الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات — امتحان بكالوريا التعليم الثانوي التجريبي

الشعبة: رياضيات — دورة: 2024

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 04 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

إعداد الأستاذ عبد الحميد بوقطوف

التمرين الأول: (04,5 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n=\alpha 2^n+\beta(-3)^n$ حيث α و β عددان صحيحان.

1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+2}+u_{n+1}-6u_n=0$

2) أ- باستعمال خوارزمية إقليدس، أوجد ثنائية $(\alpha;\beta)$ حل للمعادلة $8\alpha-27\beta=-11$

ب- أوجد العدد الصحيح k حتى تكون الثنائية $(110+27k\,;\,33+8k)$ حلا للمعادلة $4\alpha+9\beta=17$

جـ- استنتج قيمتي α و β بحيث يكون $u_2=17$ و $u_3=-11$

3) أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n\equiv 3.2^n\,[5]$

ب- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد u_n على 5

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n، $w_n=2^{n+1}+(-3)^n$ و $S_n=w_0+w_1+\ldots+w_n$

أ- برهن أن: $S_n\equiv 2-4\times 2^n\,[5]$

ب- استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد S_{2024} على 5

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي وعاء على 12 بطاقة منها 4 بطاقات تحمل العدد 1 وبطاقتان تحملان العدد e و 6 بطاقات تحمل العدد $\frac{1}{e}$

كل البطاقات متماثلة ولا نفرق بينها باللمس.

نسحب على التوالي بطاقتين من الوعاء مع إرجاع البطاقة المسحوبة إلى الوعاء في كل مرة.

ليكن x الرقم المسجل على البطاقة المسحوبة أولا و y الرقم المسجل على البطاقة المسحوبة ثانيا.

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقطة M ذات اللاحقة z حيث: $z=\ln x+i\ln y$ ونعتبر الأحداث التالية:

A : " M نقطة من حامل محور الفواصل"

B : "قيس الزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OM};\vec{u})$ هو $-\frac{\pi}{4}$"

C : " M نقطة من الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1"

1) أحسب $p(A)$ و $p(B)$

2) بين أن $p(C)=\frac{4}{9}$

3) علما أن النقطة M من حامل محور الفواصل، ما احتمال أن تكون من الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1؟

4) X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لكريتين المسافة OM

أ- برر أن قيم المتغير العشوائي X هي: 0، 1 و $\sqrt{2}$

ب- عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضياتي $E(X)$

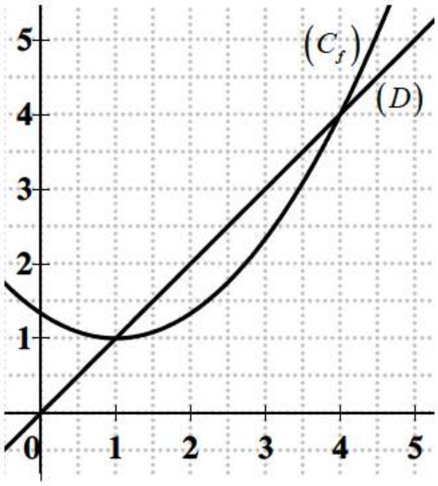
التمرين الثالث: (04,5 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=1+\frac{1}{3}(x-1)^2$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$ و (D) المستقيم ذو المعادلة $y=x$

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $u_0=3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$

1) أ- أعد رسم الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 مبرزا خطوط الإنشاء.



ب- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $1\le u_n\le 4$

ب- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}(u_n-1)(u_n-4)$

استنتج أن المتتالية (u_n) متناقصة.

جـ- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\ln\left(\frac{u_n-1}{3}\right)$

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 يطلب تعيين حدها الأول.

ب- عبر عن v_n بدلالة n

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $w_n=\left(\frac{(u_0-1)(u_1-1)(u_2-1)...(u_{n-1}-1)}{3^n}\right)$

أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $\frac{1}{2^n}\ln(w_n)=\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\ln\left(\frac{2}{3}\right)$

ب- استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\ln(w_n)$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ: $g(x)=\dfrac{x}{x-1}-\ln|x-1|$

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

ب- أحسب $\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} 1} g(x)$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} 1} g(x)$ (يمكن وضع: $t=x-1$)

2) أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

3) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $4<\alpha<5$

4) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}-\{1\}$

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ:
$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln|x-1|}{x} & ; x>0 \\ f(x)=\dfrac{-6e^{x}}{e^{2x}+3e^{x}+2} & ; x\le 0 \end{cases}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$ (وحدة الطول $2cm$)

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجتين بيانيا.

ب- أحسب $\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} 1} f(x)$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} 1} f(x)$ ثم فسر النتيجتين بيانيا.

2) أ- بين أن: $\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x}=-\dfrac{1}{6}$

ب- أحسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ (إرشاد: $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} \dfrac{\ln(1-x)+x}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$)

جـ- فسر النتيجتين بيانيا.

3) بين أن: $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha-1}$

4) أ- أحسب $f'(x)$

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

5) أحسب $f(-1)$ ، $f(0)$ ، $f(2)$ و $f(5)$ ثم أنشئ (C_f) (نأخذ $\alpha\simeq 4{,}5$)

6) أ- أوجد العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل $x\neq-2$ و $x\neq-1$ ، $\dfrac{-6x}{x^2+3x+2}=\dfrac{a}{x+2}+\dfrac{b}{x+1}$

ب- استنتج أن: $\dfrac{-6e^{x}}{e^{2x}+3e^{x}+2}=\dfrac{-12e^{-x}}{1+2e^{-x}}+\dfrac{6e^{-x}}{1+e^{-x}}$

جـ- أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين $x=-\ln 2$ و $x=0$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

x عدد طبيعي أكبر أو يساوي 5

M و N عددان طبيعيان يكتبان على الترتيب $\overline{100x}$ و $\overline{x001}$ في نظام التعداد الذي أساسه $x+1$

1) أكتب كلا من M و N في النظام الذي أساسه x

2) أ– أكتب $M+N$ في النظام الذي أساسه $x+1$

ب– استنتج أن $M+N=k(x+1)$ حيث k عدد طبيعي يطلب تعيينه بدلالة x

جـ– أكتب k في النظام الذي أساسه x

3) برهن أنه يوجد عددين طبيعيين غير معدومين a و b يحققان: $\overline{ab}^{x}\times\overline{aaa}^{x}=k$

4) أوجد جميع الثنائيات $(\alpha;\beta)$ من الأعداد الطبيعية غير المعدومة التي تحقق: $d+m=\beta+9$

حيث: $d=PGCD(\alpha;\beta)$ و $m=PPCM(\alpha;\beta)$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(I_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $I_0=\int_0^1 e^{-x}dx$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $I_n=\int_0^1 x^n e^{-x}dx$

1) أ– تحقق أن: $I_0=1-\frac{1}{e}$

ب– باستعمال المكاملة بالتجزئة، برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $I_{n+1}=(n+1)I_n-e^{-1}$

2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $\frac{1}{(n+1)e}\leq I_n\leq\frac{1}{n+1}$ ثم استنتج نهاية المتتالية (I_n)

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=\frac{1}{n!}I_n$

أ– برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n=-\frac{e^{-1}}{(n+1)!}$

ب– استنتج أن: $e(1-u_n)=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) عين العددين المركبين α و β حيث: $\begin{cases}2\alpha-\beta=-3\\2\overline{\alpha}+\overline{\beta}=-3-2i\sqrt{3}\end{cases}$ مع $\overline{\alpha}$ مرافق α و $\overline{\beta}$ مرافق β

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$

A، B و C النقط التي لواحقها $z_A=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_A=z_C e^{i\frac{\pi}{3}}$ على الترتيب.

أ– أكتب z_A و z_C على الشكل الأسي.

ب– عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا سالبا.

جـ– تحقق أن العدد المركب $2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2024}+\left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962}-\left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1445}$ تخيلي صرف.

3) D النقطة ذات اللاحقة $1+i$

أ– حدد نسبة وزاوية التشابه المباشر S الذي مركزه O ويحول D إلى A

ب– أكتب $\frac{z_A}{z_D}$ على الشكل الجبري ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

4) عين (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق: $z=k(1+i)e^{i\frac{7\pi}{12}}$ حيث k يمسح $\mathbb{R}^+$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) n عدد طبيعي غير معدوم.

f_n الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f_n(x)=x^n e^{1-x}$

(C_n) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$ (وحدة الطول $2cm$)

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$

2) بين أن جميع المنحنيات (C_n) تمرّ من نقطتين ثابتتين يطلب تعيين إحداثيتيهما.

3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f_n'(x)=(n-x)f_{n-1}(x)$

4) أ– أدرس حسب شفعية n اتجاه تغير الدالة f_n ثم شكل جدول تغيراتها.

ب– أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1})

جـ– أنشئ في نفس المعلم المنحنيات (C_1)، (C_2) و (C_3)

II) (I_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $I_0=\int_0^1 e^{1-x}\,dx$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $I_n=\int_0^1 f_n(x)dx$

1) أحسب I_0 و I_1

2) أ– بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $I_{n+1}=-1+(n+1)I_n$

ب– استنتج I_2

III) 1) A_n مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_n) و (C_{n+1}) والمستقيمين $x=0$ و $x=1$

عبر عن A_n بدلالة n و I_n

2) α عدد حقيقي أكبر تماما من 1

$S(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_1) و (C_2) والمستقيمين $x=0$ و $x=\alpha$

أ– برهن أن $S(\alpha)=24-4e-4(\alpha^2+\alpha+1)e^{1-\alpha}$

ب– بين أن $[2A_1=S(\alpha)]$ تكافئ $[e^\alpha=\alpha^2+\alpha+1]$ ثم استنتج وجود وحدانية للعدد α

انتهى الموضوع الثاني