

👍 اختبار في مادة الرياضيات

👍 التمرين الأول (04 نقاط)

- (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة ذات المجهول المركب  $z$  التالية :  $z^2 - 8z + 17 = 0$ .
- (2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  نعتبر النقط  $D, B, A$  التي لواحقتها على الترتيب  $a = 4 - i, b = 4 + i, d = -i$ .
- و ليكن  $R$  الدوران الذي مركزه النقطة  $\Omega$  ذات اللاحقة  $\omega = 2$  و زاويته  $\frac{\pi}{2}$ .
- (أ) بين أن العبارة المركبة للدوران  $R$  من الشكل :  $z' = iz + 2 - 2i$ .
- (ب) تحقق أن لاحقة النقطة  $C$  صورة النقطة  $B$  بالدوران  $R$  هي  $c = 1 + 2i$ .
- (ج) بين أن :  $\frac{c-d}{c-b} = -i$  ثم أستنتج طبيعة المثلث  $BCD$ .
- (د) بين أن النقط  $C, B, A$  و  $D$  تنتمي الى نفس الدائرة يطلب تعيين مركزها نصف قطرها .
- (هـ) عين  $(E)$  مجموعة النقط  $M$  من المستوي ذات اللاحقة  $z$  بحيث يكون ،  $|-i - z|^2 - |4 - i - z|^2 = 16$ .

👍 التمرين الثاني (05 نقاط)

- في الفضاء المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  نعتبر النقطتين  $I(3, -1, 0), A(2, 1, 1)$  و
- (P) مجموعة النقط  $M(x, y, z)$  من الفضاء التي تحقق ،  $MA^2 - \overline{MA} \cdot \overline{MI} = 0$
- (1) (أ) بين أن النقطة  $A$  تنتمي الى المجموعة  $(P)$  .
- (ب) بين أن المجموعة  $(P)$  هي مستو  $x - 2y - z + 1 = 0$  معادلة ديكارتية له.
- (2) لتكن  $(S)$  سطح كرة مركزها النقطة  $I$  وتمر من النقطة  $A$ .
- تحقق أن نصف قطر سطح الكرة  $(S)$  هو  $R = \sqrt{6}$  ثم عين معادلة ديكارتية لسطح الكرة  $(S)$
- (3) ليكن  $(P')$  المستوي ذي المعادلة  $2x - y + z - 4 = 0$ .
- (أ) بين أن  $(P')$  يقطع  $(S)$  وفق دائرة  $(C)$  يطلب تعيين مركزها  $H$  ونصف قطرها  $r$ .
- (ب) لتكن  $B(2; -2; -2)$  نقطة من الفضاء تحقق من أن القطعة  $[AB]$  أحد أقطار الدائرة  $(C)$ .
- (ج) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي  $(Q)$  المماس لسطح الكرة  $(S)$  في النقطة  $B$  .

### التمرين الثالث ☺☺ ( 04 نقاط )

- (1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي  $n$  ، بواقي القسمة الاقليدية للعدد  $5^n$  على العدد 7 .
- (2) عين قيم العدد الطبيعي  $n$  بحيث يكون العدد  $19^{6n+3} - 5^{6n+4} + 4n^2 + 1$  قابلا للقسمة على العدد 7 .
- (3)  $N$  عدد طبيعي يكتب  $1xx0$  في نظام التعداد ذي الأساس 5 . حيث  $x$  عدد طبيعي .  
(أ) عين قيم العدد الطبيعي  $x$  حتى يكون العدد  $N$  قابلا للقسمة على 35 .  
(ب) أكتب العدد  $N$  في النظام العشري .

### التمرين الرابع ☺☹ ( 07 نقاط )

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  :  $f(x) = x + 3 \ln\left(\frac{x^2 + 2}{3x}\right)$

نسمي  $(C_f)$  المنحني الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  .

I. (1) أحسب نهايتي الدالة  $f$  عند 0 وعند  $+\infty$  .

(2) بين أنه من أجل كل عدد موجب تماما  $x$  ،  $f'(x) = \frac{(x-1)(x^2 + 4x + 6)}{x(x^2 + 2)}$  ثم استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$

(3) شكل جدول تغيرات الدالة  $f$  .

(4) أدرس الوضع النسبي للمنحني  $(C_f)$  بالنسبة الى المستقيم  $(\Delta)$  ذي المعادلة  $y = x$  .

(5) أحسب  $f(4)$  ثم أرسم  $(\Delta)$  و  $(C_f)$  .

II. نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بـ :  $u_0 = \frac{3}{2}$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = f(u_n)$  .

(1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $1 < u_n < 2$  .

(2) أدرس رتبة المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ثم استنتج أنها متقاربة .

(3) عين نهاية المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  .

بالتوفيق و النجاح ☺ في البكالوريا ☺ جوان 2015 \* أستاذ المادة

اختبار في مادة الرياضيات

التمرين الأول (05 نقاط)

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة ذات المجهول المركب  $z$  التالية:  
 $(z^2 + 2z + 4)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$

(2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  نعتبر النقط  $A, B, C$  و  $D$  التي

لواحقها على الترتيب  $z_A = \sqrt{3} + i, z_B = \overline{z_A}, z_C = -1 - i\sqrt{3}, z_D = \overline{z_C}$ .

(أ) أكتب الأعداد المركبة  $z_A, z_B, z_C, z_D$  على الشكل الأسّي.  
(ب) بين أن النقط  $A, B, C$  و  $D$  تنتمي الى نفس الدائرة ( $C$ ) يطلب تعيين عناصرها.

(ج) بين أن:  $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_C} = i$  ثم عين قياسا للزاوية الموجهة  $(\overline{CA}, \overline{BD})$ .

ماذا تستنتج بالنسبة للمستقيمين  $(AC)$  و  $(BD)$ ؟

(3) نعتبر العدد المركب  $z_n$  الذي طويلته  $\frac{1}{2^n}$  و عمده له  $\frac{2n\pi}{3}$ ، حيث  $n$  عدد طبيعي.

ونعرف العدد المركب  $L_n$  بـ:  $L_n = z_D \times z_n$ .

(أ) أكتب كلا من العددين  $L_1, L_0$  على الشكل الجبري.

(ب) لتكن  $(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة بـ:  $u_n = |L_n|$  من أجل كل عدد طبيعي  $n$ .

▪ بين أن المتتالية  $(u_n)$  هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

▪ لتكن النقط  $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$  صور الأعداد المركبة  $L_0, L_1, L_2, \dots, L_n$  على الترتيب.

أحسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n = \|\overline{OM_0}\| + \|\overline{OM_1}\| + \dots + \|\overline{OM_n}\|$ ، ثم أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

التمرين الثاني (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  نعتبر النقط  $A(1; 2; 3), B(0; 1; 4), C(-1; -3; 2)$

و  $D(4; -2; 5)$  و الشعاع  $\vec{n} = 2\vec{i} + a\vec{j} + b\vec{k}$  حيث  $a, b$  عدنان حقيقيان.

1. (أ) بين أن النقط  $A, B, C$  تعين مستويا  $ABC$ .

(ب) عين العددين الحقيقيين  $a, b$  بحيث يكون الشعاع  $\vec{n}$  ناظميا للمستوي  $ABC$  ثم عين معادلة ديكرتية للمستوي  $ABC$ .

2. ليكن المستقيم  $\Delta$  ذي التمثيل الوسيطى:  $t \in \mathbb{R}; \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = 4 - t \end{cases}$

(أ) بين أن النقطة  $D$  تنتمي إلى المستقيم  $\Delta$  وأن المستقيم  $\Delta$  عمودي على المستوي  $ABC$ .

(ب) عين إحداثيات النقطة  $H$  المسقط العمودي للنقطة  $D$  على المستوي  $ABC$ .

(ج) أحسب المسافة بين النقطة  $D$  والمستوي  $ABC$ .

(د) بين أن النقطة  $H$  هي مركز ثقل المثلث  $ABC$ .

3. أدرس تقاطع المستقيم  $\Delta$  مع المستوي  $O, \vec{i}, \vec{j}$ .

### التمرين الثالث (04 نقاط)

- (1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي  $n$  بواقي القسمة الاقليدية للعدد  $2^n$  على العدد 5.  
 (2) عين باقي القسمة الاقليدية للعدد  $(2017^{4n+3} - 2 \times 2016^{8n} + 2014^{2n+1})$  على العدد 5 حيث  $n$  عدد طبيعي.  
 (3) بين أن العدد 131 أولي .

$$(4) \begin{cases} 3m + 7d = 2^n - 48 \\ ab = 5m \end{cases} \text{ عين الأعداد الطبيعية } n \text{ التي تحقق :}$$

حيث ،  $d = PGCD(a, b)$  و  $m = PPCM(a, b)$ .

- (5) عين قيم  $n$  بحيث يكون ،  $7 < n < 15$  ثم استنتج الثنائيات  $(a, b)$ .

### التمرين الرابع (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على المجموعة  $\mathbb{R}$  بـ :  $f(x) = (1 - 2x)e^{2x}$   
 نسمي  $(C_f)$  المنحني الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . (وحدة الطول  $2cm$ )

I. (1) أحسب نهايتي الدالة  $f$  عند  $-\infty$  وعند  $+\infty$ .

(2) أحسب عبارة  $f'(x)$  من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$ .

(3) شكل جدول تغيرات الدالة  $f$ .

(4) حل المعادلة  $f(x) = 0$  ثم استنتج نقاط تقاطع  $(C_f)$  مع محور الفواصل.

(5) أحسب  $f(1)$  ثم أرسم  $(C_f)$ .

(6) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي  $x$  التالية :

$$(E): f(x) = f(m)$$

(7) أ) عين العددين الحقيقيين  $b, a$  بحيث تكون الدالة  $F$  المعرفة بـ :  $F(x) = (ax + b)e^{2x}$  دالة أصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

ب) أحسب بـ  $cm^2$  و بدلالة  $\lambda$  المساحة  $S(\lambda)$  للحيز المستوي المحدد بالمنحني  $(C_f)$  و المستقيمت التي

معادلاتها :  $x = \frac{1}{2}, y = 0$  و  $x = \lambda$  حيث  $\lambda < \frac{1}{2}$  ثم أحسب  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} S(\lambda)$ .

II. نسمي  $f^{(1)} = f', f^{(2)} = f'', f^{(3)} = f''', \dots, f^{(n)}$  المشتقات المتتالية للدالة  $f$ .

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  ،  $f^{(n)}(x) = 2^n(1 - n - 2x)e^{2x}$ .

(2) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  المنحني  $(C_{f^{(n)}})$  الممثل للدالة  $f^{(n)}$  حيث  $f^{(n)}$  الدالة المشتقة من الرتبة

$n$  للدالة  $f$  يقبل مماسا يوازي حامل محور الفواصل في النقطة  $M_n(x_n; y_n)$ .

(أ) أحسب بدلالة  $n$  كلا من  $x_n$  و  $y_n$ .

(ب) بين أن المتتالية  $(x_n)$  حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول . أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ .

(ج) بين أن المتتالية  $(y_n)$  هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول . أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$ .

بالتوفيق و النجاح في البكالوريا ☺☺ جوان 2015 أستاذ المادة

العلامة	التصحيح
	<b>التمرين الأول :</b>
	(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب $z$ التالية : $z^2 - 8z + 17 = 0$
0.5 + 2 × 0.25	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>حل المعادلة : <math>z^2 - 8z + 17 = 0</math></b></li> <li>- حساب المميز <math>\Delta : \Delta = (-8)^2 - 4(1) \times (17) = -4</math></li> <li>أي <math>\Delta = (2i)^2</math></li> <li>- المعادلة تقبل حلين هما :</li> <li><math>z_2 = \frac{8+2i}{2} = 4+i</math> ، <math>z_1 = \frac{8-2i}{2} = 4-i</math></li> <li>مجموعة الحلول : <math>S = \{4-i; 4+i\}</math></li> </ul>
	(2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط $D, B, A$ التي لواحقها على الترتيب $a = 4-i$ و $b = 4+i$ و $d = -i$ . و ليكن $R$ الدوران الذي مركزه النقطة $\Omega$ ذات اللاحقة $\omega = 2$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$ (أ) بين أن العبارة المركبة للدوران $R$ من الشكل : $z' = iz + 2 - 2i$ .
0.75	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>تبيان أن العبارة المركبة للدوران <math>R</math> من الشكل : <math>z' = iz + 2 - 2i</math></b></li> <li>- العبارة المركبة للدوران <math>R</math> من الشكل : <math>z' - \omega = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - \omega)</math></li> <li>أي <math>z' - 2 = i(z - 2)</math> ومنه <math>z' = i(z - 2) + 2 = iz + 2 - 2i</math></li> <li><b>إذن <math>z' = iz + 2 - 2i</math></b></li> </ul>
	(ب) تحقق أن لاحقة النقطة $C$ صورة النقطة $B$ بالدوران $R$ هي $c = 1 + 2i$
0.25	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>التحقق أن لاحقة النقطة <math>C</math> صورة النقطة <math>B</math> بالدوران <math>R</math> هي <math>c = 1 + 2i</math></b></li> <li>• لدينا : <math>R(B) = C</math> يعني</li> <li><math>c = i \times b + 2 - 2i = i(4+i) + 2 - 2i = 4i - 1 + 2 - 2i = 1 + 2i</math></li> <li><b><math>c = 1 + 2i</math></b></li> </ul>
	(ج) بين أن : $\frac{c-d}{c-b} = -i$ ثم أستنتج طبيعة المثلث $BCD$ .
0.5	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>تبيان أن <math>\frac{c-d}{c-b} = -i</math></b></li> <li>- لدينا : <math>\frac{c-d}{c-b} = \frac{1+2i - (-i)}{1+2i - (4+i)} = \frac{1+3i}{-3+i} = \frac{(1+3i)(-3-i)}{(-3+i)(-3-i)}</math></li> <li>ومنه <math>\frac{c-d}{c-b} = \frac{-3-i-9i+3}{9+1} = \frac{-10i}{10} = -i</math></li> </ul>

• استنتاج طبيعة المثلث BCD :

0.25 + 0.25

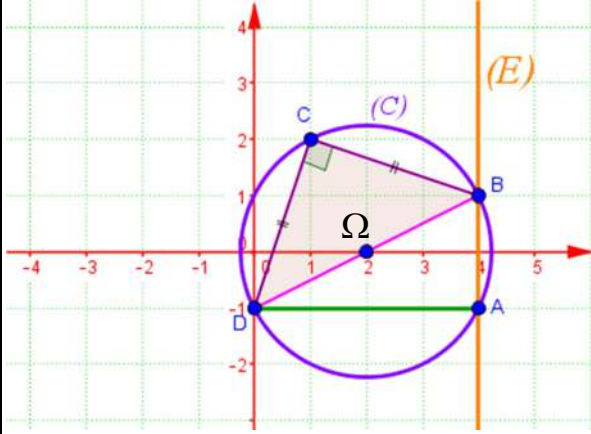
- لدينا :  $\left| \frac{c-d}{c-b} \right| = |-i| = 1$  ولدينا  $\arg\left(\frac{c-d}{c-b}\right) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$

- يعني  $\frac{DC}{BC} = 1$  أي  $DC = BC$  و  $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DC}) = -\frac{\pi}{2}$  أي  $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{DC}$

إذن المثلث BCD قائم في C ومتساوي الساقين

(د) بين أن النقط A, B, C و D تنتمي الى نفس الدائرة يطلب تعيين مركزها نصف قطرها

0.5



• تبيان أن النقط A, B, C و D تنتمي الى نفس الدائرة :

المثلث BCD قائم في C وبالتالي النقط D, C, B تنتمي الى دائرة مركزها منتصف الوتر أي  $\Omega$ .  
ولدينا :

$$\Omega A = |z_A - z_\Omega| = |4 - i - 2| = |2 - i|$$

$$\Omega A = \sqrt{5}$$

0.5

إذن :  $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D = \sqrt{5}$

ومنه النقط A, B, C و D تنتمي الى نفس الدائرة

مركزها  $\Omega(2; 0)$  ونصف قطرها  $R = \sqrt{5}$ .

(ه) عين مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث يكون ،

$$|-i - z|^2 - |4 - i - z|^2 = 16$$

• تعيين مجموعة النقط (E) من المستوي والتي تحقق :  $|-i - z|^2 - |4 - i - z|^2 = 16$  :

$$MD^2 - MA^2 = 16 \text{ يعني } |-i - z|^2 - |4 - i - z|^2 = 16$$

ولتكن النقطة I منتصف القطعة [DA]

$$\text{إذن لدينا : } (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ID})^2 - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 = 16$$

$$\text{أي } \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{ID}^2 - \overrightarrow{MI}^2 - 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IA}^2 = 16$$

$$\text{ومنه } 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{ID} - 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} = 16 \text{ لأن } \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{IA} \text{ (I منتصف القطعة [DA])}$$

$$\text{وبالتالي : } 2\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{ID} - \overrightarrow{IA}) = 16 \text{ أي } 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{AD} = 16$$

$$\text{إذن : } \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{DA} = 8$$

لتكن H المسقط العمودي للنقطة M على (DA) حيث  $\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{DA} = 8$

$$\text{أي } \overrightarrow{IH} \times \overrightarrow{DA} = 8$$

- ولدينا :  $DA = |z_A - z_D| = |4 - i + i| = |4| = 4$  وبالتالي  $IH = 2$

- وبالتالي H منطبقة على النقطة A.

$$\text{إذن } \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{DA} = 8 \text{ يعني } (\overrightarrow{IH} + \overrightarrow{HM}) \cdot \overrightarrow{DA} = 8$$

$$\text{ومنه } \overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{DA} = 8 \text{ أي } 8 + \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{DA} = 8$$

$$\text{وبالتالي } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DA} = 0 \text{ (لأن } H = A \text{)}$$

المجموعة (E) هي المستقيم العمودي على (DA) و المار من A أي

01

$$(E) = (AB)$$

أوبطريقة أخرى :

$$|-i-x-iy|^2 - |4-i-x-iy|^2 = 16 \text{ يعني } |-i-z|^2 - |4-i-z|^2 = 16$$

$$|-x+i(-1-y)|^2 - |4-x+(-1-y)|^2 = 16 \text{ ومنه :}$$

$$\text{أي } (-x)^2 + (-1-y)^2 - (4-x)^2 - (-1-y)^2 = 16 \text{ ومنه}$$

$$x^2 - 16 + 8x - x^2 = 16$$

$$\text{ومنه : } 8x = 32$$

وبالتالي :  $x = 4$  المجموعة (E) هي المستقيم ذي المعادلة  $x = 4$  العمودي على

$(x'x)$  والمار من النقطة A

### التمرين الثاني :

في الفضاء المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  نعتبر النقطتين  $I(3, -1, 0), A(2, 1, 1)$  و مجموعة النقط  $M(x, y, z)$  من الفضاء التي تحقق،

$$MA^2 - \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MI} = 0$$

(1) أ) بين أن النقطة A تنتمي الى المجموعة (P).

• تبيان أن النقطة A تنتمي الى المجموعة (P) :

$$- \text{ لدينا : } AA^2 - \overrightarrow{AA} \cdot \overrightarrow{AI} = 0 \text{ ومنه } A \in (P)$$

0.5

(ب) بين أن المجموعة (P) هي مستو  $x - 2y - z + 1 = 0$  معادلة ديكارتية له.

• تبيان أن المجموعة (P) هي مستو  $x - 2y - z + 1 = 0$  معادلة ديكارتية له:

$$- \text{ لدينا : } MA^2 - \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MI} = 0 \text{ يعني } \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MI} = 0$$

$$\text{ومنه } \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MI}) = 0 \text{ أي } \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{IM}) = 0$$

$$\text{وبالتالي } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{IA} = 0 \text{ أي } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} = 0$$

المجموعة (P) هي مستو  $\overrightarrow{IA}$  شعاع ناظمي له و يمر من النقطة A

- تعيين معادلة ديكارتية للمستوي (P) :

$$\text{لدينا : } \overrightarrow{AI}(1; -2; -1)$$

$$\text{معادلة (P) من الشكل } x - 2y - z + d = 0$$

- تعيين قيمة d : نعوض بإحداثيات النقطة A نجد :  $2 - 2(1) - 1 + d = 0$

$$\text{ومنه } d = 1 \text{ أي معادلة (P) هي } x - 2y - z + 1 = 0$$

0.5

(2) لتكن  $(S)$  سطح كرة مركزها النقطة  $I$  وتمر من النقطة  $A$ .

تحقق أن نصف قطر سطح الكرة  $(S)$  هو  $R = \sqrt{6}$  ثم عين معادلة ديكارتية لسطح الكرة  $(S)$

0.5

• التحقق أن نصف قطر  $(S)$  هو  $R = \sqrt{6}$ :

- لدينا :  $R = AI = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$ .

- تعيين معادلة ديكارتية لسطح الكرة  $(S)$ :

0.5

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 6$$

(3) ليكن  $(P')$  المستوي ذي المعادلة  $2x - y + z - 4 = 0$ .

أ) بين أن  $(P')$  يقطع  $(S)$  وفق دائرة  $(C)$  يطلب تعيين مركزها  $H$  ونصف قطرها  $r$ .

0.25

• تبين أن  $(P')$  قطع  $(S)$  وفق دائرة  $(C)$ :

- لدينا :  $d(I, (P')) = \frac{|2(3) - (-1) + 0 - 4|}{\sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (1)^2}} = \frac{|3|}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

أي لدينا :  $d(I, (P')) < R$  ومنه  $(P')$  قطع  $(S)$  وفق دائرة  $(C)$

• تعيين مركز الدائرة  $(C)$  ونصف قطرها :

- تمثيل وسيطي للمستقيم  $(\Delta)$  المار من  $I$  مركز سطح الكرة  $(S)$  والعمودي على  $(P')$ :

$$(\Delta): \begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = -t - 1; (t \in \mathbb{R}) \\ z = t \end{cases}$$

0.75

- تعيين نقطة تقاطع المستقيم  $(\Delta)$  مع المستوي  $(P')$ :

$$\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = -t - 1 \\ z = t \end{cases} \quad \text{نحل لجملة :} \quad \begin{cases} 2x - y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

إذن :  $6t + 3 = 0$  ومنه  $2(2t + 3) - (-t - 1) + t - 4 = 0$

$$H\left(2; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right) \text{ أي } \begin{cases} x=2 \\ y=-\frac{1}{2} \\ z=-\frac{1}{2} \end{cases} \text{ وبالتالي } t = -\frac{1}{2}$$

$$r = \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad r = \sqrt{R^2 - d^2(I, (P'))} = \sqrt{6 - \frac{6}{4}} : (C) \text{ حساب نصف قطر دائرة التقاطع}$$

ب) لتكن  $B(2; -2; -2)$  نقطة من الفضاء تحقق من أن القطعة  $[AB]$  أحد أقطار الدائرة  $(C)$

0.5

التحقق من أن القطعة  $[AB]$  أحد أقطار الدائرة  $(C)$  :

$$AB = \sqrt{(2-2)^2 + (-2-1)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} = 2r \quad \text{لدينا :}$$

وبالتالي  $[AB]$  أحد أقطار الدائرة  $(C)$

ج) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي  $(Q)$  المماس لسطح الكرة  $(S)$  في النقطة  $B$ .

0.5

كتابة معادلة ديكارتية للمستوي  $(Q)$  :

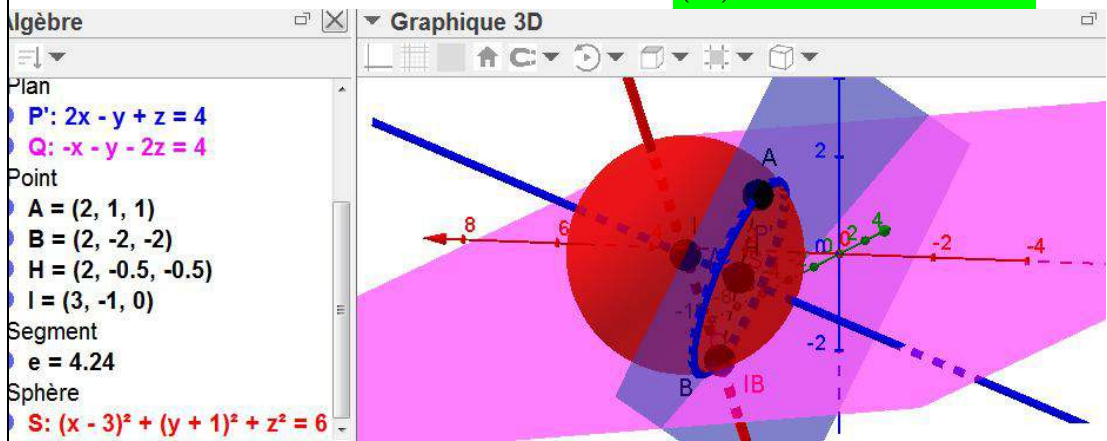
- شعاع ناظمي للمستوي  $(Q)$  :  $\vec{IB}(-1; -1; -2)$

- معادلة  $(Q)$  من الشكل  $-x - y - 2z + d = 0$

- لتعيين قيمة  $d$  نعوض بإحداثيات النقطة  $B$  نجد :  $-(2) - (-2) - 2(-2) + d = 0$

$$d = -4$$

$$\text{إذن : } (Q) : -x - y - 2z - 4 = 0$$



### التمرين الثالث :

1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي  $n$  ، بواقي القسمة الاقليدية للعدد  $5^n$  على العدد 7.

0.75

دراسة بواقي القسمة الاقليدية للعدد  $5^n$  على العدد 7 :

$$5^5 \equiv 3[7] \quad 5^4 \equiv 2[7] \quad 5^3 \equiv 6[7] \quad 5^2 \equiv 4[7] \quad 5^1 \equiv 5[7] \quad 5^0 \equiv 1[7]$$

$$5^6 \equiv 1[7]$$

0.75	<p>- بواقي القسمة الاقليدية للعدد <math>5^n</math> على العدد 7 تشكل متتالية دورية دورها <math>p = 6</math></p> <p>- من أجل كل عدد طبيعي <math>k</math> لدينا :</p> <table border="1" data-bbox="331 197 1423 300"> <tr> <td><math>n</math></td> <td><math>6k</math></td> <td><math>6k+1</math></td> <td><math>6k+2</math></td> <td><math>6k+3</math></td> <td><math>6k+4</math></td> <td><math>6k+5</math></td> </tr> <tr> <td><math>5^n \equiv \dots [7]</math></td> <td>1</td> <td>5</td> <td>4</td> <td>6</td> <td>2</td> <td>3</td> </tr> </table>	$n$	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$	$5^n \equiv \dots [7]$	1	5	4	6	2	3		
$n$	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$											
$5^n \equiv \dots [7]$	1	5	4	6	2	3											
	<p>(2) عين قيم العدد الطبيعي <math>n</math> بحيث يكون العدد <math>19^{6n+3} - 5^{6n+4} + 4n^2 + 1</math> قابلا للقسمة على العدد 7</p>																
01	<p>• <b>تعيين قيم العدد الطبيعي <math>n</math> بحيث يكون : <math>19^{6n+3} - 5^{6n+4} + 4n^2 + 1 \equiv 0 [7]</math> :</b></p> <p>- لدينا : <math>19 \equiv 5 [7]</math> ومنه <math>19^{6n+3} \equiv 5^{6n+3} [7]</math> أي <math>19^{6n+3} \equiv 6 [7]</math></p> <p>- ولدنا : <math>5^{6n+4} \equiv 2 [7]</math></p> <p>- إذن : <math>19^{6n+3} - 5^{6n+4} + 4n^2 + 1 \equiv 0 [7]</math> يكافئ <math>6 - 2 + 4n^2 + 1 \equiv 0 [7]</math></p> <p>أي <math>4n^2 + 5 \equiv 0 [7]</math></p> <p>ومنه : <math>4n^2 \equiv -5 [7]</math> إذن <math>4n^2 \equiv 2 [7]</math></p> <p>وبالتالي : <math>n^2 \equiv 4 [7]</math></p> <table border="1" data-bbox="331 846 1423 967"> <tr> <td><math>n \equiv \dots [7]</math></td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td><math>n^2 \equiv \dots [7]</math></td> <td>0</td> <td>1</td> <td>4</td> <td>2</td> <td>1</td> <td>4</td> <td>1</td> </tr> </table> <p>- ومنه : <math>n^2 \equiv 4 [7]</math> يعني <math>n \equiv 2 [7]</math> أو <math>n \equiv 5 [7]</math></p> <p>أي <math>n = 7\alpha + 2</math> أو <math>n = 7\alpha + 5</math> مع <math>\alpha \in \mathbb{N}</math></p> <p>(3) <math>N</math> عدد طبيعي يكتب <math>1xx0</math> في نظام التعداد ذي الأساس 5. حيث <math>x</math> عدد طبيعي .</p> <p>(أ) عين قيم العدد الطبيعي <math>x</math> حتى يكون العدد <math>N</math> قابلا للقسمة على 35.</p>	$n \equiv \dots [7]$	0	1	2	3	4	5	6	$n^2 \equiv \dots [7]$	0	1	4	2	1	4	1
$n \equiv \dots [7]$	0	1	2	3	4	5	6										
$n^2 \equiv \dots [7]$	0	1	4	2	1	4	1										
01	<p>• <b>تعيين قيم العدد الطبيعي <math>x</math> حتى يكون العدد <math>N</math> قابلا للقسمة على 35 :</b></p> <p>- لدينا : <math>N = 1 \times 5^3 + x \times 5^2 + x \times 5^1 + 0 \times 5^0 = 125 + 30x</math> مع <math>x &lt; 5</math></p> <p>وبالتالي <math>N</math> يقبل القسمة على 35 يعني <math>N \equiv 0 [35]</math></p> <p>أي أن <math>N \equiv 0 [7]</math> لان <math>N \equiv 0 [5]</math> و 5 أولي مع 7</p> <p>وبالتالي <math>N \equiv 0 [7]</math> يعني <math>125 + 30x \equiv 0 [7]</math></p> <p>ومنه : <math>6 + 2x \equiv 0 [7]</math></p> <p>يعني <math>2x \equiv -6 [7]</math> أي <math>2x \equiv 1 [7]</math></p> <p>وبالتالي : <math>x \equiv 4 [7]</math></p> <p>أي <math>x = 7k + 4</math> مع <math>x &lt; 5</math> إذن من أجل <math>k = 0</math> نجد <math>x = 4</math></p>																
	<p>(ب) أكتب العدد <math>N</math> في النظام العشري .</p>																
0.5	<p>• كتابة العدد <math>N</math> في النظام العشري :</p> <p><math>N = 125 + 30(4) = 245</math> <span style="background-color: yellow;"><math>N = 245</math></span></p>																
<b>التمرين الرابع :</b>																	
	<p>نعتبر الدالة العددية <math>f</math> المعرفة على المجال <math>]0; +\infty[</math> بـ : <math>f(x) = x + 3 \ln \left( \frac{x^2 + 2}{3x} \right)</math></p> <p>نسمي <math>(C_f)</math> المنحني الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس <math>(O, \vec{i}, \vec{j})</math>.</p>																

I. 1) أحسب نهايتي الدالة  $f$  عند 0 وعند  $+\infty$ .

• حساب نهايتي الدالة  $f$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{x^2 + 2}{3x} \right) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left( \frac{x^2 + 2}{3x} \right) = +\infty \end{array} \right. \quad \text{لان} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( x + 3 \ln \left( \frac{x^2 + 2}{3x} \right) \right) = +\infty -$$

0.25 + 0.25

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 + 2}{3x} \right) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left( \frac{x^2 + 2}{3x} \right) = +\infty \end{array} \right. \quad \text{لان} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x + 3 \ln \left( \frac{x^2 + 2}{3x} \right) \right) = +\infty -$$

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما  $x$ ،  $f'(x) = \frac{(x-1)(x^2+4x+6)}{x(x^2+2)}$  ثم

استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$

• حساب  $f'(x)$ :

$$f'(x) = 1 + 3 \times \frac{2x(3x) - 3(x^2 + 2)}{(3x)^2} = 1 + 3 \times \frac{6x^2 - 3x^2 - 6}{9x^2} \times \frac{3x}{x^2 + 2}$$
$$f'(x) = 1 + \frac{6x^2 - 3x^2 - 6}{9x^2} \times \frac{9x}{x^2 + 2} = 1 + \frac{3x^2 - 6}{x(x^2 + 2)} = \frac{x^3 + 3x^2 + 2x - 6}{x(x^2 + 2)}$$

0.75

وبالتالي:  $f'(x) = \frac{(x-1)(x^2+4x+6)}{x(x^2+2)}$  من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما  $x$

• استنتاج اتجاه تغير الدالة  $f$ :

$$\frac{(x-1)(x^2+4x+6)}{x(x^2+2)} = 0 \quad \text{يعني} \quad f'(x) = 0$$

ومنه  $x-1=0$  أو  $x^2+4x+6=0$  (ليس لها حل لان  $\Delta = 16 - 24 = -8 < 0$ ) مع  $x \in ]0; +\infty[$

0.5

ومنه  $x=1$

إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $(x-1)(x^2+4x+6)$  لان  $x(x^2+2) > 0$

$x$	0	1	$+\infty$
$x-1$	-	0	+
$x^2+4x+6$	+		+
$f'(x)$	-	0	+

- الدالة  $f$  متناقصة على المجال  $]0;1]$  و متزايدة على المجال  $[1;+\infty[$ .

(3) شكل جدول تغيرات الدالة  $f$ .

• جدول تغيرات الدالة  $f$ :

0.5

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

(4) أدرس الوضع النسبي للمنحني  $(C_f)$  بالنسبة الى المستقيم  $(\Delta)$  ذي المعادلة  $y = x$ .

• دراسة الوضع النسبي للمنحني  $(C_f)$  بالنسبة للمستقيم  $(\Delta)$  ذي المعادلة  $y = x$ :

- ندرس إشارة الفرق  $f(x) - y$

- لدينا:  $f(x) - y = x + 3 \ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right) - x = 3 \ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right)$

-  $3 \ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right) = 0$  يعني  $f(x) - y = 0$

ومنه  $\ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right) = 0$  أي  $\frac{x^2+2}{3x} = 1$

- وبالتالي  $x^2 + 2 = 3x$

إذن:  $x^2 - 3x + 2 = 0$

- حساب المميز:  $\Delta = (-3)^2 - 4(1)(2) = 9 - 8 = 1$

المعادلة تقبل حلين متميزين هما:  $x_1 = \frac{3-1}{2} = 1$  ،  $x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$

01

$x$	0	1	2	$+\infty$	
$f(x) - y$	+	0	-	0	+
		$(C_f)$ يقع فوق $(\Delta)$	$(C_f)$ يقع تحت $(\Delta)$	$(C_f)$ يقع فوق $(\Delta)$	
		$(\Delta)$ يقطع $(C_f)$	$(\Delta)$ يقطع $(C_f)$		

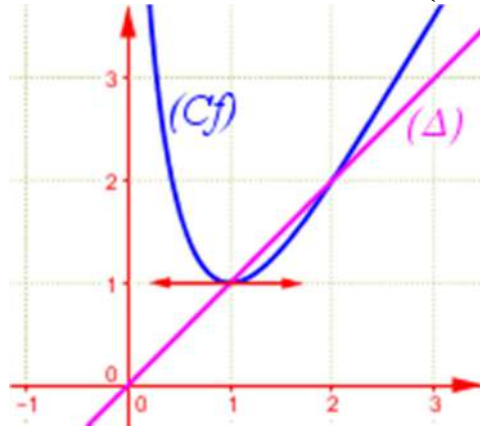
(5) أحسب  $f(4)$  ثم أرسم  $(\Delta)$  و  $(C_f)$ .

• حساب  $f(4)$ :

0.25

$$f(4) = 4 + 3 \ln \left( \frac{16+2}{3 \times 4} \right) = 4 + 3 \ln \frac{18}{12} = 5.22 \quad -$$

• الرسم :



01

II. نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بـ:  $u_0 = \frac{3}{2}$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

(1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $1 < u_n < 2$ .

• البرهان بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $1 < u_n < 2$  :

- نسمي هذه الخاصية  $P(n)$ .

-1 من أجل  $n = 0$  لدينا :

$$u_0 = \frac{3}{2} \quad \text{إذن} \quad 1 < u_0 < 2 \quad \text{ومنه} \quad P(0) \text{ صحيحة.}$$

-2 نفرض صحة  $P(n)$  أي نفرض أن  $1 < u_n < 2$ .

ونبرهن على صحة  $P(n+1)$  أي نبرهن أن  $1 < u_{n+1} < 2$

0.75

لدينا :  $1 < u_n < 2$  ومنه  $f(1) < f(u_n) < f(2)$  لان الدالة  $f$  متزايدة تماما على المجال  $]1; 2[$

- ومنه  $1 < u_{n+1} < 2$  لان  $u_{n+1} = f(u_n)$  ،  $f(1) = 1$  و  $f(2) = 2$  أي  $P(n+1)$  صحيحة.

- حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن  $P(n)$  صحيحة من أجل كل عدد طبيعي  $n$ .

من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $1 < u_n < 2$ .

(2) أدرس رتبة المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ثم استنتج أنها متقاربة .

• دراسة رتبة المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  أي دراسة تغيرات المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  :

- ندرس إشارة الفرق  $u_{n+1} - u_n$

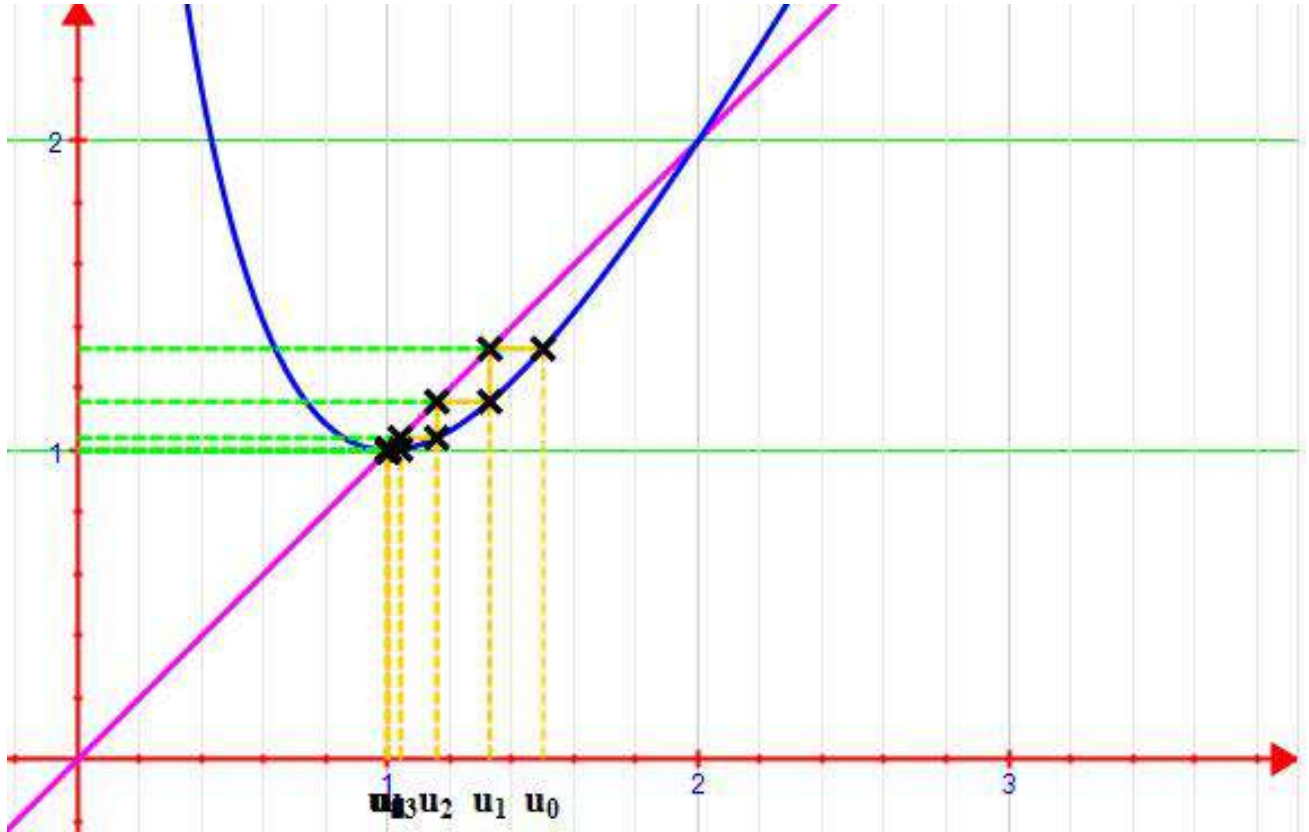
$$u_{n+1} - u_n = u_n + 3 \ln \left( \frac{u_n^2 + 2}{3u_n} \right) - u_n = 3 \ln \left( \frac{u_n^2 + 2}{3u_n} \right) \quad \text{لدينا :}$$

- بما أن  $u_n \in ]1; 2[$  فإن  $3 \ln \left( \frac{u_n^2 + 2}{3u_n} \right) < 0$

من أجل  $x \in ]1; 2[$  فإن  $f(x) - x < 0$  (السؤال (4))

0.5

	وبالتالي $u_{n+1} - u_n < 0$ ومنه المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متناقصة تماما .
0.5	• استنتاج أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة : - المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ محدودة من الأسفل بالعدد 1 وهي متناقصة تماما فهي متقاربة وتتقارب من العدد 1 .
	(3) عين نهاية المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
0.25	• تعيين نهاية المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

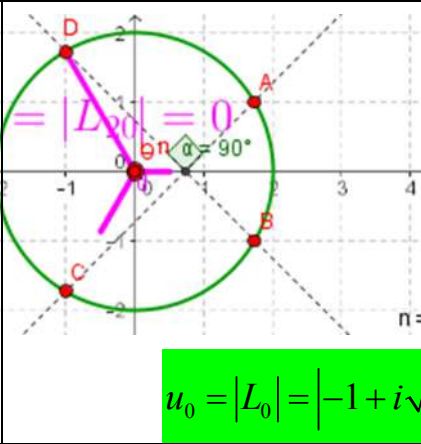


بالتوفيق و النجاح ☺ في البكالوريا 2015 ©



العلامة	التصحيح
05 نقاط	<p>التمرين الأول ☺☺☺</p> <p>(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة <math>\mathbb{C}</math> المعادلة ذات المجهول المركب <math>z</math> التالية :</p> $(z^2 + 2z + 4)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$
0.5	<p>■ حل المعادلة <math>(z^2 + 2z + 4)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0</math> :</p> <p><math>z^2 + 2z + 4 = 0</math> أو <math>z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0</math> يكافئ <math>(z^2 + 2z + 4)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0</math></p> <p>■ حل المعادلة : <math>z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0</math></p> <p>حساب المميز : <math>\Delta = (-2\sqrt{3})^2 - 4(1)(4) = 12 - 16 = -4 = (2i)^2</math></p> <p>المعادلة تقبل حلين هما : <math>z_2 = \bar{z}_1 = \sqrt{3} + i, z_1 = \frac{2\sqrt{3} - 2i}{2} = \sqrt{3} - i</math></p>
0.5	<p>■ حل المعادلة <math>z^2 + 2z + 4 = 0</math></p> <p>حساب المميز : <math>\Delta = (2)^2 - 4(1)(4) = 4 - 16 = -12 = (2\sqrt{3}i)^2</math></p> <p>المعادلة تقبل حلين هما : <math>z'' = \bar{z}' = -1 + i\sqrt{3}, z' = \frac{-2 - 2i\sqrt{3}}{2} = -1 - i\sqrt{3}</math></p>
	<p>■ مجموعة حلول المعادلة <math>(z^2 + 2z + 4)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0</math> :</p> $S = \{\sqrt{3} - i, \sqrt{3} + i, -1 - i\sqrt{3}, -1 + i\sqrt{3}\}$
	<p>(2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر <math>(O, \vec{u}, \vec{v})</math> نعتبر النقط <math>A, B, C, D</math> التي لواحقها على الترتيب <math>z_A = \sqrt{3} + i, z_B = \bar{z}_A, z_C = -1 - i\sqrt{3}</math> و <math>z_D = \bar{z}_C</math></p> <p>أ) أكتب الأعداد المركبة <math>z_C, z_B, z_A</math> و <math>z_D</math> على الشكل الأسّي</p>
0.5	<p>■ كتابة الأعداد <math>z_C, z_B, z_A</math> و <math>z_D</math> على الشكل الأسّي:</p> <p>لدينا : <math>z_A = \sqrt{3} + i</math></p> <p>■ حساب الطويلة : <math> z_A  =  \sqrt{3} + i  = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2</math></p> <p>■ تعيين عمدة للعدد <math>z_A</math> نضع : <math>\theta = \arg(z_A)</math></p> <p>لدينا : <math display="block">\begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = \frac{1}{2} \end{cases}</math></p> <p>ومنه <math>\theta \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]</math> أي <math>z_A = 2e^{i\frac{\pi}{6}}</math></p> <p>■ ولدينا : <math>z_B = \bar{z}_A = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}</math></p> <p>■ <math>z_C = -1 - i\sqrt{3}</math></p> <p>حساب الطويلة : <math> z_C  =  -1 - i\sqrt{3}  = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2</math></p>

0.5	<p>تعيين عمدة للعدد <math>z_C</math> : نضع : <math>\theta' = \arg(z_C)</math></p> <p>إذن <math>z_C = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}</math> ولدينا : <math>\begin{cases} \cos \theta' = -\frac{1}{2} \\ \sin \theta' = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}</math> ومنه <math>\theta \equiv \frac{4\pi}{3} [2\pi]</math></p> <p>ولدينا : <math>z_D = z_C = 2e^{-i\frac{4\pi}{3}}</math></p>
	<p>(ب) بين أن النقط <math>C, B, A</math> و <math>D</math> تنتمي الى نفس الدائرة <math>(C)</math> يطلب تعيين عناصرها .</p>
0.25	<p>تبيان أن النقط <math>C, B, A</math> و <math>D</math> تنتمي الى نفس الدائرة <math>(C)</math> :  لدينا : <math>OA = OB = OC = OD = 2</math> أي <math> z_A  =  z_B  =  z_C  =  z_D  = 2</math>  ومنه النقط <math>C, B, A</math> و <math>D</math> تنتمي الى نفس الدائرة <math>(C)</math> ذات المركز <math>O</math> ونصف قطرها <math>r = 2</math></p>
	<p>(ج) بين أن : <math>\frac{z_D - z_B}{z_A - z_C} = i</math> ثم عين قياسا للزاوية الموجهة <math>(\overline{CA}, \overline{BD})</math>.</p>
0.5	<p>تبيان أن <math>\frac{z_D - z_B}{z_A - z_C} = i</math> ثم تعيين قياسا للزاوية الموجهة <math>(\overline{CA}, \overline{BD})</math> :  لدينا :  <math display="block">\frac{z_D - z_B}{z_A - z_C} = \frac{-1 + i\sqrt{3} - \sqrt{3} + i}{\sqrt{3} + i + 1 + i\sqrt{3}} = \frac{-1 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})}{1 + \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})} = \frac{i^2(1 + \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3})}{1 + \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})}</math> <math display="block">\frac{z_D - z_B}{z_A - z_C} = \frac{i(i(1 + \sqrt{3}) + (1 + \sqrt{3}))}{1 + \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})} = i \times \frac{1 + \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})}{1 + \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})} = i</math> أي  إذن <math>\frac{z_D - z_B}{z_A - z_C} = i</math>  تعيين قياسا للزاوية الموجهة <math>(\overline{CA}, \overline{BD})</math> :  <math>(\overline{CA}, \overline{BD}) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}</math></p>
	<p>ماذا تستنتج بالنسبة للمستقيمين <math>(AC)</math> و <math>(BD)</math> ؟</p>
0.25	<p>الاستنتاج بالنسبة للمستقيمين <math>(AC)</math> و <math>(BD)</math> :  يعني <math>(\overline{CA}, \overline{BD}) = \frac{\pi}{2}</math> <math>(AC) \perp (BD)</math></p>
	<p>(3) نعتبر العدد المركب <math>z_n</math> الذي طويلته <math>\frac{1}{2^n}</math> و <math>\frac{2n\pi}{3}</math> عمدة له ، حيث <math>n</math> عدد طبيعي .  ونعرف العدد المركب <math>L_n</math> ب : <math>L_n = z_D \times z_n</math>  (أ) أكتب كلا من العددين <math>L_1, L_0</math> على الشكل الجبري .</p>
	<p>كتابة كلا من العددين <math>L_1, L_0</math> على الشكل الجبري :  لدينا : <math>L_0 = z_D \times z_0 = 2e^{-i\frac{4\pi}{3}} \times \frac{1}{2^0} \times e^{i\frac{2 \times 0 \times \pi}{3}} = 2e^{-i\frac{4\pi}{3}} = -1 + i\sqrt{3}</math></p>

0.5	$L_1 = z_D \times z_1 = 2e^{-i\frac{4\pi}{3}} \times \frac{1}{2} \times e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2 \times \frac{1}{2} \times e^{-i\frac{4\pi}{3} + i\frac{2\pi}{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ $L_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad L_0 = -1 + i\sqrt{3} \quad \text{إذن}$
	<p>(ب) لتكن <math>(u_n)</math> المتتالية العددية المعرفة بـ: <math>u_n =  L_n </math> من أجل كل عدد طبيعي <math>n</math>.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>بين أن المتتالية <math>(u_n)</math> هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .</li> <li>لتكن النقط <math>M_0, M_1, M_2, \dots, M_n</math> صور الأعداد المركبة <math>L_0, L_1, L_2, \dots, L_n</math> على الترتيب .</li> </ul> <p>أحسب بدلالة <math>n</math> المجموع <math>S_n = \ \overrightarrow{OM_0}\  + \ \overrightarrow{OM_1}\  + \dots + \ \overrightarrow{OM_n}\ </math> ، ثم أحسب <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n</math></p>
0.5	<p>تبيان أن المتتالية <math>(u_n)</math> هندسية :</p> <p>لدينا : <math>u_n =  L_n  =  z_D \times z_n  =  z_D  \times  z_n  = 2 \times \frac{1}{2^n}</math></p> <p>إذن : <math>u_{n+1} = 2 \times \frac{1}{2^{n+1}} = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \left( 2 \times \frac{1}{2^n} \right) = \frac{1}{2} u_n</math></p> <p>أي <math>u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n</math></p> <p>ومنه <math>(u_n)</math> هندسية أساسها <math>q = \frac{1}{2}</math> و حدها الأول <math>u_0 =  L_0  =  -1 + i\sqrt{3}  = 2</math></p> 
0.5	<p>حساب المجموع <math>S_n = \ \overrightarrow{OM_0}\  + \ \overrightarrow{OM_1}\  + \dots + \ \overrightarrow{OM_n}\ </math> :</p> <p>لدينا : <math>S_n = \ \overrightarrow{OM_0}\  + \ \overrightarrow{OM_1}\  + \dots + \ \overrightarrow{OM_n}\  = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \left( \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right)</math></p> $S_n = 2 \times \left( \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = 4 \times \left( 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right) = 4 - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n$
0.25	<p>حساب <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n</math> :</p> <p>لأن <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0</math> فإن <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ 4 - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] = 4</math></p>
04 نقاط	<p>التمرين الثاني ☺☺☺</p>
	<p>الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس <math>(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})</math> نعتبر النقط <math>A(1; 2; 3), B(0; 1; 4), C(-1; -3; 2), D(4; -2; 5)</math> والشعاع <math>\vec{n} = 2\vec{i} + a\vec{j} + b\vec{k}</math> حيث <math>a, b</math> عدنان حقيقيان .</p> <p>1. (أ) بين أن النقط <math>A, B, C</math> تعين مستويا <math>(ABC)</math> .</p>
0.25 + 0.25	<p>تبيان أن النقط <math>A, B, C</math> تعين مستويا :</p> <p>لدينا : <math>\overrightarrow{AB}(-1; -1; 1)</math> و <math>\overrightarrow{AC}(-2; -5; -1)</math></p>

0.25	<p>لدينا : <math>\frac{-2}{-1} \neq \frac{-5}{-1} \neq \frac{-1}{1}</math></p> <p>إذن لا يوجد عدد حقيقي <math>k</math> بحيث يكون <math>\vec{AC} = k\vec{AB}</math> ، ومنه النقط <math>C, B, A</math> ليست في استقامة فهي تعين مستويا.</p>
	<p>(ب) عين العددين الحقيقيين <math>b, a</math> بحيث يكون الشعاع <math>\vec{n}</math> ناظما للمستوي <math>(ABC)</math> ثم عين معادلة ديكارتية للمستوي <math>(ABC)</math>.</p>
0.5	<p>■ تعيين العددين الحقيقيين <math>b, a</math> بحيث يكون الشعاع <math>\vec{n}</math> ناظما للمستوي <math>(ABC)</math> :</p> <p>لدينا : <math>\vec{n}(2; a; b)</math> ناظما للمستوي <math>(ABC)</math> يكافئ <math>\begin{cases} \vec{n} \perp \vec{AB} \\ \vec{n} \perp \vec{AC} \end{cases}</math></p> <p>يكافئ <math>\begin{cases} 2 \times (-1) - a + b = 0 \\ 2(-2) - 5a - b = 0 \end{cases}</math> يكافئ <math>\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases}</math></p> <p>يكافئ <math>\begin{cases} -a + b - 2 = 0 \dots (1) \\ -5a - b - 4 = 0 \dots (2) \end{cases}</math></p> <p>■ بالجمع نجد : <math>-a + b - 2 - 5a - b - 4 = 0</math> ومنه <math>-6a = 6</math> أي <math>a = -1</math></p> <p>■ من أجل <math>a = -1</math> بالتعويض في المعادلة (1) نجد : <math>b = 1</math></p> <p>أي <math>\vec{n}(2; -1; 1)</math> ناظمي للمستوي <math>(ABC)</math></p>
0.5	<p>■ تعيين معادلة ديكارتية للمستوي <math>(ABC)</math> :</p> <p>■ معادلة <math>(ABC)</math> من الشكل <math>2x - y + z + d = 0</math></p> <p>■ تعيين قيمة <math>d</math> نعوض بإحداثيات النقطة <math>A(1; 2; 3)</math> نجد : <math>2(1) - 2 + 3 + d = 0</math> ومنه <math>d = -3</math></p> <p>معادلة للمستوي <math>(ABC)</math> : <math>2x - y + z - 3 = 0</math></p>
	<p>2. ليكن المستقيم <math>(\Delta)</math> ذي التمثيل الوسيطى : <math>(t \in \mathbb{R})</math> <math>\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = 4 - t \end{cases}</math></p> <p>(أ) بين أن النقطة <math>D</math> تنتمي إلى المستقيم <math>(\Delta)</math> وأن المستقيم <math>(\Delta)</math> عمودي على المستوي <math>(ABC)</math>.</p>
0.25	<p>■ تبين أن النقطة <math>D</math> تنتمي إلى المستقيم <math>(\Delta)</math> :</p> <p>■ من أجل <math>(x; y; z) = (4; -2; 5)</math> بالتعويض في الجملة السابقة نجد : <math>\begin{cases} 4 = 2 - 2t \\ -2 = -1 + t \\ 5 = 4 - t \end{cases}</math></p> <p>ومنه <math>\begin{cases} 2t = -2 \\ t = -1 \\ t = -1 \end{cases}</math> أي <math>t = -1</math> ومنه <math>D \in (\Delta)</math></p>

0.25	<ul style="list-style-type: none"> <li>تبيان أن المستقيم <math>(\Delta)</math> عمودي على المستوي <math>(ABC)</math>:</li> <li>لدينا: <math>\vec{n}(2;-1;1)</math> شعاع ناظمي للمستوي <math>(ABC)</math></li> <li>ولدينا: <math>\vec{u}(-2;1;-1)</math> شعاع توجيه <math>(\Delta)</math></li> <li>نلاحظ أن: <math>\vec{n} = -\vec{u}</math> ومنه <math>\vec{n} \parallel \vec{u}</math> أي <math>(\Delta) \perp (ABC)</math></li> </ul>
	<p>ب) عين إحداثيات النقطة <math>H</math> المسقط العمودي للنقطة <math>D</math> على المستوي <math>(ABC)</math>:</p>
0.5	<ul style="list-style-type: none"> <li>تعيين إحداثيات النقطة <math>H</math> المسقط العمودي للنقطة <math>D</math> على المستوي <math>(ABC)</math>:</li> <li>إحداثيات النقطة <math>H</math> هي حل للجملية: <ul style="list-style-type: none"> <li><math>x = 2 - 2t</math></li> <li><math>y = -1 + t</math></li> <li><math>z = 4 - t</math></li> <li><math>2x - y + z - 3 = 0</math></li> </ul> </li> <li>أي <math>2(2 - 2t) - (-1 + t) + (4 - t) - 3 = 0</math> ومنه <math>-6t + 6 = 0</math> وبالتالي <math>t = 1</math></li> <li>إذن: <math>H(0;0;3)</math></li> </ul>
	<p>ج) أحسب المسافة بين النقطة <math>D</math> والمستوي <math>(ABC)</math>.</p>
0.5	<ul style="list-style-type: none"> <li>حساب المسافة بين النقطة <math>D</math> والمستوي <math>(ABC)</math>:</li> <li>لدينا: <math>d(D, (ABC)) = DH = \sqrt{(-4)^2 + (2)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}</math></li> <li>أو بطريقة أخرى: <math>d(D, (ABC)) = \frac{ 2(4) - (-2) + 5 - 3 }{\sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (1)^2}} = \frac{ 12 }{\sqrt{6}} = \frac{12\sqrt{6}}{6} = 2\sqrt{6}</math></li> <li><math>d(D, (ABC)) = 2\sqrt{6}</math></li> </ul>
	<p>د) بين أن النقطة <math>H</math> هي مركز ثقل المثلث <math>ABC</math>.</p>
0.25	<ul style="list-style-type: none"> <li>تبيان أن النقطة <math>H</math> هي مركز ثقل المثلث <math>ABC</math>:</li> <li><math>H</math> هي مركز ثقل المثلث <math>ABC</math> يعني <math>\vec{HA} + \vec{HB} + \vec{HC} = \vec{0}</math></li> <li>لدينا: <math>\vec{HA} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \vec{HB} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \vec{HC} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}</math> أي <math>\vec{HA} + \vec{HB} + \vec{HC} = \vec{0}</math></li> <li>ومنه النقطة <math>H</math> هي مركز ثقل المثلث <math>ABC</math></li> </ul>
	<p>3) أدرس تقاطع المستقيم <math>(\Delta)</math> مع المستوي <math>(O, \vec{i}, \vec{j})</math>.</p>
0.25	<ul style="list-style-type: none"> <li>دراسة تقاطع المستقيم <math>(\Delta)</math> مع المستوي <math>(O, \vec{i}, \vec{j})</math>:</li> <li>لدينا معادلة للمستوي <math>(O, \vec{i}, \vec{j})</math> هي <math>z = 0</math> ومنه شعاع ناظمي له هو <math>\vec{k}(0;0;1)</math></li> <li>ولدينا شعاع توجيه للمستقيم <math>(\Delta)</math> هو <math>\vec{u}(-2;1;-1)</math></li> <li>إذن: <math>\vec{k} \cdot \vec{u} = 0 \times (-2) + 0 \times 1 + 1 \times (-1) = -1 \neq 0</math> ومنه <math>(\Delta)</math> لا يوازي <math>(O, \vec{i}, \vec{j})</math></li> <li>أي <math>(\Delta)</math> يقطع <math>(O, \vec{i}, \vec{j})</math> في نقطة <math>F</math>.</li> </ul>

0.25

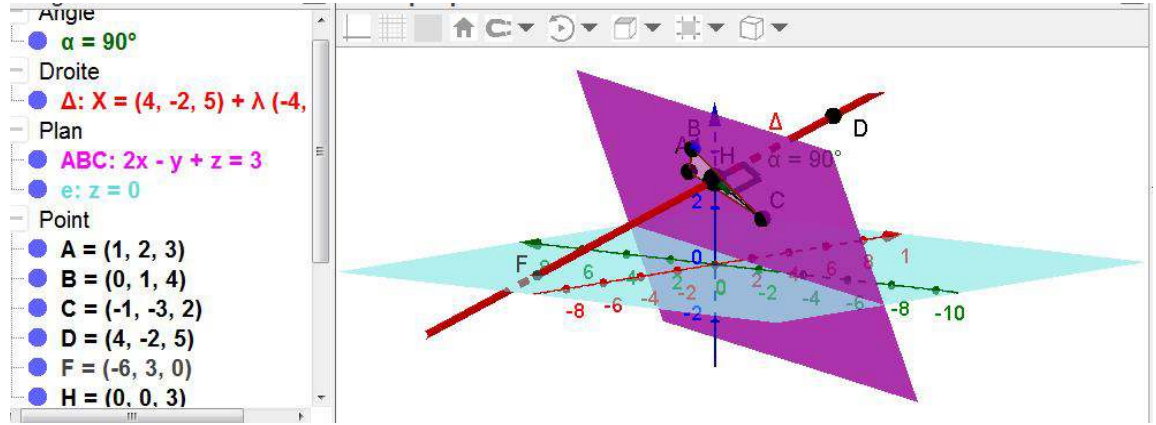
$$\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = 4 - t \\ z = 0 \end{cases}$$

إحداثيات النقطة  $F$  هي حل للجملية :

أي  $4 - t = 0$  ومنه  $t = 4$   
 من أجل  $t = 4$  بالتعويض في جملة التمثيل الوسيطية لـ  $(\Delta)$  نجد :

$$\begin{cases} x = -6 \\ y = 3 \\ z = 0 \end{cases}$$

ومنه  $F(-6; 3; 0)$



04 نقاط

التمرين الثالث

(1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي  $n$  بواقي القسمة الاقليدية للعدد  $2^n$  على العدد 5.

■ دراسة بواقي القسمة الاقليدية للعدد  $2^n$  على العدد 5:  
 لدينا :

$$2^4 \equiv 1[5] \quad 2^3 \equiv 3[5] \quad 2^2 \equiv 4[5] \quad 2^1 \equiv 2[5] \quad 2^0 \equiv 1[5]$$

إذن بواقي القسمة الاقليدية للعدد  $2^n$  على العدد 5 تشكل متتالية دورية دورها  $p = 4$ .  
 من أجل كل عدد طبيعي  $k$  لدينا :

$n$	$4k$	$4k + 1$	$4k + 2$	$4k + 3$
باقي قسمة العدد $2^n$ على 5	1	2	4	3

(2) عين باقي القسمة الاقليدية للعدد  $(2017^{4n+3} - 2 \times 2016^{8n} + 2014^{2n+1})$  على العدد 5 حيث  $n$  عدد طبيعي.

■ تعيين باقي القسمة الاقليدية للعدد  $(2017^{4n+3} - 2 \times 2016^{8n} + 2014^{2n+1})$  على 5:

لدينا :  $2017^{4n+3} \equiv 2^{4n+3}[5]$  أي  $2017^{4n+3} \equiv 3[5]$

ولدينا :  $2016^{8n} \equiv 1^{8n}[5]$  أي  $2016^{8n} \equiv 1[5]$

و  $2014^{2n+1} \equiv 4^{2n+1}[5]$  أي  $2014^{2n+1} \equiv (2^2)^{2n+1}[5]$  ومنه  $2014^{2n+1} \equiv 2^{4n+2}[5]$

وبالتالي  $2014^{2n+1} \equiv 4[5]$

■ إذن  $2017^{4n+3} - 2 \times 2016^{8n} + 2014^{2n+1} \equiv 3 - 2 \times 1 + 4[5]$

ومنه  $2017^{4n+3} - 2 \times 2016^{8n} + 2014^{2n+1} \equiv 0[5]$

0.75

	أي باقي القسمة الاقليدية للعدد $(2017^{4n+3} - 2 \times 2016^{8n} + 2014^{2n+1})$ على 5 هو 0
	(3) بين أن العدد 131 أولي .
0.5	<ul style="list-style-type: none"> <li>تبيان أن العدد 131 أولي :</li> <li>لدينا : <math>\sqrt{131} = 11.45</math></li> <li>العدد 131 لا يقبل القسمة على أي عدد من الأعداد الأولية الأصغر من أوتساوي 11 وهي <math>\{2;3;5;7;11\}</math></li> <li><math>131 \equiv 10[11], 131 \equiv 5[7], 131 \equiv 1[5], 131 \equiv 2[3], 131 \equiv 1[2]</math></li> <li>ومنه العدد 131 أولي .</li> </ul>
	(4) عين الأعداد الطبيعية $n$ التي تحقق : <ul style="list-style-type: none"> <li><math>\begin{cases} 3m + 7d = 2^n - 48 \\ ab = 5m \end{cases}</math></li> <li>حيث ، <math>d = PGCD(a, b)</math> و <math>m = PPCM(a, b)</math>.</li> </ul>
0.75	<ul style="list-style-type: none"> <li>تعيين الأعداد <math>n</math> التي تحقق : <ul style="list-style-type: none"> <li><math>\begin{cases} 3m + 7d = 2^n - 48 \\ ab = 5m \end{cases}</math></li> <li>لدينا <math>ab = 5m</math> ولدينا <math>ab = md</math> ومنه <math>d = 5</math></li> <li>نضع : <math>a = 5a'</math> و <math>b = 5b'</math> مع <math>a' \wedge b' = 1</math> (<math>a'</math> أولي مع <math>b'</math>)</li> <li>إذن <math>ab = 5m</math> يعني <math>5a' \times 5b' = 5m</math> أي <math>m = 5a'b'</math></li> <li>وبالتالي : <math>3m + 7d = 2^n - 48</math> معناه <math>3 \times 5a'b' + 7 \times 5 = 2^n - 48</math></li> <li>أي <math>5(3a'b' + 7) = 2^n - 48</math></li> <li><math>3a'b' + 7</math> طبيعي يعني <math>2^n - 48 \equiv 0[5]</math> ومنه <math>2^n - 3 \equiv 0[5]</math></li> <li>أي <math>2^n \equiv 3[5]</math> وبالتالي : <math>n = 4k + 3</math> مع <math>k \in \mathbb{N}</math></li> </ul> </li> </ul>
	(5) عين قيم $n$ بحيث يكون ، $7 < n < 15$ ثم استنتج الثنائيات $(a; b)$ .
0.5	<ul style="list-style-type: none"> <li>تعيين قيم العدد الطبيعي <math>n</math> بحيث يكون ، <math>7 &lt; n &lt; 15</math></li> <li>لدينا : <math>7 &lt; n &lt; 15</math> معناه <math>7 &lt; 4k + 3 &lt; 15</math> أي <math>4 &lt; 4k &lt; 12</math></li> <li>وبالتالي : <math>1 &lt; k &lt; 3</math></li> <li>إذن <math>k = 2</math> ومنه <math>n = 11</math></li> </ul>
0.5	<ul style="list-style-type: none"> <li>استنتاج الثنائيات <math>(a; b)</math> :</li> <li>من أجل <math>n = 11</math> لدينا : <ul style="list-style-type: none"> <li><math>5(3a'b' + 7) = 2^{11} - 48</math> ومنه <math>5(3a'b' + 7) = 2000</math></li> <li>أي <math>3a'b' + 7 = 400</math></li> <li>ومنه <math>a'b' = 131</math></li> </ul> </li> <li>وبالتالي مجموعة الثنائيات <math>(a'; b')</math> <math>\{(131; 1), (1; 131)\}</math></li> <li>ومنه مجموعة الثنائيات <math>(a; b)</math> <math>\{(655; 5), (5; 655)\}</math></li> </ul>
(07 نقاط)	التمرين الرابع ☺☺☺
	نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (1 - 2x)e^{2x}$ نسمي $(C_f)$ المنحني الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . (وحدة الطول $2cm$ )

I. 1) أحسب نهايتي الدالة  $f$  عند  $-\infty$  وعند  $+\infty$ .

■ حساب النهايات عند  $-\infty$  وعند  $+\infty$  :

■ لان  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1-2x)e^{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} - 2xe^{2x}) = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^{2x} = 0$

■ لان  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1-2x)e^{2x} = -\infty$   $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} (1-2x) = -\infty$

0.25 + 0.25

2) أحسب عبارة  $f'(x)$  من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$ .

■ حساب المشتقة :

■  $f'(x) = -2e^{2x} + (1-2x) \times 2e^{2x} = (-2 + 2 - 4x)e^{2x} = -4xe^{2x}$

■ من أجل كل عدد حقيقي  $x$   $f'(x) = -4xe^{2x}$

0.25

■ استنتاج اتجاه تغير الدالة  $f$  :

■ جدول اشارة المشتقة :

■ اشارة  $f'(x)$  من اشارة

$-x$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$-x$		$+$	$-$
$f'(x)$		$+$	$-$

0.25

■ الدالة  $f$  متزايدة على المجال  $]-\infty; 0]$  و متناقصة على المجال  $[0; +\infty[$ .

3) شكل جدول تغيرات الدالة  $f$ .

■ جدول تغيرات الدالة  $f$  :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$-$
$f(x)$	$0$	$1$	$-\infty$

0.5

4) حل المعادلة  $f(x) = 0$  ثم استنتج نقاط تقاطع  $(C_f)$  مع محور الفواصل.

■ حل المعادلة  $f(x) = 0$  :

■  $f(x) = 0$  يكافئ  $(1-2x)e^{2x} = 0$

يكافئ  $1-2x = 0$  لان  $e^{2x} \neq 0$

يكافئ  $x = \frac{1}{2}$

0.25

■ استنتاج نقاط تقاطع  $(C_f)$  مع محور الفواصل:

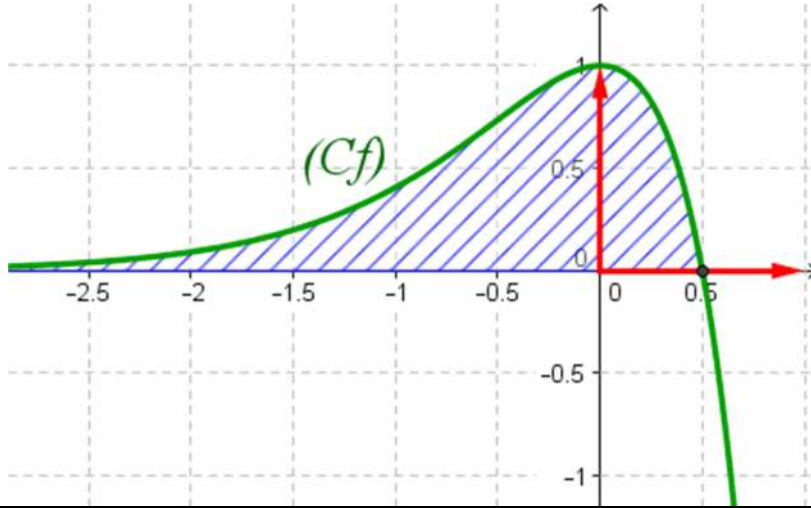
$(C_f) \cap (x'x) = \left\{ \left( \frac{1}{2}; 0 \right) \right\}$

5) أحسب  $f(1)$  ثم أرسم  $(C_f)$ .

■ حساب  $f(1)$  :

■  $f(1) = (1-2(1))e^{2 \times 1} = -e^2 = -7.39$

الرسم :



0.25 + 0.5

6) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي  $x$  التالية :  $(E): f(x) = f(m)$

مناقشة حلول المعادلة  $(E): f(x) = f(m)$  :

حلول المعادلة  $f(x) = f(m)$  بيانها هي فواصل نقاط تقاطع المنحني  $(C_f)$  مع المستقيم ذي المعادلة  $y = f(m)$  الموازي لحامل محور الفواصل  $(x'x)$ .  
تغير قيم  $f(m)$  حسب قيم  $m$

$m$	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(m)$	0	1	0	$-\infty$

01

المناقشة :

- إذا كان  $f(m) \in ]-\infty; 0[$  أي  $m \in ]\frac{1}{2}; +\infty[$  المعادلة تقبل حلا موجبا تماما.
- إذا كان  $f(m) = 0$  أي  $m = \frac{1}{2}$  المعادلة تقبل حلا موجبا  $x = \frac{1}{2}$ .
- إذا كان  $f(m) \in ]0; 1[$  أي  $m \in ]-\infty; 0[ \cup ]0; \frac{1}{2}[$  المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة.
- إذا كان  $f(m) = 1$  أي  $m = 0$  المعادلة تقبل حلا معدوما مضاعفا.

7) أ) عين العددين الحقيقيين  $b, a$  بحيث تكون الدالة  $F$  المعرفة بـ :  $F(x) = (ax + b)e^{2x}$  دالة أصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

تعيين العددين الحقيقيين  $b, a$  :

$F$  - دالة أصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  يعني  $F'(x) = f(x)$  أي  $ae^{2x} + (ax + b) \times 2e^{2x} = (1 - 2x)e^{2x}$  ومنه  $(2ax + a + 2b)e^{2x} = (1 - 2x)e^{2x}$  وبالمطابقة نجد  $\begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$  ومنه  $\begin{cases} 2a = -2 \\ a + 2b = 1 \end{cases}$  أي  $F(x) = (-x + 1)e^{2x}$

0.5

	<p>(ب) أحسب بـ <math>cm^2</math> وبدلالة <math>\lambda</math> المساحة <math>S(\lambda)</math> للحيز المستوي المحدد بالمنحني <math>(C_f)</math> و المستقيمت التي معادلاتها : <math>x = \frac{1}{2}, y = 0</math> و <math>x = \lambda</math> حيث <math>\lambda &lt; \frac{1}{2}</math> ثم أحسب <math>\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} S(\lambda)</math>.</p>
0.5	<p>■ حساب <math>S(\lambda)</math> :</p> <p><math>f</math> دالة مستمرة وموجبة على المجال <math>]-\infty; \frac{1}{2}]</math> وبالتالي :</p> $S(\lambda) = \int_{\lambda}^{\frac{1}{2}} f(x) dx = [F(x)]_{\lambda}^{\frac{1}{2}} = [(-x+1)e^{2x}]_{\lambda}^{\frac{1}{2}} = \left(-\frac{1}{2}+1\right)e - (-\lambda+1)e^{2\lambda}$ $S(\lambda) = \left(\frac{1}{2}e + \lambda e^{2\lambda} - e^{2\lambda}\right) \times us = \left(\frac{1}{2}e + \lambda e^{2\lambda} - e^{2\lambda}\right) \times 4cm^2$ <p>أي <math>S(\lambda) = (2e + 4\lambda e^{2\lambda} - 4e^{2\lambda})cm^2</math> ومنه</p>
0.25	<p>■ حساب <math>\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} S(\lambda)</math> :</p> <p>لأن <math>\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} S(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} (2e + 4\lambda e^{2\lambda} - 4e^{2\lambda}) = (2e)cm^2</math></p> <p><math>\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} 4\lambda e^{2\lambda} = 0</math> , <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2\lambda} = 0</math></p>
	<p>II. نسمي <math>f^{(1)} = f'</math>, <math>f^{(2)} = f''</math>, <math>f^{(3)} = f'''</math>, ..., <math>f^{(n)}</math> المشتقات المتتالية للدالة <math>f</math>.</p> <p>(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم <math>n</math> ، <math>f^{(n)}(x) = 2^n(1-n-2x)e^{2x}</math>.</p>
0.75	<p>■ البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم <math>n</math> ، <math>f^{(n)}(x) = 2^n(1-n-2x)e^{2x}</math>.</p> <p>- نسمي <math>P(n)</math> هذه الخاصية .</p> <p>(1) من أجل <math>n=1</math> لدينا :</p> $f^{(1)}(x) = 2^1(1-1-2x)e^{2x} = -4xe^{2x} = f'(x)$ <p>ومنه <math>P(1)</math> صحيحة .</p> <p>(2) نفرض صحة <math>P(n)</math> أي نفرض أن <math>f^{(n)}(x) = 2^n(1-n-2x)e^{2x}</math> ونبرهن على صحة <math>P(n+1)</math> أي نبرهن أن</p> $f^{(n+1)}(x) = 2^{n+1}(1-(n+1)-2x)e^{2x} = 2^{n+1}(-n-2x)e^{2x}$ <p>- لدينا : <math>f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))' = 2^n \times [-2e^{2x} + (1-n-2x) \times 2e^{2x}]</math></p> <p>ومنه <math>f^{(n+1)}(x) = 2^n(-2+2-2n-4x)e^{2x} = 2^n \times 2(-n-2x)e^{2x}</math></p> <p>أي : <math>f^{(n+1)}(x) = 2^{n+1}(-n-2x)e^{2x}</math></p> <p>ومنه <math>P(n+1)</math> صحيحة.</p> <p>(3) حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن <math>P(n)</math> صحيحة من أجل كل عدد طبيعي <math>n</math> غير معدوم.</p>
	<p>(2) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم <math>n</math> المنحني <math>(C_{f^{(n)}})</math> الممثل للدالة <math>f^{(n)}</math> حيث <math>f^{(n)}</math> الدالة المشتقة من الرتبة <math>n</math> للدالة <math>f</math> يقبل مماسا يوازي حامل محور الفواصل في النقطة <math>M_n(x_n; y_n)</math>.</p> <p>(أ) أحسب بدلالة <math>n</math> كلا من <math>x_n</math> و <math>y_n</math>.</p>

0.25 + 0.25	<p>▪ حساب <math>x_n</math> و <math>y_n</math> بدلالة <math>n</math> :</p> <p>- يقبل مماسا يوازي <math>(x'x)</math> يعني <math>f^{(n+1)}(x) = 0</math> أي <math>2^{n+1}(-n-2x)e^{2x} = 0</math> ومنه <math>-n-2x=0</math> وبالتالي <math>x = -\frac{1}{2}n</math> أي <math>x_n = -\frac{1}{2}n</math> من أجل <math>x = -\frac{1}{2}n</math> لدينا :</p> <p><math>y_n = f^{(n)}\left(-\frac{1}{2}n\right) = 2^n \left(1 - n - 2\left(-\frac{1}{2}n\right)\right) e^{2\left(-\frac{1}{2}n\right)} = 2^n e^{-n} = (2e^{-1})^n</math> أي <math>y_n = (2e^{-1})^n</math></p>
	<p>(ب) بين أن المتتالية <math>(x_n)</math> حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول . أحسب <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n</math> .</p>
0.5	<p>▪ تبين أن <math>(x_n)</math> متتالية حسابية :</p> <p>- لدينا : <math>x_{n+1} - x_n = -\frac{1}{2}(n+1) - \left(-\frac{1}{2}n\right) = -\frac{1}{2}n - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}n = -\frac{1}{2}</math> ومنه <math>(x_n)</math> متتالية حسابية أساسها <math>r = -\frac{1}{2}</math> و حدها الأول <math>x_0 = 0</math> .</p> <p>- حساب <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n</math> :</p> <p><math>\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}n\right) = -\infty</math></p>
	<p>(ج) بين أن المتتالية <math>(y_n)</math> هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول . أحسب <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n</math> .</p>
0.5	<p>▪ تبين أن المتتالية <math>(y_n)</math> هندسية :</p> <p>- لدينا : <math>y_n = (2e^{-1})^n</math> ومنه <math>y_{n+1} = (2e^{-1})^{n+1} = 2e^{-1} \times (2e^{-1})^n = 2e^{-1} \times y_n</math> ومنه <math>(y_n)</math> هندسية أساسها <math>q = 2e^{-1}</math> و حدها الأول <math>y_0 = 1</math> .</p> <p>- حساب <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n</math> :</p> <p>لان <math>-1 &lt; 2e^{-1} &lt; 1</math> <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2e^{-1})^n = 0</math></p>

✿ انتهى تصحيح الموضوع الثاني ✿ بالتوفيق 😊 والنجاح 😊 في البكالوريا 2015 ✿

