat{BDC}$  هو  $\frac{\pi}{4} rad$ :

- لدينا:  $\overrightarrow{DB}(6; -3; 6)$  و  $\overrightarrow{DC}(6; -6; 0)$

وبالتالي:  $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = 6 \times 6 - 3(-6) + 6 \times 0 = 36 + 18 = 54$

- ولدينا:  $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = \|\overrightarrow{DB}\| \times \|\overrightarrow{DC}\| \times \cos(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC})$

أي  $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = \sqrt{81} \times \sqrt{72} \times \cos(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC})$

ومنه  $\widehat{BDC} = 45^\circ$   $\cos(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}) = \frac{54}{9 \times 6\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

0.5

(د) حساب مساحة المثلث  $BDC$ :

$$S_{BDC} = \frac{1}{2} DB \times DC \times \sin \widehat{BDC} = \frac{1}{2} \times 9 \times 6\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 27us$$

- استنتاج المسافة بين النقطة  $A$  والمستوي  $(BDC)$ :

لدينا:  $v_{ABDC} = \frac{1}{3} \times S_{BDC} \times d(A, (BDC)) = \frac{1}{3} \times 27 \times d(A, (BDC)) = 27$

ومنه  $d(A, (BDC)) = \frac{27}{\frac{1}{3} \times 27} = 3$

0.5

08 نقاط

التمرين الرابع

1. لدينا:  $f(x) = x - (x^2 + 1)e^{-x+1}$

(1) (أ) حساب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ :

0.25

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x+1} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -(x^2 + 1)e^{-x+1} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \end{cases}$$

- لأن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x - (x^2 + 1)e^{-x+1}] = -\infty$

• تبيان أن:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ :

0.25

لدينا:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x - (x^2 + 1)e^{-x+1}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - \frac{x^2 + 1}{e \times e^x} \right)$

	$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \end{cases}$ <p>أي <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - \frac{x^2}{e} \times \frac{1}{e} + \frac{1}{e} \times \frac{1}{e^x} \right) = +\infty</math> لأن</p>									
0.5	<p>(ب) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي <math>x</math> : <math>f'(x) = 1 + (x-1)^2 e^{-x+1}</math></p> <p>• لدينا : <math>f'(x) = 1 - [2xe^{-x+1} + (x^2+1)(-e^{-x+1})] = 1 - (2x - x^2 - 1)e^{-x+1}</math></p> <p>وبالتالي : <math>f'(x) = 1 + (x^2 - 2x + 1)e^{-x+1} = 1 + (x-1)^2 e^{-x+1}</math></p>									
0.25	<p>(ج) استنتاج اتجاه تغير الدالة <math>f</math> :</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th><math>x</math></th> <th><math>-\infty</math></th> <th><math>+\infty</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>(x-1)^2 e^{-x+1}</math></td> <td></td> <td>+</td> </tr> <tr> <td><math>f'(x)</math></td> <td></td> <td>+</td> </tr> </tbody> </table>	$x$	$-\infty$	$+\infty$	$(x-1)^2 e^{-x+1}$		+	$f'(x)$		+
$x$	$-\infty$	$+\infty$								
$(x-1)^2 e^{-x+1}$		+								
$f'(x)$		+								
0.5	<p>• جدول التغيرات :</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th><math>x</math></th> <th><math>-\infty</math></th> <th><math>+\infty</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>f'(x)</math></td> <td></td> <td>+</td> </tr> <tr> <td><math>f(x)</math></td> <td><math>-\infty</math></td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> </tbody> </table>	$x$	$-\infty$	$+\infty$	$f'(x)$		+	$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$
$x$	$-\infty$	$+\infty$								
$f'(x)$		+								
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$								
0.25	<p>(2) تبيان أن المستقيم <math>(\Delta)</math> ذي المعادلة <math>y = x</math> مقارب مائل لـ <math>(C_f)</math> عند <math>+\infty</math> :</p> <p>• لدينا :</p> $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - (x^2 + 1)e^{-x+1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 e^{-x+1} + e^{-x+1}) = 0$ <p>ومنه <math>(\Delta)</math> مستقيم مقارب مائل للمنحني <math>(C_f)</math> عند <math>+\infty</math></p>									
0.5	<p>• دراسة الوضعية النسبية للمنحني <math>(C_f)</math> بالنسبة إلى المستقيم <math>(\Delta)</math> :</p> <p>لدينا : <math>f(x) - x = x - (x^2 + 1)e^{-x+1} - x = -(x^2 + 1)e^{-x+1}</math></p> <p>إذن <math>f(x) - x &lt; 0</math> ومنه <math>(C_f)</math> يقع تحت المستقيم <math>(\Delta)</math> من أجل كل عدد حقيقي <math>x</math></p>									
0.5	<p>(3) تبيان أن المعادلة <math>f(x) = 0</math> تقبل حلا وحيدا <math>\alpha</math> حيث <math>1.8 &lt; \alpha &lt; 1.9</math> :</p> <p>• لدينا <math>f</math> مستمرة ورتبية تماما على المجال <math>[1.8; 1.9]</math></p> <p>ولدينا <math>f(1.8) = 1.8 - ((1.8)^2 + 1)e^{-1.8+1} = -0.11</math></p> <p>وبالتالي <math>f(1.8) \times f(1.9) &lt; 0</math> و <math>f(1.9) = 1.9 - ((1.9)^2 + 1)e^{-1.9+1} = 0.03</math></p> <p>حسب مبرهنة ال قيم المتوسطة المعادلة <math>f(x) = 0</math> تقبل حلا وحيدا <math>\alpha</math> حيث <math>1.8 &lt; \alpha &lt; 1.9</math>.</p>									

(4) كتابة معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C<sub>f</sub>) عند النقطة ذات الفاصلة 1:

0.5

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$
$$(T): y = x - 2 \quad \text{أي} \quad y = 1 \times (x-1) - 1 = x - 2$$

(5) تبيان أن  $f''(x) = -(x-1)(x-3)e^{-x+1}$ :

• لدينا:  $f''(x) = 2(x-1)e^{-x+1} + (x-1)^2 \times (-e^{-x+1}) = (x-1)e^{-x+1}(2-x+1)$   
أي  $f''(x) = -(x-1)(x-3)e^{-x+1}$ .

• استنتاج أن (C<sub>f</sub>) يقبل نقطتي انعطاف:

01

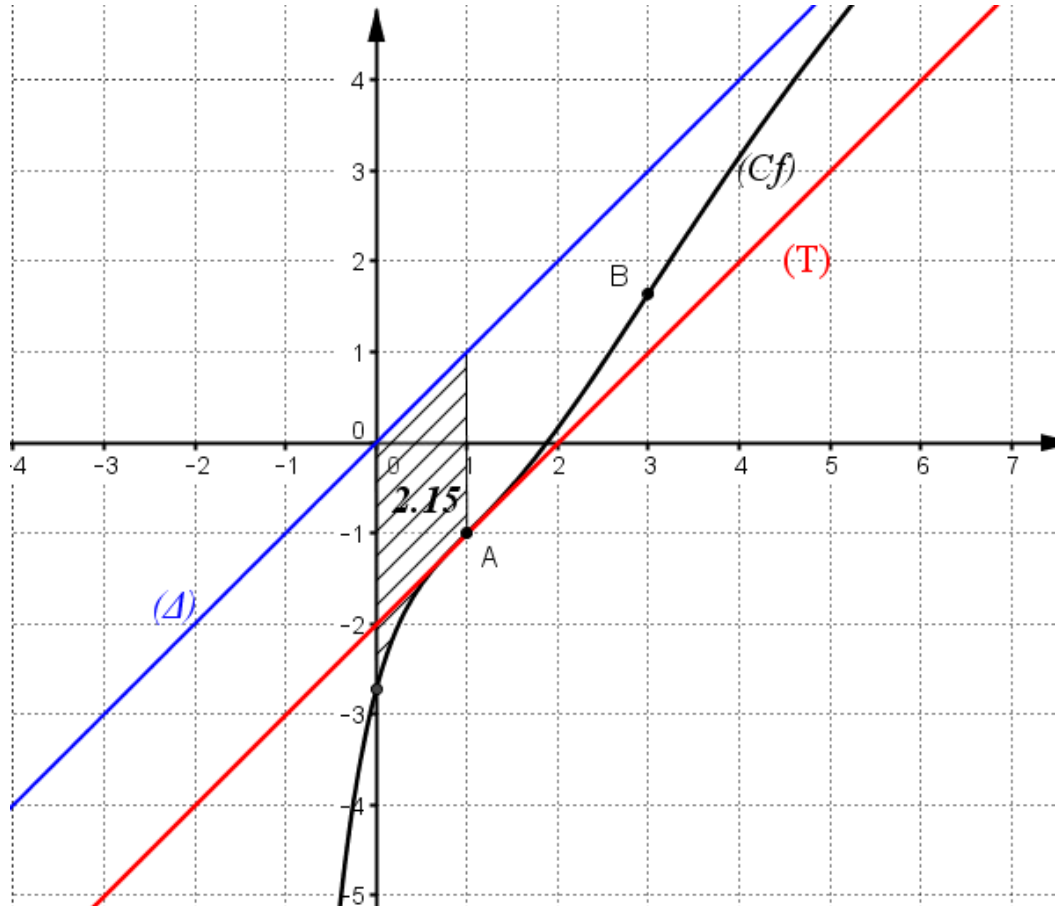
- جدول إشارة  $f''(x)$ :

$x$	$-\infty$	1	3	$+\infty$		
$f''(x)$		-	0	+	0	-

• المشتقة الثانية  $f''(x)$  تتعدم من أجل القيمتين  $x=1$  و  $x=3$  مغيرة إشارتها إذن النقطتين  $(A(1; f(1)), B(3; f(3)))$  نقطتي انعطاف للمنحنى (C<sub>f</sub>)

(6) حساب  $f(3), f(0)$ :  $f(3) = 3 - 9e^{-2} = 1.65, f(0) = -e = -2.71$   
الرسم:

01



0.5	<p><b>(7) المناقشة البيانية لحلول المعادلة : <math>f(x) = x + m</math></b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• هي فواصل نقط تقاطع المنحني <math>(C_f)</math> مع المستقيم ذي المعادلة <math>y = x + m</math> الموازي لكل من <math>(T)</math> و <math>(\Delta)</math> .</li> <li>• إذا كان <math>m \in ]-\infty; -e[</math> المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا .</li> <li>• إذا كان <math>m = -e</math> المعادلة تقبل حلا وحيدا معدوما .</li> <li>• إذا كان <math>m \in ]-e; 0[</math> المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا .</li> <li>• إذا كان <math>m \in [0; +\infty[</math> المعادلة ليس لها حلا .</li> </ul>
0.5	<p>II. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم <math>n</math> نضع : <math>I_n = \int_0^1 x^n e^{-x+1} dx</math></p> <p><b>1- (أ) تبيان أن الدالة <math>G</math> المعرفة على <math>\mathbb{R}</math> بـ : <math>G(x) = -(x+1)e^{-x+1}</math> هي دالة أصلية للدالة <math>g</math> حيث <math>g(x) = xe^{-x+1}</math> على المجموعة <math>\mathbb{R}</math> :</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• لدينا :</li> </ul> $G'(x) = -[e^{-x+1} - (x+1)e^{-x+1}] = -(e^{-x+1} - xe^{-x+1} - e^{-x+1}) = xe^{-x+1} = g(x)$ <p>ومنه <math>G</math> دالة أصلية للدالة <math>g</math> على <math>\mathbb{R}</math> .</p>
0.25	<p><b>(ب) حساب <math>I_1</math> :</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• لدينا : <math>I_1 = \int_0^1 xe^{-x+1} dx = [- (x+1)e^{-x+1}]_0^1 = -2e^0 + e = e - 2</math></li> </ul>
0.5	<p><b>2- (أ) تبيان أن <math>I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n</math></b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• لدينا : <math>I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x+1} dx</math></li> </ul> <p>نضع : <math>u(x) = x^{n+1}</math> ومنه <math>u'(x) = (n+1)x^n</math></p> <p>ونضع : <math>v(x) = -e^{-x+1}</math> ومنه <math>v'(x) = e^{-x+1}</math></p> <p>وبالتالي : <math>I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x+1} dx = [-x^{n+1} e^{-x+1}]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n (-e^{-x+1}) dx</math></p> <p>ومنه : <math>I_{n+1} = -1 + (n+1) \int_0^1 x^n e^{-x+1} dx = -1 + (n+1)I_n</math></p>
0.25	<p><b>(ب) حساب <math>I_2</math> :</b></p> $I_2 = -1 + (1+1)I_1 = -1 + 2(e - 2) = 2e - 5$
0.5	<p><b>3- حساب المساحة للحيز المستوي المحدد بالمنحني <math>(C_f)</math> والمستقيم <math>(\Delta)</math> والمستقيمين الذين معادلتيهما <math>x = 1, x = 0</math> :</b></p> $S = \int_0^1 [y - f(x)] dx = \int_0^1 x - x + (x^2 + 1)e^{-x+1} dx = \int_0^1 (x^2 + 1)e^{-x+1} dx$ <p>أي <math>S = \int_0^1 x^2 e^{-x+1} dx + \int_0^1 e^{-x+1} dx = I_2 + [-e^{-x+1}]_0^1</math></p> $S = (2e - 5 - 1 + e)us = (3e - 6)cm^2 = 2.15cm^2$