

التمرين الاول: (04 نقاط)

I. (u_n) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} كما يلي: $u_0 = 0$ ومن اجل كل n من \mathbb{N} : $u_{n+1} = 2u_n + 1$

1. (أ) احسب u_1 ، u_2 ، و u_3

(ب) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2^n - 1$

2. (v_n) و (w_n) المتتاليتين العدديتين المعرفتين على \mathbb{N} : $v_n = u_n + 3$ و $w_n = 2^n$

(أ) بين أن المتتالية (w_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها q
(ب) احسب بدلالة n ، S_n و S'_n و S''_n

حيث : $S_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$ ، $S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $S''_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

II. نعتبر في هذا الجزء انه من اجل كل n من \mathbb{N} فان جميع حدود المتتاليتين (u_n) و (v_n) من \mathbb{N}

1. عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للحددين u_n و v_n

2. (أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 3

(ب) عين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق : $v_n \equiv 0 [3]$

(ج) استنتج مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تجعل الحددين u_n و v_n أوليين فيما بينهما

3. بين انه من اجل كل n من \mathbb{N} فان $S''_n \equiv S'_n [3]$

التمرين الثاني : (04 نقاط)

يعرض متجر تخفيضات هامة أثناء بيع جزء من مدخراته لقطع الغيار التي تشتمل ثلاثة أنواع من السلع x ، y ، z ، تمثل السلعة x ربع المدخرات بينما تمثل y ثلثها وتمثل z الباقي ، 40% من السلعة x و 75% من السلعة y و 24% من السلعة z كلها مخفضة الثمن. أخذ زيون قطعة عشوائيا.

لتكن الاحداث التالية:

A : " الحادثة اخذ الزيون القطعة من السلعة x "

B : " الحادثة اخذ الزيون القطعة من السلعة y "

C : " الحادثة اخذ الزيون القطعة من السلعة z "

S : " الحادثة القطعة التي أخذها الزيون مخفضة الثمن "

\bar{S} : " الحادثة القطعة التي أخذها الزيون غير مخفضة الثمن "

1. انقل الشجرة المقابلة على ورقة الإجابة ، ثم أكملها .

2. احسب $P(S)$ احتمال أن تحقق الحادثة S

3. احسب $P(\bar{S})$ احتمال أن تحقق الحادثة \bar{S}

التمرين الثالث: (05 نقاط)

I. حل في مجموعة الاعداد المركبة \mathbb{C} ، المعادلة ذات المجهول z التالية : $(z + 2 - 3i)(z^2 - 2z + 10)$

II. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

نعتبر النقط A, B, C التي لاحتقاتها z_A, z_B, z_C على الترتيب، حيث: $z_A = -2 + 3i, z_B = 1 - 3i, z_C = \overline{z_B}$.

1. (أ) اكتب على الشكل الجبري، ثم على الشكل الاسي العدد المركب $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$

(ب) اوجد طبيعة التحويل النقطي T الذي يحول النقطة A الى النقطة B مع تحديد عناصره المميزة.

(ج) استنتج طبيعة المثلث ABC

(د) بين ان النقاط A, B, C تقع على دائرة (Γ) ، يطلب تحديد مركزها Ω ونصف قطرها r

2. (Δ) مجموعة النقط $M(x; y)$ ذات اللاحقة $z = x + iy$ التي تحقق $\left| \frac{z - z_A}{z - z_C} \right| = 1$

(أ) عين ثم انشئ المجموعة (Δ) .

(ب) عين ثم انشئ صورة المجموعة (Δ) بالتحويل النقطي T .

3. (أ) عين z_D لاحقة النقطة D ، بحيث تكون النقطة C مرجح للجملة $\{(A; 1), (B; 1), (D; -1)\}$

(ب) بين ان النقطة D هي نظيرة النقطة C بالنسبة الى النقطة Ω .

(ج) عين بدقة طبيعة الرباعي $ADCB$

التمرين الرابع : (07 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على المجموعة $]-\infty; 0[\cup]-1; +\infty[$ ب: $f(x) = \frac{x}{2} - \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$

1. (C_f) : التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، $\|\vec{i}\| = 1 \text{ cm}$

I.

1. احسب نهايات الدالة f عند اطراف مجموعة تعريفها.

2. (أ) اثبت أن المستقيم (\mathcal{D}) ذو المعادلة $y = \frac{x}{2}$ هو مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $-\infty$ و $+\infty$

(ب) ادرس الوضع النسبي بين (C_f) و (\mathcal{D}) .

3. (أ) بين انه من اجل كل x من المجموعة $]-\infty; 0[\cup]-1; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{x^2 - x - 2}{2x(x-1)}$

(ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجموعة $]-\infty; 0[\cup]-1; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

4. أنشئ (C_f) والمستقيمات المقاربة في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$

II.

1. α عدد حقيقي، بين ان الدالة $x \mapsto (x - \alpha) \ln(x - \alpha) - x$ دالة اصلية للدالة $\ln(x - \alpha)$ على المجال $]0; +\infty[$

2. λ عدد حقيقي حيث $\lambda > 2$ ، احسب بـ cm^2 المساحة $\mathcal{A}(\lambda)$ للحيز المستوي المحدب (C_f) ، (\mathcal{D})

والمستقيمين ذي المعادلتين $x = \lambda$ ، $x = 2$

3. احسب $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$

بالتوفيق

التمرين الاول

I

1.

(i) حساب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 :

$$u_3 = 7, u_2 = 3, u_1 = 1$$

(ب) برهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2^n - 1$:نبرهن بالتراجع على الخاصية $P(n)$ ($P(n)$: من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2^n - 1$)المرحلة الأولى : من أجل $n = 0$ لدينا : $u_0 = 2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ الخاصية $P(0)$ صحيحةالمرحلة الثانية : ليكن k عدد طبيعي كيفينفترض أن الخاصية $P(k)$ صحيحة أي أن $u_k = 2^k - 1$ ، ونبرهن صحة الخاصية $P(k+1)$

$$\text{لدينا : } u_{k+1} = 2u_k + 1 \quad \text{ومنه : } u_{k+1} = 2(2^k - 1) + 1 \quad \text{ومنه : } u_{k+1} = 2^{k+1} - 1$$

وبالتالي فإن الخاصية $P(k+1)$ صحيحةإذن : من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n = 2^n - 1$

2.

(i) تبين أن المتتالية (w_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها q :

$$\text{لدينا : } \frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$$

ومنه المتتالية (w_n) متتالية هندسية أساسها $q = 2$ (ب) حساب بدلالة n ، S_n ، S'_n و S''_n :

$$S''_n = 2^{n+1} - (n + 2) \quad , \quad S'_n = 2^{n+1} + 2n + 1 \quad , \quad S_n = 2^{n+1} - 1$$

II

1. تعيين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للحددين u_n و v_n :ليكن $\text{pgcd}(u_n; v_n) = d$ ومنه : $\frac{d}{u_n}$ و $\frac{d}{v_n}$ ومنه : $\frac{d}{v_n - u_n}$ ومنه : $\frac{d}{3}$ وبالتالي القيم الممكنة لـ : $d \in D_3 = \{1; 3\}$

2.

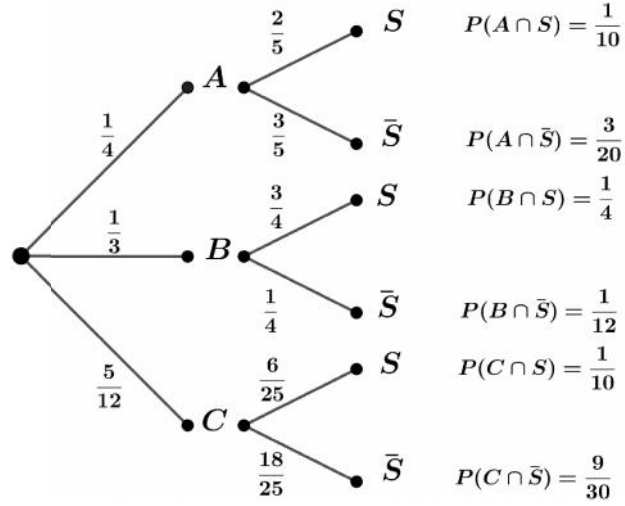
(i) دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 3:

n	$2k$	$2k + 1$
على 2^n بواقي قسمة	1	2

(ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق $3 \mid v_n$:لدينا : $3 \mid v_n \iff v_n \equiv 0 \pmod{3}$ معناه أن : $2^n \equiv -2 \pmod{3}$ وبما أن : $2^n \equiv 1 \pmod{3}$ إذن : $2^n \equiv 1 \pmod{3}$ وبالتالي نجد : $n = 2k$; $k \in \mathbb{Z}$ (ج) استنتاج مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تجعل $\text{pgcd}(u_n; v_n) = 1$:نعلم أن $3 \mid v_n \iff v_n \equiv 0 \pmod{3}$ و $n = 2k$; $k \in \mathbb{Z}$ وكذلك نجد أن : $3 \mid u_n \iff u_n \equiv 0 \pmod{3}$ و $n = 2k'$; $k' \in \mathbb{Z}$ أي في هذه الحالة نجد : $\text{pgcd}(u_n; v_n) = 3$ لكن القيم الممكنة لـ d هي : 3 او 1 إذن حتىيكون $\text{pgcd}(u_n; v_n) = 1$ يجب أن يكون $n = 2m + 1$; $m \in \mathbb{Z}$ 3. تبين أنه من أجل كل n من \mathbb{Z} فإن $3 \mid S''_n$:لدينا : $S''_n - S' = 3(n + 1)$ تكافئ أن : $S''_n - S' = 0 \pmod{3}$ تكافئ أن : $S''_n \equiv S' \pmod{3}$

التمرين الثاني

1. اكمل شجرة الاحتمالات:



2. حساب $P(S)$ احتمال تحقق الحادثة S :

$$P(S) = P(A \cap S) + P(B \cap S) + P(C \cap S) = \frac{1}{10} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} = \frac{9}{20}$$

3. حساب $P(\bar{S})$ احتمال تحقق الحادثة \bar{S} :

$$P(\bar{S}) = P(A \cap \bar{S}) + P(B \cap \bar{S}) + P(C \cap \bar{S}) = \frac{3}{20} + \frac{1}{12} + \frac{9}{30} = \frac{8}{15}$$

حل في \square المعادلة ذات المجهول z التالية: $(z+2-3i)(z^2-2z+10)=0$
 $z^2-2z+10=0$ او $z=-2+3i$ تكافئ $(z+2-3i)(z^2-2z+10)=0$
 لنحل المعادلة $z^2-2z+10=0$
 لدينا $\Delta = -36 = (6i)^2$ ومنه $z_2 = \frac{2+6i}{2}$, $z_1 = \frac{2-6i}{2}$
 $z_2 = 1+3i$, $z_1 = 1-3i$: أي
 وبالتالي نجد :
 $z \in \{-2+3i; 1-3i; 1+3i\}$ تكافئ $(z+2-3i)(z^2-2z+10)=0$

1. (ا) كتابة الشكل الجبري، والشكل الاسي للعدد المركب $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$:

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{1-3i-1-3i}{-2+3i-1-3i} = \frac{-6i}{-3} = 2i$$

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$$

(ب) ايجاد طبيعة التحويل النقطي T مع ذكر عناصره المميزة:

$$\text{لدينا: } \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ تكافئ } z_B - z_C = 2e^{i\frac{\pi}{2}}(z_A - z_C)$$

ومنه التحويل النقطي هو تشابه مباشر مركزه النقطة C ونسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{2}$

(ج) استنتاج طبيعة المثلث ABC :

$$\text{لدينا: } z_B - z_C = 2e^{i\frac{\pi}{2}}(z_A - z_C) \text{ معناه: } |z_B - z_C| = 2|z_A - z_C|$$

$$\text{معناه: } CB = 2CA$$

$$\text{لدينا: } \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ معناه: } \arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \frac{\pi}{2} + k \times 2\pi, k \in \square$$

$$\text{معناه: } (\overline{CA}, \overline{CB}) = \frac{\pi}{2} + k \times 2\pi, k \in \square$$

وبالتالي نجد ان المثلث ABC مثلث قائم في النقطة C

(د) تبين ان النقاط A, B, C تقع على دائرة (Γ) مع تحديد مركزها النقطة Ω ونصف قطرها r :

بما ان المثلث ABC قائم في النقطة C فان النقاط A, B, C تقع على دائرة (Γ) قطرها هو وتر للمثلث ABC أي ان القطعة $[AB]$ هي قطر للدائرة (Γ) وبالتالي فان النقطة Ω هي منتصف القطعة $[AB]$

$$\text{لتكن } z_\Omega \text{ لاحقة النقطة } \Omega \text{ لدينا: } z_\Omega = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{-2+3i+1-3i}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{اذن } \Omega\left(-\frac{1}{2}; 0\right) \text{ و } r = \frac{|z_B - z_A|}{2} = \frac{|1-3i+2-3i|}{2} = \frac{|3-6i|}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{2} \text{ u.m}$$

2. (ا) تعيين وانشاء المجموعة النقط (Δ) :

$$\left| \frac{z - z_A}{z - z_B} \right| = 1 \text{ تكافئ } |z - z_A| = |z - z_B|$$

معناه ان $AM = BM$

أي مجموعة النقط هي عبارة عن محور القطعة $[AB]$

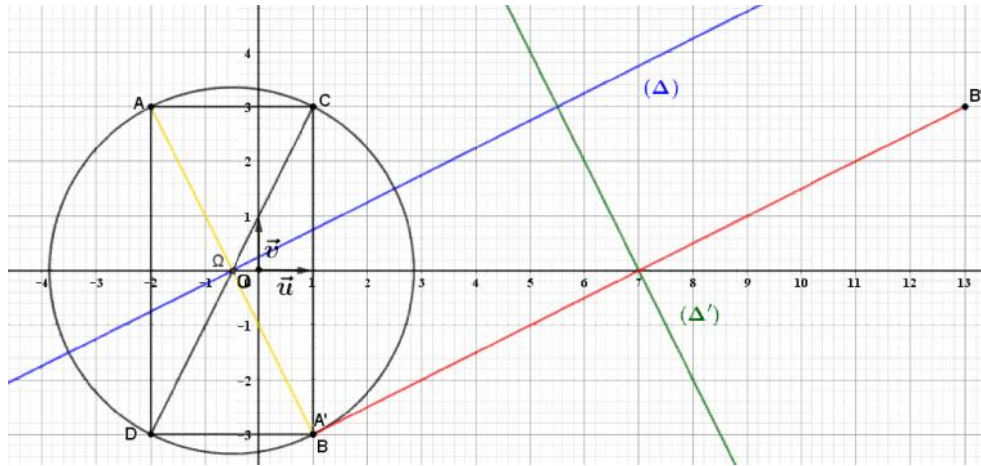
(ب) تعيين وانشاء صورة المجموعة النقط (Δ) بالتحويل النقطي T :

لتكن النقط A' ، B' و M' حيث: $T(A) = A'$ ، $T(B) = B'$ ، و $T(M) = M'$

بما ان التحويل النقطي T هو تشابه مباشر فان: $\frac{A'M'}{AM} = \frac{B'M'}{BM}$ ومنه: $\frac{B'M'}{A'M'} = \frac{BM}{AM}$

أي: $\frac{B'M'}{A'M'} = 1$ وبالتالي نجد: $A'M' = B'M'$

أي صورة مجموعة النقط $[AB]$ عبارة عن محور القطعة $[A'B']$



3. (أ) تعيين لاحقة النقطة D :

النقطة D مرجح الجملة $\{(A;1), (B;1), (D;-1)\}$ معناه:

$$z_D = z_A + z_B - z_C \quad \text{ومنه} \quad z_C = \frac{z_A + z_B - z_D}{1+1-1} = z_A + z_B - z_D$$

$$\text{أي: } z_D = -2 + 3i + 1 - 3i - 1 - 3i = -2 - 3i$$

(ب) تبين ان النقطة D نظيرة النقطة C بالنسبة للنقطة Ω :

النقطة D نظيرة النقطة C بالنسبة للنقطة Ω معناه ان النقطة Ω منتصف القطعة $[CD]$

$$\text{لدينا: } \frac{z_C + z_D}{2} = \frac{1 + 3i - 2 - 3i}{2} = -\frac{1}{2} = z_\Omega$$

اذن: النقطة D نظيرة النقطة C بالنسبة للنقطة Ω

(ج) تعيين بدقة طبيعة الرباعي $ADBC$:

بما ان القطعتين $[AB]$ ، $[CD]$ قطرا الرباعي $ADBC$ وكذلك قطرا للدائرة (Γ) ، والنقطتين C

، D لا تنتميان الى (Δ) محور القطعة $[AB]$ لان $|z_C - z_A| \neq |z_C - z_B|$ و $|z_D - z_A| \neq |z_D - z_B|$

فان القطران $[AB]$ ، $[CD]$ منتصفان ومتقايسان وغير متعامدان اذن الرباعي $ADBC$ مستطيل.

1. حساب نهايات الدالة عند اطراف مجموعة التعريف :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty , \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty , \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty , \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

2. ا) بين أن المستقيم (\mathcal{D}) ذو المعادلة مستقيم $y = \frac{1}{2}x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$ ، $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{1}{2}x \right) = 0 , \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(f(x) - \frac{1}{2}x \right) = 0$$

ب) دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (\mathcal{D}) :

$$f(x) - \frac{1}{2}x = -\ln\left(\frac{x-1}{x}\right) ,]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[\text{ من أجل كل } x$$

$$-1 = 1 \text{ أي } x-1 = x \text{ معناه } \frac{x-1}{x} = 1 \text{ يكافئ } -\ln\left(\frac{x-1}{x}\right) = 0 \text{ يكافئ } f(x) - \frac{1}{2}x = 0$$

وهذا تناقض ، إذن من أجل كل x من $]1; +\infty[\cup]-\infty; 0[$ فإن (C_f) لا يتقطع (\mathcal{D})

$$\frac{x-1}{x} - 1 > 0 \text{ يكافئ } \frac{x-1}{x} > 1 \text{ يكافئ } \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) > 0 \text{ يكافئ } f(x) - \frac{1}{2}x < 0$$

$$\text{يكافئ } \frac{-1}{x} > 0 \text{ يكافئ } -x > 0 \text{ يكافئ } x < 0$$

إذن من أجل كل x من $]1; +\infty[\cup]-\infty; 0[$ فإن (C_f) يقع تحت (\mathcal{D})

$$\frac{x-1}{x} - 1 < 0 \text{ يكافئ } \frac{x-1}{x} < 1 \text{ يكافئ } \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) < 0 \text{ يكافئ } f(x) - \frac{1}{2}x > 0$$

$$\text{يكافئ } \frac{-1}{x} < 0 \text{ يكافئ } -x < 0 \text{ يكافئ } x > 0$$

إذن من أجل كل x من $]1; +\infty[$ فإن (C_f) يقع فوق (\mathcal{D})

إذن (C_f) يقع تحت (Δ)

$$3. \text{ ا) تبين من أجل كل } x \text{ من }]1; +\infty[\cup]-\infty; 0[, f'(x) = \frac{x^2 - x - 2}{2x(x-1)}$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2}x - \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) \right)' = \frac{1}{2} - \left(\frac{x}{x-1} \right) \left(\frac{1}{x^2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x(x-1)} = \frac{x^2 - x - 2}{2x(x-1)}$$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة f على المجموعة $]1; +\infty[\cup]-\infty; 0[$ ، مع تشكيل جدول تغيراتها:

تشكيل جدول إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$	-1	0	1	2	x
$x^2 - x - 2$	+	0	-	-	- 0	+
$2x(x-1)$	+		+	0	- 0	+
$f'(x)$	+	0	-		- 0	+

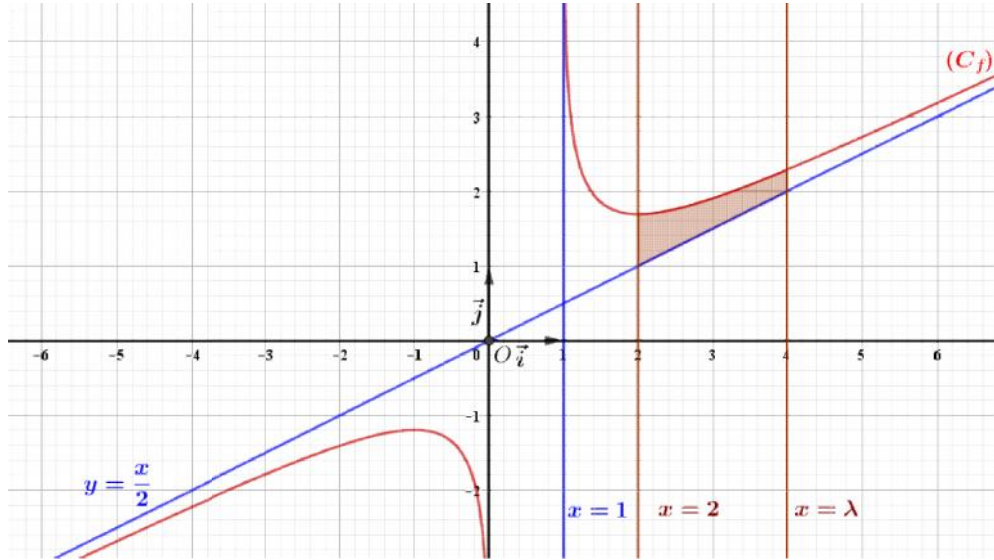
ومنه الدالة متزايدة تماما على كل من المجالين $]-1; +\infty[$ و $]-\infty; -1[$ ، ومتناقصة تماما على كل من

المجالين $]1; 2[$ و $]0; -1[$

تشكيل جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$1 + \ln 2$	$-\infty$		$+\infty$	$+\infty$
					$-\frac{1}{2} - \ln 2$	

4. إنشاء (C_f) والمستقيمات المقاربة (Δ) في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$:



.II

1. $a \in \mathbb{R}$ ، تبين ان الدالة $x \mapsto (x-a) \ln(x-a) - x$ دالة الاصلية للدالة $x \mapsto \ln(x-a)$ على المجال $]a; +\infty[$:

من اجل كل من المجال $]a; +\infty[$ نضع $h(x) = \ln(x-a)$ و $H(x) = (x-a) \ln(x-a) - x$ الدالة H قابلة للاشتقاق على المجال $]a; +\infty[$ و

$$H'(x) = (x-a) \frac{1}{x-a} + \ln(x-a) - 1 = 1 + \ln(x-a) - 1 = \ln(x-a) = h(x)$$

ومنه الدالة H هي دالة اصلية للدالة h على المجال $]a; +\infty[$.

2. حساب $\mathcal{A}(\lambda)$:

$$A(\lambda) = 1 \times \int_2^\lambda \left(f(x) - \frac{x}{2} \right) dx = \int_2^\lambda -\ln\left(\frac{x-1}{x}\right) dx = \int_2^\lambda (\ln x - \ln(x-1)) dx$$

$$A(\lambda) = [x \ln x - x - (x-1) \ln(x-1) + x]_2^\lambda = \lambda \ln \lambda - (\lambda-1) \ln(\lambda-1) - 2 \ln 2 \text{ cm}^2$$

3. حساب $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$:

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \ln \lambda - (\lambda-1) \ln(\lambda-1) - 2 \ln 2 = +\infty$$