

اختر أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

I. حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول المركب z التالية :

$$(z-2)(z^2+2z+4)=0$$

II. نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس المباشر (O, \vec{u}, \vec{v})

النقط A, B, C لواحقتها على الترتيب $z_A = -1+i\sqrt{3}$, $z_B = -1-i\sqrt{3}$ و $z_C = 2$.

$$1- \text{أ) بين أن : } \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

ب) عين طبيعة المثلث ABC .

ج) عين مركز ونصف قطر الدائرة (\mathcal{C}) المحيطة بالمثلث ABC . أرسم (\mathcal{C}) .

2- أ) عين الطبيعة والعناصر الهندسية للمجموعة (Γ) مجموعة النقط M من

$$\text{المستوي ذات اللاحقة } z \text{ والتي تحقق } 2(z + \bar{z}) + z\bar{z} = 0$$

ب) تحقق أن النقطتين A و B تنتميان إلى (Γ) .

3- ليكن R الدوران الذي مركزه النقطة A وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

أ) عين صورة النقطة B بالدوران R .

ب) عين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالدوران R ثم استنتج طبيعة

الرباعي $ABCD$.

ج) عين صورة المجموعة (Γ) بالدوران R .

التمرين الثاني: (05 نقاط)

في الفضاء المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط

$$C(5; 4; -3), B(3; 2; -4), A(1; 4; -5)$$

$$D(-2; 8; 4) \text{ و الشعاع } \vec{u}(1; 5; -1).$$

1) بين أن $x - 2z - 11 = 0$ معادلة للمستوي (ABC) .

(2) أكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (T) المار من النقطة D والموازي للشعاع \bar{u} .

(3) ليكن (P) المستوي ذي المعادلة $x - y - z = 7$.

(أ) بين المستويين (ABC) و (P) يتقاطعان وفق المستقيم (Δ) المعرف بالتمثيل

$$\begin{cases} x = 11 + 2t \\ y = 4 + t \\ z = t \end{cases} \text{ الوسيطي : } (t \in \mathbb{R})$$

(ب) أثبت أن (T) و (Δ) ليسا من نفس المستوي.

(4) تعطى النقطتان $E(3;0;-4)$ و $F(-3;3;5)$. تحقق أن النقطة E تنتمي إلى (Δ) و أن F تنتمي إلى (T).

(5) لتكن (S) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث $\overline{ME} \cdot \overline{FE} = \alpha$ ، حيث $\alpha \in \mathbb{R}$.

(أ) جد بدلالة α معادلة ديكارتية للمجموعة (S) واستنتج أن (S) مستوي طلب تعيين شعاع ناظمي له.

(ب) عين قيمة α حتى يكون (S) المستوي المحوري للقطعة [FE].

التمرين الثالث (04 نقاط)

(u_n) المعرفة على المجموعة \mathbb{N} بـ : $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$$

1- أحسب u_3, u_2, u_1 .

2- (أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \leq n + 3$.

(ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

3- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - n$.

(أ) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

(ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$ ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

4- نضع : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$ و $T_n = \frac{S_n}{n^2}$

- أحسب بدلالة n المجموع S_n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$.

التمرين الرابع (07 نقاط)

I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجموعة \mathbb{R} بـ: $g(x) = 1 + (1-x)e^{-x+2}$.
(1) أدرس تغيرات الدالة g.

(2) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $g(x) \geq 0$.

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة \mathbb{R} بـ: $f(x) = x - 1 + xe^{-x+2}$.
نسمي (C_f) المنحني الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x) = g(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

3- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)]$ ثم فسّر النتيجة هندسياً.

4- أدرس الوضعية النسبية للمنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x - 1$.

5- أ) بين أن نقطة انعطاف للمنحني (C_f) هي $I(2;3)$.

ب) بين أن المنحني (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها x_0 حيث $0 < x_0 < 0.2$.

ج) بين المنحني (C_f) يقبل مماساً (T) يوازي المستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلة ديكارتية له.

د) أحسب $f(-1)$ ثم أرسم (T)، (Δ) و (C_f) .

6- ناقش بيانياً وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات

المجهول الحقيقي x التالية: $xe^{-x+2} - 1 - m = 0$: (E).

7- نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجموعة \mathbb{R} بـ:

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - (1+x)e^{-x+2} + 3$$

بين أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على \mathbb{R} والتي تنعدم من أجل القيمة 2 للمتغير.

الموضوع الثاني

التمرين الأول (05 نقاط)

- في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط $A(3; -2; 2)$, $B(6; 1; 5)$, $C(6; -2; -1)$ والمستوي $(P): x + y + z - 3 = 0$
- برهن أن المثلث ABC قائم .
 - برهن أن المستوي (P) عمودي على المستقيم (AB) ويمر من النقطة A .
 - أكتب معادلة ديكرتية للمستوي (P') المستوي العمودي على (AC) و المار من النقطة A .
 - أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) مستقيم تقاطع كلا من المستويين (P) و (P') .
 - أ نعتبر النقطة $D(0; 4; -1)$. بين أن المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC) .
- ب) أحسب حجم رباعي الوجوه ABCD .
- ج) بين أن قياس الزاوية BDC هو $\frac{\pi}{4}$ rad .
- د) أحسب مساحة المثلث BDC ثم استنتج المسافة بين النقطة A والمستوي (BDC) .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

- نعتبر العددين المركبين z_1 و z_2 حيث $z_1 = 3 + i\sqrt{3}$ و $z_2 = -\sqrt{3} + 3i$.
- أكتب العددين z_1 و z_2 على الشكل الأسّي .
 - في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس المباشر (O, \vec{u}, \vec{v}) نعتبر النقط A, B و E التي لواحقها z_1, z_2 و $z_3 = z_1 + z_2$ على الترتيب .
 - برهن أن المثلث OAB قائم ومتساوي الساقين .
 - استنتج أن الرباعي OAEB مربع .
 - أ) بين أن : $OE = 2\sqrt{6}$ و أن $(\vec{u}; \overline{OE}) = \frac{5\pi}{12}$.
 - عين القيمتين المضبوطتين لكل من $\cos \frac{5\pi}{12}$ و $\sin \frac{5\pi}{12}$.

ج) أحسب Z_3^{2016} .

د) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $\left(\frac{Z_3}{2\sqrt{6}}\right)^n$ حقيقيا.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بـ: $u_0 = \frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 1}$$

1- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2u_n + 1}$.

2- أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $0 < u_n < \frac{1}{2}$.

ب) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1 - 2u_n)}{2u_n + 1}$ ثم بين أن

المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متزايدة.

ج) هل $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة؟ عين نهايتها.

3- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{3^n u_n}{2u_n - 1}$

أ) أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ هندسية أساسها $q = 6$.

ب) أحسب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج أن $u_n = \frac{2^n}{3 + 2^{n+1}}$.

ج) أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

● الجزء الأول:

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بما يلي: $g(x) = x^2 - 2 \ln x$.

1- أدرس تغيرات الدالة g .

2- استنتج إشارة $g(x)$ عندما يتغير x في المجال $]0; +\infty[$.

● الجزء الثاني:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بما يلي :

$$f(x) = 1 - x - \frac{2}{x}(1 + \ln x)$$

نسمي (C_f) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1- أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x ، $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$.

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

2- أ) بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = 1 - x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

ج) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث ، $0.41 < \alpha < 0.42$.

د) بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلة ديكارتية له .

د) أرسم (Δ) ، (T) و (C_f) .

3- ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة

ذات المجهول الحقيقي x التالية : $f(x) = m - x$: (E) .

تمنياتي لكم جميعا بالتوفيق

والنجاح في البكالوريا



التمرين الأول :

I. حل المعادلة $(E) : (z-2)(z^2+2z+4)=0$

$$z^2+2z+4=0 \text{ أو } z-2=0 \text{ يكافئ } (z-2)(z^2+2z+4)=0$$

$$z-2=0 \text{ معناه } z=2$$

• حل المعادلة $(*) : z^2+2z+4=0$

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 4 = 4 - 16 = -12$$

$$\Delta = 12i^2 = (2i\sqrt{3})^2 \text{ نضع}$$

- المعادلة $(*)$ تقبل حلين مركبين متمايزين هما :

$$z_2 = \frac{-2+2i\sqrt{3}}{2} = -1+i\sqrt{3}, \quad z_1 = \frac{-2-2i\sqrt{3}}{2} = -1-i\sqrt{3}$$

مجموعة حلول المعادلة (E) هي $S = \{2, -1+i\sqrt{3}, -1-i\sqrt{3}\}$

II. لدينا : $z_C = 2$ و $z_B = -1-i\sqrt{3}, z_A = -1+i\sqrt{3}$

$$-1 \text{ أ تبيان أن : } \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\bullet \text{ لدينا : } \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{-1-i\sqrt{3}-2}{-1+i\sqrt{3}-2} = \frac{-3-i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}} = \frac{(-3-i\sqrt{3})(-3-i\sqrt{3})}{(-3+i\sqrt{3})(-3-i\sqrt{3})}$$

$$\bullet \text{ ومنه } \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{9+6i\sqrt{3}-3}{12} = \frac{6}{12} + i\frac{6\sqrt{3}}{12} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\bullet \text{ أي } \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ لان :}$$

$$\left| \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \right| = \left| \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

$$\text{Arg} \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

ب) تعيين طبيعة المثلث ABC :

$$\bullet \text{ لدينا : } \left| \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \right| = 1 \text{ ومنه } \frac{CB}{CA} = 1 \text{ أي } CB = CA$$

ولدينا : $\text{Arg} \left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ أي $(\overline{CA}; \overline{CB}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ومنه ABC مثلث متقايس الأضلاع.

ج) تعيين مركز ونصف قطر الدائرة (\mathcal{C}) المحيطة بالمثلث ABC :

• لدينا : $|z_C| = 2 = OC$ و $|z_B| = 2 = OB$ ، $|z_A| = 2 = OA$ وبالتالي : $OA = OB = OC = 2$ أي النقط A, B, C تنتمي إلى دائرة (\mathcal{C}) مركزها $O(0;0)$ ونصف قطرها $r = 2$

2- أ) تعيين طبيعة (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي التي تحقق:

$$2(z + \bar{z}) + z\bar{z} = 0$$

$$2(x + iy + x - iy) + x^2 + y^2 = 0 \quad \text{معناه} \quad 2(z + \bar{z}) + z\bar{z} = 0$$

$$\text{ومنه} \quad x^2 + y^2 + 4x = 0 \quad \text{وبالتالي} \quad (x+2)^2 + y^2 = 4$$

أي أن (Γ) هي دائرة مركزها النقطة $\Omega(-2;0)$ ونصف قطرها $r = 2$.

ب) التحقق من أن A و B تنتميان إلى (Γ):

$$\Omega A = |z_A - z_\Omega| = |-1 + i\sqrt{3} + 2| = |1 + i\sqrt{3}| = 2 = r$$

$$\Omega B = |z_B - z_\Omega| = |-1 - i\sqrt{3} + 2| = |1 - i\sqrt{3}| = 2 = r$$

وبالتالي A و B تنتميان إلى (Γ).

3- لدينا R دوران مركزه النقطة A وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

أ) تعيين صورة النقطة B بالدوران R :

$$\text{لدينا} : R(B) = B' \quad \text{معناه} \quad z_{B'} = az_B + b$$

$$\text{ولدينا} : a = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \quad \text{أي} \quad a = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ولدينا كذلك} : b = (1-a)z_A = \left(1 - \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-1 + i\sqrt{3}) = 1 + i\sqrt{3}$$

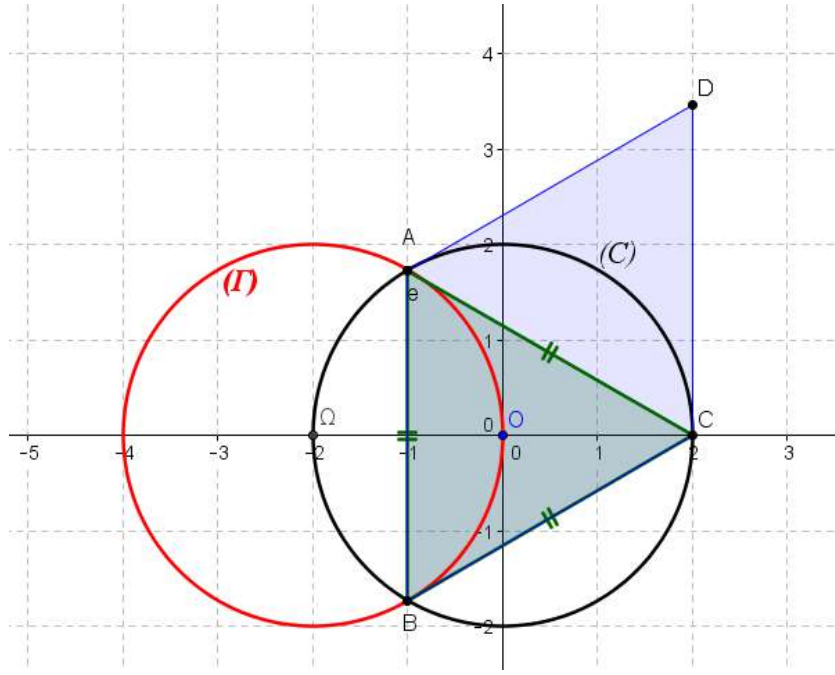
$$\text{إذن} : z_{B'} = \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-1 - i\sqrt{3}) + 1 + i\sqrt{3} = 2 = z_C$$

ومنه $R(B) = C$

أ) تعيين لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالدوران R :

$$z_D = \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_C + 1 + i\sqrt{3} = \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times 2 + 1 + i\sqrt{3} = 2 + 2i\sqrt{3}$$

$$\text{أي} \quad z_D = 2 + 2i\sqrt{3}$$



• استنتاج طبيعة الرباعي $ABCD$:

الرباعي $ABCD$ معين لأن :

• $ABCD$ متوازي أضلاع لأن : $z_{\overline{AB}} = -1 + i\sqrt{3} + 1 + i\sqrt{3} = 2i\sqrt{3}$ و

$$z_{\overline{DC}} = 2 + 2i\sqrt{3} - 2 = 2i\sqrt{3}$$

$$\text{أي } z_{\overline{AB}} = z_{\overline{DC}} = 2i\sqrt{3}$$

ولدينا : $BC = CD$ لأن $R(B) = C$ و $R(C) = D$

ج) صورة (Γ) بالدوران R :

هي (\mathcal{C}) لأن $R(\Omega) = O$ و $R(B) = C$

التمرين الثاني :

$\vec{u}(1;5;-1)$ و $D(-2;8;4), C(5;4;-3), B(3;2;-4), A(1;4;-5)$

1) تبين أن $x - 2z - 11 = 0$ معادلة للمستوي (ABC) :

نعوض بإحداثيات النقط C, B, A في المعادلة السابقة نجد :

$$\begin{cases} 1 - 2(-5) - 11 = 11 - 11 = 0 \\ 3 - 2(-4) - 11 = 11 - 11 = 0 \\ 5 - 2(-3) - 11 = 11 - 11 = 0 \end{cases}$$

ومنه $x - 2z - 11 = 0$ معادلة للمستوي (ABC)

S

2) كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (T) المار من النقطة D والموازي للشعاع $\vec{u}(1;5;-1)$

- أي $\vec{u}(1;5;-1)$ شعاع توجيه للمستقيم (T).

$$(T): \begin{cases} x = t - 2 \\ y = 5t + 8 \\ z = -t + 4 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

3) لدينا: (P): $x - y - z = 7$

أ) تبيان أن المستويين (ABC) و (P) يتقاطعان وفق المستقيم

$$(\Delta): \begin{cases} x = 11 + 2t \\ y = 4 + t \\ z = t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

- نعوض جملة التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) في معادلة (ABC) نجد : $11 + 2t - 2t - 11 = 0$ ومنه $0t = 0$.

- نعوض جملة التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) في معادلة (P) نجد : $11 + 2t - 4 - t - t - 7 = 0$ أي $0t = 0$

وبالتالي (Δ) محتوي في كل المستويين (ABC) و (P) فهما إذن متقاطعان وفق المستقيم (Δ).

ب) اثبات أن (T) و (Δ) ليسا من نفس المستوي :

- لدينا : $\frac{1}{1} \neq \frac{5}{-1} \neq \frac{-1}{-1}$ وبالتالي \vec{u} و \vec{u}' غير مرتبطين خطيا أي أن (T) و (Δ) غير

متوازيين . فهما إما متقاطعان أو ليسا من نفس المستوي .

$$\text{نحل الجملة } \begin{cases} 11 + 2t = t' - 2 \dots (1) \\ 4 + t = 5t' + 8 \dots (2) \\ t = -t' + 4 \dots (3) \end{cases} \text{ فنجد } \begin{cases} t = 4 \\ t' = 0 \end{cases}$$

بالتعويض في المعادلة (1) نجد : $11 + 2(4) = 0 - 2$ (مستحيلة) ومنه (T) و (Δ) ليسا من نفس المستوي .

4) لدينا : $E(3;0;-4)$ و $F(-3;3;5)$.

• التحقق من أن $E \in (\Delta)$:

نعوض بإحداثيات النقطة E في جملة التمثيل الوسيطي لـ (Δ) نجد :

$$\begin{cases} 3 = 11 + 2t \\ 0 = 4 + t \\ t = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -4 \\ t = -4 \\ t = -4 \end{cases}$$

ومنه $E \in (\Delta)$

• التحقق من أن $F \in (T)$:

نعوض بإحداثيات النقطة F في جملة التمثيل الوسيطية لـ (T) نجد :

$$\begin{cases} -3 = t - 2 \\ 3 = 5t + 8 \\ 5 = -t + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -1 \\ t = -1 \end{cases}$$

ومنه $F \in (T)$

(5) لدينا : $\overline{ME} \cdot \overline{FE} = \alpha (\alpha \in \mathbb{R})$

أ) تعيين معادلة ديكارتية للمجموعة (S) بدلالة α

• لدينا : $\overline{ME}(3-x; -y; -4-z)$ و $\overline{FE}(6; -3; -9)$

$$\overline{ME} \cdot \overline{FE} = \alpha \text{ معناه } 6(3-x) - 3(-y) - 9(-4-z) = \alpha$$

$$\text{أي } 18 - 6x + 3y + 36 + 9z = \alpha \text{ ومنه } -6x + 3y + 9z + 54 - \alpha = 0$$

طبيعة المجموعة (S) : هي مستو شعاع ناظمي له $\vec{n}(-6; 3; 9)$

ب) تعيين قيمة α بحيث يكون (S) المستوي المحوري للقطعة $[FE]$:

• لدينا (S) المستوي المحوري للقطعة $[FE]$ معناه (S) يمر من منتصف $[FE]$

وليكن I

$$x_I = \frac{x_E + x_F}{2} = \frac{3-3}{2} = 0$$

$$y_I = \frac{y_E + y_F}{2} = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2} \text{ إذن -}$$

$$z_I = \frac{z_E + z_F}{2} = \frac{-4+5}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{- بالتعويض في المعادلة السابقة نجد : } -6 \times 0 + 3 \times \frac{3}{2} + 9 \times \frac{1}{2} + 54 - \alpha = 0$$

$$\text{أي } 9 + 54 - \alpha = 0 \text{ وبالتالي } \alpha = 63$$

التمرين الثالث

• لدينا : $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$

1- حساب u_3, u_2, u_1 :

$$u_1 = \frac{7}{3}; u_2 = \frac{26}{9}; u_3 = \frac{97}{27}$$

2- أم البرهان بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \leq n + 3$

• نسمي $P(n)$ هذه الخاصية .

(1) من أجل $n = 0$ لدينا :

$u_0 = 2$ وبالتالي $u_0 \leq 3$ ومنه $P(n)$ صحيحة من أجل $n=0$.
2 نفرض صحة $P(n)$ أي نفرض أن $u_n \leq n+3$ ونبرهن على صحة $P(n+1)$ أي
 نبرهن أن: $u_{n+1} \leq n+4$

• لدينا: $u_n \leq n+3$ ومنه $\frac{2}{3}u_n \leq \frac{2}{3}(n+3)$ إذن $\frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n+1 \leq \frac{2}{3}(n+3) + \frac{1}{3}n+1$

وبالتالي: $u_{n+1} \leq \frac{2}{3}n+2 + \frac{1}{3}n+1$ أي $u_{n+1} \leq n+3$ ومنه $u_{n+1} \leq n+3 \leq n+4$

إذن $u_{n+1} \leq n+4$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة.

حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

ب) البرهان على أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n+3-u_n)$

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n+1 - u_n = \frac{1}{3}(2u_n + n+3 - 3u_n) = \frac{1}{3}(n+3-u_n)$$

• استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

- لدينا: $u_n \leq n+3$ ومنه $n+3-u_n \geq 0$ أي $\frac{1}{3}(n+3-u_n) \geq 0$

وبالتالي $u_{n+1} - u_n \geq 0$ ومنه (u_n) متزايدة.

3- لدينا: $v_n = u_n - n$ من أجل كل عدد طبيعي n .

أ) البرهان على أن المتتالية (v_n) هندسية:

• لدينا: $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n+1 - n - 1 = \frac{2}{3}(u_n - n)$

أي $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$ ومنه (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ وحدها الأول $v_0 = u_0 - 0 = 2$

ب) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$

• لدينا: $u_n = v_n + n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$

حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^n + n \right] = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = 0$

لدينا: $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$ و $T_n = \frac{S_n}{n^2}$

4) حساب S_n بدلالة n :

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n + (1 + 2 + \dots + n) = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + \frac{n}{2}(1 + n)$$

$$S_n = 2 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} + \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2} = 2 \times 3 \left(1 - \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) + \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2} \text{ وبالتالي}$$

$$S_n = 6 - 4 \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 \text{ ومنه}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \frac{1}{2} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{6}{n^2} - \frac{4}{n^2} \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

التمرين الرابع

1) دراسة تغيرات الدالة g :

• حساب النهايات:

- لدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x+2} = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + (1-x)e^{-x+2}) = +\infty$

لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + (1-x)e^{-x+1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^2 \times e^{-x} - e^2 \times x e^{-x}) = 1$

• حساب المشتقة:

$$g'(x) = -e^{-x+2} - (1-x)e^{-x+1} = (x-2)e^{-x+2}$$

• جدول التغيرات

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	0	1

استنتاج أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) \geq 0$:

• من أجل $x \in \mathbb{R}$ فإن $g(x) \in [0; +\infty[$ ومنه $g(x) \geq 0$

$$f(x) = x - 1 + x e^{-x+2} \text{ لدينا:}$$

1- حساب النهايات:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-x+2} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1) = -\infty \end{cases} \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1 + x e^{-x+2}) = -\infty$$

S

$$\text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1 + xe^{-x+2}) = +\infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x+2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \times \frac{1}{e^2} = 0 \end{cases}$$

2- تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f'(x) = g(x)$

$$\bullet \text{ لدينا : } f'(x) = 1 + e^{-x+2} - xe^{-x+2} = 1 + (1-x)e^{-x+2} = g(x)$$

$$\text{ومنه } f'(x) = g(x)$$

• استنتاج اتجاه تغير الدالة f : إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	

• جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3- حساب

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1 + xe^{-x+2} - x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x+2} = 0$$

• التفسير الهندسي:

المستقيم ذي المعادلة $y = x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

4- دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى $y = x-1$ (Δ):

• ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$:

$$- \text{ لدينا : } f(x) - y = xe^{-x+2}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$	-	0	+
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ)	(C_f)	(C_f) فوق (Δ) يقطع (Δ)

5- تبيان أن النقطة $I(2;3)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f) :

S

• لدينا : $f''(x) = g'(x) = (x-2)e^{-x+2}$

• جدول إشارة $f''(x)$:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

المشتقة الثانية f'' تنعدم من

أجل $x=2$ مغيرة إشارتها أي النقطة $I(2;3)$ نقطة انعطاف للمنحني (C_f) .

ب) تبيان أن المنحني (C_f) في نقطة فاصلتها $0 < x_0 < 0.2$:

• الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[0;0.2]$ ولدينا :

$$f(0) = -1 \quad \text{و} \quad f(0.2) = 0.2 - 1 + 0.2 \times e^{-0.2+2} = -0.8 + 1.21 = 0.41$$

$$\text{ومنه} \quad f(0) \times f(0.2) < 0$$

- حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_0 حيث

$$0 < x_0 < 0.2$$

أي (C_f) يقطع $(x'x)$ في النقطة $(x_0;0)$ حيث $0 < x_0 < 0.2$

ج) تبيان أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) :

(T) يوازي (Δ) معناه معامل توجيه المماس (T) يساوي 1

أي $f'(x) = 1$ ومنه $g(x) = 1$ وبالتالي : $1 + (1-x)e^{-x+2} = 1$

إذن : $(1-x)e^{-x+2} = 0$ ومنه $1-x=0$ أي $x=1$

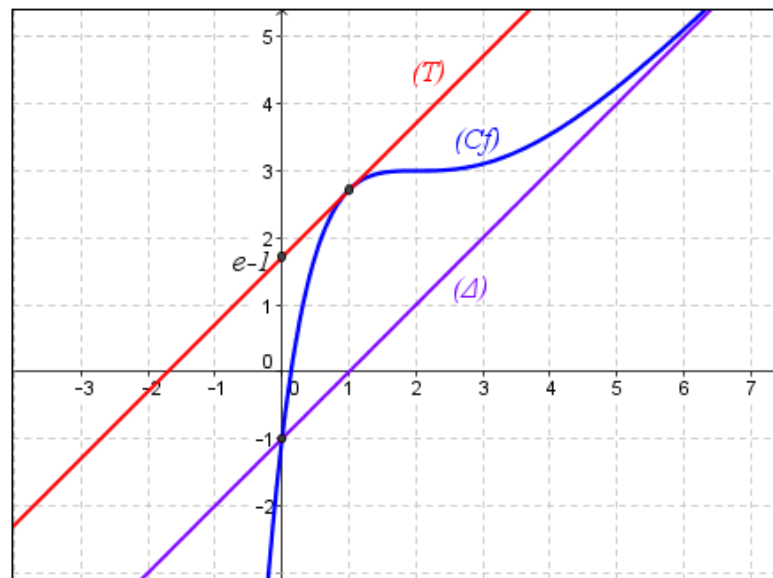
• كتابة معادلة ديكارتية للمماس (T) :

$$(T) : y = x - 1 + e \quad \text{أي} \quad y = f'(1)(x-1) + f(1) = 1 \times (x-1) + e = x - 1 + e$$

د) حساب $f(-1)$:

$$f(-1) = -1 - 1 - e^3 = -2 - e^3 = -22.09$$

الرسم :



S

6. المناقشة البيانية لحلول المعادلة $(E): xe^{-x+2} - 1 - m = 0$

$$xe^{-x+2} - 1 = m \text{ معناه } xe^{-x+2} - 1 - m = 0$$

$$\text{ومنه } f(x) = x + m \text{ أي } x - 1 + xe^{-x+2} = x + m$$

• إذن حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة

$$y = x + m \text{ الموازي لكل من } (\Delta) \text{ و } (T)$$

• إذا كان $m \in]-\infty; -1[$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا .

• إذا كان $m = -1$ المعادلة تقبل حلا معدوما .

• إذا كان $m \in]-1; e-1[$ المعادلة تقبل حلين موجبيين .

• إذا كان $m = e - 1$ المعادلة تقبل حلا وحيدا هو 1 .

• إذا كان $m \in]e-1; +\infty[$ فإن المعادلة ليس لها حل .

7. تبيان أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على \mathbb{R} والتي تنعدم من أجل القيمة 2

للمتغير:

$$\bullet \text{ لدينا : } F(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - (1+x)e^{-x+2} + 3$$

$$F'(x) = x - 1 - [e^{-x+2} + (1+x)(-e^{-x+2})] = x - 1 - (1-1-x)e^{-x+2}$$

$$= x - 1 + xe^{-x+2}$$

$$\text{أي } F'(x) = f(x)$$

$$\bullet \text{ ولدينا : } F(3) = \frac{1}{2} \times 2^2 - 2 - (1+2)e^{-2+2} + 3 = 2 - 2 - 3e^0 + 3 = -3 + 3 = 0$$

وبالتالي F دالة أصلية للدالة f على \mathbb{R} والتي تنعدم من أجل القيمة 2 للمتغير.

S

تصحيح الموضوع الثاني

التمرين الأول :

لدينا : $A(3;-2;2), B(6;1;5), C(6;-2;-1)$ والمستوي $(P): x + y + z - 3 = 0$

1 البرهان على أن المثلث ABC قائم :

- لدينا : $\overline{AB}(3;3;3)$ ، $\overline{AC}(3;0;-3)$ و $\overline{BC}(0;-3;-6)$
 ولدينا : $AB = \sqrt{(3)^2 + (3)^2 + (3)^2} = 3\sqrt{3}$ و $AC = \sqrt{(3)^2 + (0)^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$
 و $BC = \sqrt{(0)^2 + (-3)^2 + (-6)^2} = 3\sqrt{5}$
 إذن : $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ومنه المثلث ABC قائم في النقطة A .

2 البرهان على أن المستوي (P) عمودي على المستقيم (AB) ويمر من النقطة A :

• لدينا : شعاع ناظمي للمستوي (P) $\vec{n}(1;1;1)$
 - إذن $\frac{3}{1} = \frac{3}{1} = \frac{3}{1} = 3$ ومنه $\overline{AB} = 3\vec{n}$ أي $\overline{AB} \parallel \vec{n}$ وبالتالي $(AB) \perp (P)$
 - نعوض بإحداثيات النقطة A في معادلة (P) نجد : $3 - 2 + 2 - 3 = 0$ أي $A \in (P)$
 وبالتالي : المستوي (P) عمودي على المستقيم (AB) ويمر من النقطة A

3 كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P') العمودي على المستقيم (AC) والمار من النقطة A :

لدينا : شعاع ناظمي للمستوي (P') $\overline{AC}(3;0;-3)$ وبالتالي معادلة للمستوي (P') من الشكل : $3x - 3z + d = 0$
 - تعيين قيمة d نعوض بإحداثيات النقطة A نجد :
 $d = -3$ ومنه $3(3) - 3(2) + d = 0$

وبالتالي معادلة للمستوي (P') : $3x - 3z - 3 = 0$ أي $x - z - 1 = 0$

4 كتابة تمثيل وسيطي لـ (Δ) مستقيم تقاطع المستويين (P) و (P') :

• لدينا : $\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ x = z + 1 \end{cases}$ وبالتالي

$$\begin{cases} x = z + 1 \\ y = -2z + 2 \end{cases} \text{ إذن : } \begin{cases} z + 1 + y + z - 3 = 0 \\ x = z + 1 \end{cases}$$

نضع : $z = t$ وبالتالي : $(t \in \mathbb{R})$: $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -2t + 2 \\ z = t \end{cases}$ (Δ) :

5 أ تبيان أن المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC) :

• لدينا : $D(0;4;-1)$ وبالتالي $\overline{AD}(-3;6;-3)$ إذن :

$$\overline{AD} \perp \overline{AB} \text{ ومنه } \overline{AD} \cdot \overline{AB} = -3(3) + 6(3) - 3(3) = -18 + 18 = 0 \quad -$$

$$\overline{AD} \perp \overline{AC} \text{ ومنه } \overline{AD} \cdot \overline{AC} = -3(3) + 6(0) - 3(-3) = -9 + 9 = 0 \quad -$$

وبالتالي المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC)

(ب) حساب حجم رباعي الوجوه ABCD :

$$v_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \times AD$$

$$- \text{ لدينا : } S_{ABC} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{3\sqrt{3} \times 3\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{6}}{2} \text{ و}$$

$$AD = \sqrt{(-3)^2 + (6)^2 + (-3)^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

$$v_{ABCD} = 27uv \quad v_{ABCD} = \frac{1}{3} \times \frac{9\sqrt{6}}{2} \times 3\sqrt{6} = 27uv \text{ أي}$$

(ج) تبيان أن قياس الزاوية BDC هو $\frac{\pi}{4} \text{ rad}$:

$$- \text{ لدينا : } \overline{DB}(6; -3; 6) \text{ و } \overline{DC}(6; -6; 0)$$

$$\text{وبالتالي : } \overline{DB} \cdot \overline{DC} = 6 \times 6 - 3(-6) + 6 \times 0 = 36 + 18 = 54$$

$$- \text{ ولدينا : } \overline{DB} \cdot \overline{DC} = \|\overline{DB}\| \times \|\overline{DC}\| \times \cos(\overline{DB}, \overline{DC})$$

$$\cos(\overline{DB}, \overline{DC}) = \frac{54}{9 \times 6\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ أي } \overline{DB} \cdot \overline{DC} = \sqrt{81} \times \sqrt{72} \times \cos(\overline{DB}, \overline{DC})$$

$$\text{ومنه } BDC = 45^\circ$$

(د) حساب مساحة المثلث BDC :

$$- S_{BDC} = \frac{1}{2} DB \times DC \times \sin BDC = \frac{1}{2} \times 9 \times 6\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 27us$$

- استنتاج المسافة بين النقطة A والمستوي (BDC) :

$$\text{لدينا : } v_{ABDC} = \frac{1}{3} \times S_{BDC} \times d(A, (BCD)) = \frac{1}{3} \times 27 \times d(A, (BCD)) = 27$$

$$d(A, (BDC)) = 3 \quad d(A, (BDC)) = \frac{27}{\frac{1}{3} \times 27} = 3 \text{ ومنه}$$

التمرين الثاني :

$$\bullet \text{ لدينا : } z_2 = -\sqrt{3} + 3i \text{ و } z_1 = 3 + i\sqrt{3}$$

(1) كتابة العددين z_2, z_1 على الشكل الأسّي :

$$- \text{ لدينا : } |z_1| = \sqrt{(3)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\theta_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}) \text{ ومنه } \begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ نضع : } \theta_1 = \text{Arg}(z_1) \text{ إذن}$$

$$z_1 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} \text{ وبالتالي}$$

$$|z_2| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (3)^2} = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ لدينا}$$

$$\text{ومنه } \begin{cases} \cos \theta_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{2} \\ \sin \theta_2 = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ نضع : } \theta_2 = \text{Arg}(z_2) \text{ إذن}$$

$$\theta_2 = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$z_2 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}} \text{ وبالتالي}$$

$$z_3 = z_1 + z_2 \text{ لدينا (2)}$$

(أ) البرهان على أن المثلث OAB قائم ومتساوي الساقين:

$$\bullet \text{ لدينا : } \frac{z_B - z_O}{z_A - z_O} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{2\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}}{2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{ومنه } \frac{OB}{OA} = 1 \text{ أي } OB = OA \text{ و } (\overline{OA}, \overline{OB}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}) \text{ أي أن المثلث } OAB \text{ قائم ومتساوي الساقين.}$$

(ب) استنتاج أن الرباعي $OAEB$ مربع:

• لدينا :

$$z_{\overline{AE}} = z_1 + z_2 - z_1 = z_2 \text{ و } z_{\overline{OB}} = z_2$$

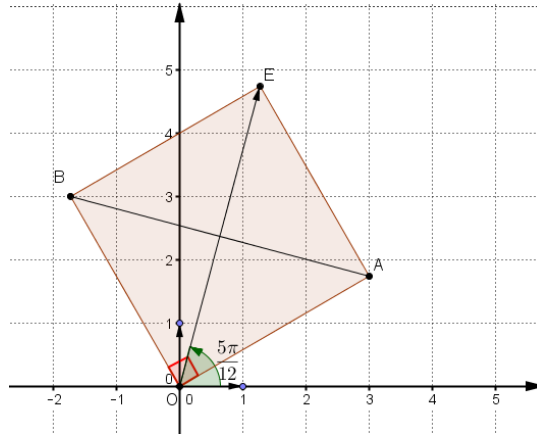
$$\text{أي أن } \overline{AE} = \overline{OB}$$

ومنه الرباعي $OAEB$ متوازي أضلاع.

• ولدينا : OAB مثلث قائم ومتساوي الساقين

وبالتالي $OAEB$ مربع.

S



(3) أ تبيان أن $OE = 2\sqrt{6}$

• لدينا : $OE^2 = OA^2 + AE^2 = (2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2 = 12 + 12 = 24$

ومنه $OE = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

• تبيان أن $(\vec{u}, \overrightarrow{OE}) = \frac{5\pi}{12}$

- لدينا : $(\vec{u}, \overrightarrow{OE}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE})$

ومنه $(\vec{u}, \overrightarrow{OE}) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi + 3\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}$

(ب) تعيين القيمتين المضبوطتين لكل من $\cos \frac{5\pi}{12}$ و $\sin \frac{5\pi}{12}$

لدينا : $z_3 = z_1 + z_2 = 3 + i\sqrt{3} - \sqrt{3} + 3i = (3 - \sqrt{3}) + i(3 + \sqrt{3})$

• ولدينا : $z_3 = 2\sqrt{6} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right)$

بالمطابقة نجد :

$$\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

و $\sin \frac{5\pi}{12} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

(ج) حساب z_3^{2016}

$$z_3^{2016} = (2\sqrt{6})^{2016} \left(\cos \frac{2016 \times 5\pi}{12} + i \sin \frac{2016 \times 5\pi}{12} \right)$$

$$= (2\sqrt{6})^{2016} (\cos 840\pi + i \sin 840\pi)$$

أي $z_3^{2016} = (2\sqrt{6})^{2016}$

S

(د) تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_3}{2\sqrt{6}}\right)^n$ حقيقيا :

$$\left(\frac{z_3}{2\sqrt{6}}\right)^n \text{ حقيقيا معناه } \left(\cos\frac{5n\pi}{12} + i\sin\frac{5n\pi}{12}\right)^n \text{ حقيقيا}$$

$$\text{ومنه } 0 = \sin\frac{5n\pi}{12} \text{ وبالتالي } \frac{5n\pi}{12} = k\pi \text{ أي } 5n\pi = 12k\pi$$

$$\text{إذن } 5n = 12k \text{ ومنه } n = 12\left(\frac{k}{5}\right) \text{ وبالتالي } n = 12k' \text{ (} k' \in \mathbb{N} \text{)}$$

التمرين الثالث:

• لدينا : $u_0 = \frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 1}$

1- التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2u_n + 1}$

لدينا : $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2u_n + 1}$ ومنه : $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 1} = \frac{2u_n + 1 - 1}{2u_n + 1} = 1 - \frac{1}{2u_n + 1}$

2- أم البرهان على أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < \frac{1}{2}$

نسمي $P(n)$ هذه الخاصية .

1- من أجل $n=0$ لدينا : $u_0 = \frac{1}{5}$ و $0 < \frac{1}{5} < \frac{1}{2}$ أي $0 < u_0 < \frac{1}{2}$

إذن $P(n)$ صحيحة من أجل $n=0$.

2- نفرض صحة $P(n)$ أي نفرض أن : $0 < u_n < \frac{1}{2}$ ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي

نبرهن أن : $0 < u_{n+1} < \frac{1}{2}$.

- لدينا : $0 < u_n < \frac{1}{2}$ ومنه $0 < 2u_n < 1$ أي $1 < 2u_n + 1 < 2$

وبالتالي $1 < \frac{1}{2u_n + 1} < 2$ إذن $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{2u_n + 1} < -1$

وأخيرا : $0 < 1 - \frac{1}{2u_n + 1} < \frac{1}{2}$ أي $0 < u_{n+1} < \frac{1}{2}$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة .

حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

ب) التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1 - 2u_n)}{2u_n + 1}$

• لدينا : $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{2u_n + 1} - u_n = \frac{2u_n - 2u_n^2 - u_n}{2u_n + 1} = \frac{u_n - 2u_n^2}{2u_n + 1} = \frac{u_n(1 - 2u_n)}{2u_n + 1}$

• **تبيان أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متزايدة :**

ندرس إشارة الفرق : $u_{n+1} - u_n$

- لدينا : $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1 - 2u_n)}{2u_n + 1}$

ولدينا : $0 < u_n < \frac{1}{2}$ ومنه $-1 < -2u_n < 0$ أي $0 < 1 - 2u_n < 1$

وبالتالي : $0 < u_n(1 - 2u_n) < \frac{1}{2}$

- ولدينا : $\frac{1}{2} < \frac{1}{2u_n + 1} < 1$ ومنه $0 < \frac{u_n(1 - 2u_n)}{2u_n + 1} < \frac{1}{2}$

أي $u_{n+1} - u_n > 0$ وبالتالي المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متزايدة.

(ج) **دراسة تقارب المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$:**

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد $\frac{1}{2}$ فهي متقاربة وتتقارب من العدد $\frac{1}{2}$.

تعيين نهاية المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$

3- لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{3^n u_n}{2u_n - 1}$

(أ) **اثبات أن المتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ هندسية :**

• لدينا : $v_{n+1} = \frac{3^{n+1} u_{n+1}}{2u_{n+1} - 1}$

$$v_{n+1} = \frac{3^{n+1} u_{n+1}}{2u_{n+1} - 1} = \frac{3 \times 3^n \times \frac{2u_n}{2u_n + 1}}{2 \times \frac{2u_n}{2u_n + 1} - 1} = \frac{6 \times 3^n \times u_n}{4u_n - 2u_n - 1} = \frac{6 \times 3^n \times u_n}{2u_n + 1}$$

أي $v_{n+1} = 6 \times \frac{3^n \times u_n}{2u_n + 1} \times \frac{2u_n + 1}{2u_n - 1} = 6 \times \frac{3^n \times u_n}{2u_n - 1} = 6v_n$ ومنه $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ هندسية أساسها $q = 6$

$$v_0 = \frac{3^0 \times u_0}{2u_0 - 1} = \frac{1 \times \frac{1}{5}}{2 \times \frac{1}{5} - 1} = \frac{\frac{1}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{1}{3}$$

(ب) **حساب عبارة الحد العام v_n بدلالة n :**

• لدينا : $v_n = v_0 \times q^n = -\frac{1}{3} \times 6^n$

• استنتاج أن : $u_n = \frac{2^n}{3 + 2^{n+1}}$

- لدينا : $v_n = \frac{3^n u_n}{2u_n - 1}$ ومنه $2u_n v_n - v_n = 3^n u_n$ أي $2u_n v_n - 3^n u_n = v_n$

- ومنه $(2v_n - 3^n)u_n = v_n$ وبالتالي : $u_n = \frac{v_n}{2v_n - 3^n}$

إذن : $u_n = \frac{-\frac{1}{3} \times 6^n}{2\left(-\frac{1}{3} \times 6^n\right) - 3^n} = -\frac{6^n}{-2 \times 6^n - 3 \times 3^n}$

ومنه $u_n = \frac{2^n}{2^{n+1} + 3} = \frac{2^n}{3 + 2^{n+1}}$ أي $u_n = -\frac{6^n}{-2 \times 6^n - 3 \times 3^n} = \frac{2^n \times 3^n}{2 \times 3^n \times 2^n + 3 \times 3^n}$ حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2^n}{2^{n+1} + 3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{2^n \left(2 + \frac{3}{2^n}\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{1}{2}$

التمرين الرابع:

• الجزء الأول:

• لدينا : $g(x) = x^2 - 2 \ln x$

• 1- دراسة تغيرات الدالة g :

• حساب النهايات:

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 2 \ln x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2 \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - 2 \frac{\ln x}{x^2}\right) = +\infty$

• حساب المشتقة:

$g'(x) = 2x - 2 \times \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x} = \frac{2(x+1)(x-1)}{x}$

• دراسة إشارة المشتقة:

x	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0
		+

• جدول التغيرات:

x	1	$+\infty$
-----	---	-----------

	0
$g'(x)$	0 + -
$g(x)$	$\begin{array}{c} \nearrow +\infty \\ \searrow +\infty \\ 1 \end{array}$

-2- استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$+\infty$ 0
$g(x)$	+

• الجزء الثاني :

- لدينا : $f(x) = 1 - x - \frac{2}{x}(1 + \ln x)$

1- أ حساب النهايات :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \ln x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2}{x}(1 + \ln x) \right) = -\infty \end{cases} \quad \text{لأن } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - x - \frac{2}{x}(1 + \ln x) \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - x - \frac{2}{x}(1 + \ln x) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - x - \frac{2}{x} - 2 \frac{\ln x}{x} \right) = -\infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x} \right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x) = -\infty \end{cases} \quad \text{لأن :}$$

ب) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \in]0; +\infty[$: $f'(x) = -\frac{g(x)}{x^2}$

$$\bullet \text{ لدينا : } f'(x) = -1 - 2 \left[-\frac{1}{x^2}(1 + \ln x) + \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} \right] = -1 - 2 \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} \right)$$

$$\text{أي } f'(x) = \frac{-x^2 + 2 \ln x}{x^2} = -\frac{g(x)}{x^2}$$

ج) استنتاج اتجاه تغير الدالة f : بما أن $g(x) > 0$ فإن $f'(x) < 0$

x	$+\infty$
$f'(x)$	0
	$-$

• جدول تغيرات الدالة f :

x	$+\infty$
$f'(x)$	0
	$-$
$f(x)$	$+\infty$
	$-\infty$

2- أ) تبيان أن المستقيم $y = 1 - x$ (Δ) مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$:

• لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (1 - x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - x - \frac{2}{x}(1 + \ln x) - 1 + x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{x}(1 + \ln x) \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (1 - x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{x} - 2\frac{\ln x}{x} \right) = 0 \text{ إذن}$$

ومنه المستقيم (Δ) مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

ب) دراسة الوضعية النسبية للمنحني (C_f) بالنسبة إلى (Δ):

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$.

$$f(x) - y = 1 - x - \frac{2}{x}(1 + \ln x) - 1 + x = -\frac{2}{x}(1 + \ln x)$$

• جدول إشارة الفرق:

$$-\frac{2}{x}(1 + \ln x) = 0 \text{ معناه } f(x) - y = 0$$

ومنه $1 + \ln x = 0$ أي $\ln x = -1$ وبالتالي $x = e^{-1}$.

S

x	e^{-1}	0	$+\infty$
$1 + \ln x$	0	$+$	$-$
$f(x) - y$	0	$-$	$+$
الوضع النسبي	فوق (C_f)	تحت (Δ)	تحت (Δ)

ج) تبيان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.41 < \alpha < 0.42$:

• لدينا f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[0.41; 0.42]$

• ولدينا: $f(0.41) = 1 - 0.41 - \frac{2}{0.41}(1 + \ln 0.41) = 0.06$

و $f(0.42) = 1 - 0.42 - \frac{2}{0.42}(1 + \ln 0.42) = -0.05$

أي أن $f(0.41) \times f(0.42) < 0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.41 < \alpha < 0.42$

د) تبيان أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) :

• (T) يوازي (Δ) معناه معامل توجيه (T) يساوي -1 أي $f'(x) = -1$

ومنه $-\frac{x^2 - 2\ln x}{x^2} = -1$ أي $x^2 - 2\ln x = x^2$

وبالتالي $-2\ln x = 0$ إذن $\ln x = 0$ ومنه $x = 1$

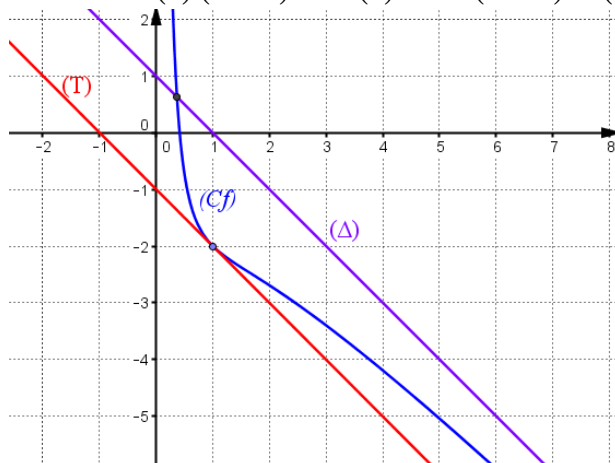
(T) مماس للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x = 1$

• كتابة معادلة ديكارتية للمماس (T) :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = -1(x-1) + (-2) = -x + 1 - 2 = -x - 1$$

أي $(T): y = -x - 1$

• الرسم:



4) المناقشة البيانية لحلول المعادلة $f(x) = m - x$ ($m \in \mathbb{R}$):

- حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y = m - x$ الموازي لكل من (T) و (Δ) .
- إذا كان $m \in]-\infty; -1[$ المعادلة ليس لها حل.
- إذا كان $m = -1$ المعادلة تقبل حلا هو $x = 1$.
- إذا كان $m \in]-1; 1[$ المعادلة تقبل حلين موجبين.
- إذا كان $m \in [1; +\infty[$ المعادلة تقبل حلا موجبا.

قالت امرأة لزوجها وهي ترفع من شأنها: أنت كالشاي وأنا كالبسكوتة فلا طعم للشاي بدون بسكوتة.... فرد بهدوء قائلا: احذري أن تذوبي في الشاي فتختفين ويبقى فالشاي يبحث عن بسكوتة أخرى.

