الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية الشلف

ثانوية: العقيد لطفي -بوقادير-

امتحان بكالوريا التجريبي للتعليم الثانوي — دورة ماي 2019

الشعبة : علوم تجريبية

اختبار في مادة الرياضيات — المدة: 03 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

يحتوي كيس U_1 على سبع كريات منها ثلاث كريات تحمل الرقم 2 و أربع كريات تحمل الرقم 3 ويحتوي كيس U_2 على سبع كريات منها أربع كريات بيضاء و ثلاث كريات حمراء (نعتبر كل الكريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس)

1) نسحب من الكيس U_2 كرتين بالتتابع دون ارجاع الكرة المسحوبة

أ) احسب احتمال الحوادث الآتية :

A " الحصول على كرتين من نفس اللون "

B " الحصول على كرة حمراء واحدة على الأقل "

2) نسحب كرة واحدة من الكيس U_1 : اذا كانت الكرة المسحوبة تحمل الرقم 2 نسحب كرتين من الكيس U_2 بالتتابع دون ارجاع و اذا كانت الكرة المسحوبة تحمل الرقم 3 نسحب ثلاث كرات من الكيس U_2 في آن واحد

نعتبر المتغير العشوائي X المرتبط بعدد الكرات الحمراء المسحوبة

أ) عين قيم المتغير العشوائي X

ب) بين أن $E(X=1)=\frac{132}{245}$ و $E(X=2)=\frac{63}{245}$

ت) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X و أمله الرياضياتي $E(X)$

التمرين الثاني : (05 نقاط)

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z ، $(z-4)(z^2-4z+8)=0$.

2) في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B ، C و D التي لواحقها على الترتيب $z_A=2-2i$ ، $z_B=2+2i$ ، $z_C=4$ و $z_D=-z_A$

أ) أكتب z_A و z_B على شكل أسي

ب) أكتب $\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B}$ على شكل أسي ، استنتج طبيعة المثلث ABC

ج) تحقق أن $z_D=z_A+2(z_B-z_C)$ ، ماذا تستنتج ؟

د) بين أن (DA) يوازي (CB)

3) نعتبر التحويل النقطي S الذي مركزه A و يحول B إلى C

أ) عيّن طبيعة التحويل S و حدد عناصره المميزة .

4) نعتبر (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $Arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)=\frac{\pi}{2}$

أ) تحقق أن النقطة C تنتمي إلى (Γ)

ب) عين طبيعة المجموعة (Γ) محددا عناصرها المميزة

ج) عيّن طبيعة المجموعة (Γ') صورة (Γ) بالتحويل S ، محددا عناصرها المميزة

التمرين الثالث : (04 نقاط)

1. نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{4x+6}{x+3}$.

أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0,+\infty[$.

2. نعرف المتتالية (u_n) كما يلي : $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n<3$.

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة .

3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=\dfrac{u_n-3}{u_n+2}$.

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n .

ت) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

4. أحسب S_n بدلالة n حيث : $S_n=\dfrac{5}{u_0+2}+\dfrac{5}{u_1+2}+\dfrac{5}{u_2+2}+\dots+\dfrac{5}{u_n+2}$

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=1+4xe^{2x}$

1- ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .

2- بين أن $g(x)>0$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x+1+(2x-1)e^{2x}$

ليكن (C_f) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=1cm$

1. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

2. أ) تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=g(x)$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

3. أ) بين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y=x+1$ هو مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $-\infty$.

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (D).

ج) بين المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) موازي للمستقيم (D) يطلب تعيين معادلة له .

4. بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف I طلب تعيين احداثياتها

5. أنشئ المماس (T) و (D) و المنحنى (C_f) على المجال $]-\infty;1]$

6. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $(2x-1)e^{2x}=m-1$.

7. أ) باستعمال مكاملة بالتجزئة بين أن $\int_0^1(2x-1)e^{2x}dx=1$

ب) احسب مساحة الحيز المحصور بين المنحنى (C_f) و المماس (T) و المستقيمين $x=0$ و $x=1$

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. نعتبر النقط $A(1,2,-1)$, $B(-3,-2,3)$, $C(0,-2,-3)$

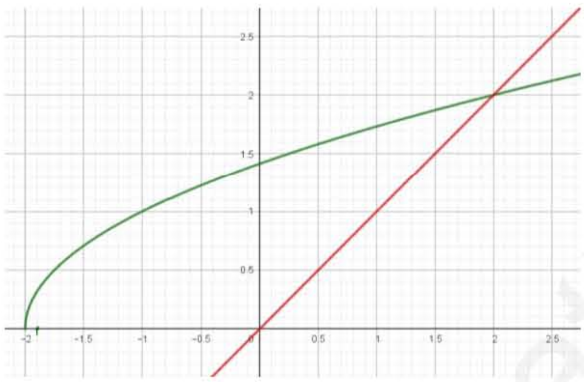
و ليكن (P) المستوي ذو المعادلة الديكارتية : $x+y-z+2=0$

1. أثبت أن النقط A , B , C تعين مستو يطلب تعيين معادلة له .
2. أثبت أن المستويين (ABC) و (P) متعامدين .
3. عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) مستقيم تقاطع (ABC) و (P)
4. عين احدثيات H المسقط العمودي للنقطة C على المستوي (P)
5. احسب المسافة بين النقطة C و المستقيم (Δ)
6. لتكن G مرجح الجملة المثقلة التالية : $\{(A,1);(B,-1);(C,2)\}$.

أ) عين احداثيات النقطة G .

7. عين طبيعة و العناصر المميزة للمجموعة (S) للنقط M من الفضاء حيث : $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=4$

التمرين الثاني : (04 نقاط)



1) الشكل المقابل هو التمثيل البياني (C) للدالة f المعرفة على المجال $]-2,+\infty[$ بـ : $f(x)=\sqrt{x+2}$.

و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

أ) أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-2,+\infty[$.

ب) انقل التمثيل البياني (C) والمستقيم (Δ) على ورقة الإجابة ثم مثل الحدود u_0 , u_1 و u_2 على محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل .

ج) ضع تخمينا حول اتجاه تغير وتقارب المتتالية (u_n) .

2) نعرف المتتالية (u_n) كما يلي : $u_0=\frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n , $u_{n+1}=f(u_n)$.

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<2$.

ج) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=\dfrac{-u_n^2+u_n+2}{\sqrt{u_n+2}+u_n}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

د) استنتج أن (u_n) متقاربة .

3) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<2-u_{n+1}<\frac{1}{2}(2-u_n)$.

ب) استنتج انه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<2-u_n<3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

ج) استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين الثالث : (05 نقاط)

) أ) عين الجذرين التربيعيين للعدد المركب z حيث $z=-3+12i\sqrt{3}$.

2) في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B ، C ، D و E

التي لواحقها على الترتيب $z_A=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، $z_B=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، $z_C=3+2i\sqrt{3}$ ، $z_D=-3-2i\sqrt{3}$ و $z_E=\overline{z_D}$

أ) بيّن أن النقط B ، C و E تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها A يطلب تعيين نصف قطرها .

ب) بين أن $\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث BEC .

ت) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}\right)^n$ حقيقي سالب

3) بيّن أنه يوجد دوران r مركزه B ويحول النقطة E إلى C ، يطلب تعيين زواياته .

4) اكتب العبارة المركبة للدوران r

5) نعتبر (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق : $\left|\overline{z}+3+2i\sqrt{3}\right|=\left|z_B\right|$.

أ) عين طبيعة المجموعة (Γ) محددا عناصرها المميزة

ب) عيّن طبيعة المجموعة (Γ') **صورة** (Γ) بالدوران r محددا عناصرها المميزة

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I)لتكن الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=x+1-2\ln x$

1. احسب نهايتي الدالة g
2. ادرس اتجاه تغيرات الدالة g على $]0;+\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها
3. استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x+\ln x-(\ln x)^2$.

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$.

1. أ) احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ ثمّ فسّر النتيجة هندسيا .

ب) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2. بين انه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$ حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f .
3. ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
4. ادرس إشارة العبارة $\ln x-(\ln x)^2$ على المجال $]0;+\infty[$
5. استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ) المعرف بالمعادلة $y=x$
6. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $0,6<\alpha<0,7$
7. أنشئ المستقيم (Δ) المنحنى (C_f)

III) نضع $I=\int_1^e \ln(x)\,dx$ و $J=\int_1^e (\ln(x))^2\,dx$

أ) بين باستعمال التكامل بالتجزئة أن : $J=e-2I$

ب) تحقق أن الدالة $x\mapsto x\ln x-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto \ln x$ على المجال $]0;+\infty[$

ب) استنتج مساحة الحيز المحصور بين المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=1$ و $x=e$

نتمنى لكم النجاح في امتحان البكالوريا 2019

تصحيح بكالوريا تجريبي دورة ماي 2019
شعبة علوم تجريبية.

الموضوع الأول:

التمرين الأول:

U_1 به 7 كرات { ثلاثة تحمل الرقم 2
أربعة تحمل الرقم 3

U_2 به 7 كرات { أربعة بيضاء
ثلاثة حمراء.

سحب كرتين من U_2 بالتتابع دون إرجاع

A "الحصول على كرتين من نفس اللون"

$$P(A) = \frac{A_4^2 + A_3^2}{A_7^2} = \frac{3}{7}$$

$P(A) = \frac{3}{7}$

B "الحصول على كرة حمراء واحدة على الأقل"

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{A_4^2}{A_7^2} = \frac{5}{7}$$

$P(B) = \frac{5}{7}$

حيث $\bar{B}$ عدم الحصول على أي كرة حمراء

② قيم المتغير العشوائي X:

سحب رقم 2 من U_1 وسحب كرتين بيضاوتين من U_2 قيمة X هي $x_i = 0$

- سحب رقم 3 من U_1 وسحب ثلاث كرات بيضاء من U_2 قيمة X هي $x = 0$
- سحب رقم 2 من U_1 وسحب كرة حمراء وكرة بيضاء من U_2 قيمة X هي $x = 1$
- سحب رقم 3 من U_1 وسحب كرة حمراء وكرتين بيضاوتين من U_2 قيمة X هي $x = 1$
- سحب رقم 2 من U_1 وسحب كرتين حمراوتين من U_2 قيمة X هي $x = 2$
- سحب رقم 3 من U_1 وسحب كرتين حمراوتين وكرة بيضاء من U_2 قيمة X هي $x = 2$
- سحب رقم 3 من U_1 وسحب ثلاث كرات حمراء من U_2 قيمة X هي $x = 3$

ومنه قيم المتغير العشوائي هي x_i:

$$x_i \in \{0, 1, 2, 3\}$$

نبين أن $P(X=1) = \frac{132}{245}$ و $P(X=2) = \frac{63}{245}$

$$P(X=1) = \frac{3}{7} \times \frac{2(A_3^1 \times A_4^1)}{A_7^2} + \frac{4}{7} \times \frac{C_3^1 \times C_4^2}{C_7^3}$$

$$= \frac{3}{7} \times \frac{24}{42} + \frac{4}{7} \times \frac{18}{35}$$

$$\boxed{P(X=1) = \frac{132}{245}}$$

$$P(X=2) = \frac{3}{7} \times \frac{A_3^2}{A_7^2} + \frac{4}{7} \times \frac{C_3^2 \times C_4^1}{C_7^3}$$

$$= \frac{3}{7} \times \frac{6}{42} + \frac{4}{7} \times \frac{3 \times 4}{35}$$

$$= \frac{3}{42} + \frac{48}{245}$$

$$\boxed{P(X=2) = \frac{63}{245}}$$

$$P(X=3) = \frac{4}{7} \times \frac{C_3^3}{C_7^3}$$

$$= \frac{4}{7} \times \frac{1}{35}$$

$$\boxed{P(X=3) = \frac{4}{245}}$$

$$P(X=0) = \frac{3}{7} \times \frac{A_4^2}{A_7^2} + \frac{4}{7} \times \frac{C_4^3}{C_7^3}$$

$$= \frac{3}{7} \times \frac{12}{42} + \frac{4}{7} \times \frac{4}{35}$$

$$= \frac{6}{49} + \frac{16}{245}$$

$$\boxed{P(X=0) = \frac{46}{245}}$$

قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X :

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{46}{245}$	$\frac{132}{245}$	$\frac{63}{245}$	$\frac{4}{245}$

الأمل الرياضياتي

$$E(X)=0\left(\frac{46}{245}\right)+1\left(\frac{132}{245}\right)+2\left(\frac{63}{245}\right)+3\left(\frac{4}{245}\right)$$

$$=\frac{270}{245}$$

$$\boxed{E(X)=\frac{54}{49}}$$

التمرين الثاني :

حل المعادلة

تكافئ $(z-4)(z^2-4z+8)=0$

$(z-4=0)$ أو $(z^2-4z+8=0)$

$z-4=0$ معناه $\boxed{z=4}$

حل المعادلة $z^2-4z+8=0$

حساب المميز Δ : $\Delta=(-4)^2-4(1)(8)$

$=16-32$

$\Delta=-16$

$\Delta<0$ ومنه المعادلة حلان في $\mathbb{C}$ هما

$$z_1=\frac{4-4i}{2}=2-2i$$

$$z_2=\frac{4+4i}{2}=2+2i$$

حلول المعادلة هي

$S=\{4\ ;\ 2+2i\ ;\ 2-2i\}$.

كتابة z_A و z_B على شكل أسي

نعين طويلة وعمدة z_A

$|z_A|=|2-2i|=\sqrt{(2)^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

نضع $Arg(z_A)=\theta$ نجد

$$\begin{cases}\cos\theta=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta=\frac{-2}{2\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

ومنه $Arg(z_A)=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$

إذن الشكل الأسي لـ z_A هو

$$z_A=2\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

كتابة z_B على شكل أسي

$$z_B=\overline{z_A}=2\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$$

ب- كتابة $\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}$ على شكل أسي.

$$\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}=\frac{4-(2-2i)}{4-(2+2i)}$$

$$=\frac{4-2+2i}{4-2-2i}$$

$$=\frac{2+2i}{2-2i}$$

$$=\frac{(2+2i)(2+2i)}{2^2+2^2}$$

$$=\frac{4+4i+4i-4}{8}$$

$$=\frac{8i}{8}$$

$$\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}=i$$

لدينا $|i|=1$ و $Arg(i)=\frac{\pi}{2}$

ومنه

$$\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}=e^{i\frac{\pi}{2}}$$

طبيعة المثلث ABC

لدينا $\left|\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}\right|=\frac{|z_C-z_A|}{|z_C-z_B|}=\frac{AC}{BC}=1$

ومنه $\boxed{AC=BC}$

و $Arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}\right)=Arg(i)$

$$(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{2}$$

ومنه ABC قائم في C ومتساوي الساقين $\begin{cases}(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{2}\\ BC=AC\end{cases}$

ج) التحقق أن $z_D = z_A + 2(z_B - z_C)$

لدينا $z_A + 2(z_B - z_C) = 2-2i+2(2+2i-4)$

$$= 2-2i+2(-2+2i)$$
$$= 2-2i-4+4i$$
$$= -2+2i$$
$$= z_D$$

إذن $z_D = z_A + 2(z_B - z_C)$

$$z_D = z_A + 2z_B - 2z_C$$

ومنه z_D هي لاحقة النقطة D مرجح الجملة $\{(A,1);(B,2);(C,-2)\}$

- تبين أن $(CB)//(DA)$

لدينا $z_D = z_A + 2(z_B - z_C)$

أي $z_D - z_A = 2(z_B - z_C)$

ومنه $\vec{AD} = 2\vec{CB}$

إذن الشعاعان $\vec{AD}$ و $\vec{CB}$ مرتبطان خطيا وبما أن ABC مثلث فإن $(AD)//(CB)$

③ تعيين طبيعة S

$S(A)=A$ ، $S(B)=C$ معناه $\begin{cases} z_A = a z_A + b & ① \\ z_C = a z_B + b & ② \end{cases}$

بالطرح نجد $z_C - z_A = a(z_B - z_A)$

ومنه $a = \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

$$= \frac{4-(2-2i)}{2+2i-(2-2i)}$$
$$= \frac{4-2+2i}{2+2i-2+2i}$$
$$= \frac{2+2i}{4i}$$
$$= \frac{(2+2i)(-4i)}{16}$$

ومنه $a = \dfrac{-8i+8}{16}$

$$a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

لدينا $a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ و $|a| = \sqrt{\frac{1}{2}+\left(\frac{-1}{2}\right)}$

$$= \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 1$$

ومنه S تشابه مباشر مركزه A ونسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$ وزاويته $Arg\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right) = -\frac{\pi}{4}$

④ نعتبر (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث

$$Arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right) = \frac{\pi}{2}$$

أ. التحقق أن $C \in (\Gamma)$

لدينا من السؤال (ب):

$$\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

أي $Arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B}\right) = \frac{\pi}{2}$ ومنه $C \in (\Gamma)$

- تعيين طبيعة (Γ)

$$Arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B}\right) = \frac{\pi}{2}$$

ومنه $(\vec{BM}, \vec{AM}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

أي $(\vec{MB}, \vec{MA}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

إذن (Γ) هي نصف دائرة قطرها $[AB]$ ماعدا A و B والتي تشمل C.

ج) تعيين طبيعة (Γ')

(Γ') هي صورة (Γ) بواسطة S

بما أن $S(A)=A$ و $S(B)=C$ فإن (Γ') هي نصف دائرة قطرها $[AC]$ ماعدا A و C بحيث $(\vec{MC}, \vec{MA}) = \frac{\pi}{2}$

التمرين الثالث:

$f(x)=\frac{4x+6}{x+3}$

- دراسة اتجاه تغيرات f على $[0,+\infty[$

المشتقة: f قابلة للاشتقاق على $[0,+\infty[$

ولدينا $f'(x)=\frac{4(x+3)-(4x+6)}{(x+3)^2}$

$$f'(x)=\frac{6}{(x+3)^2}$$

ومنه $f'(x)>0$ ومنه f دالة متزايدة تماما على $[0,+\infty[$

② $U_{n+1}=f(U_n)$ ، $U_0=0$

- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل n طبيعي $0\le U_n<3$

أ) التحقق من صحة الخاصية من أجل $n=0$

لدينا $U_0=0$ و $0\le 0<3$ أي $0\le U_0<3$

إذن الخاصية محققة من أجل $n=0$

ب) نفرض صحة الخاصية من أجل n طبيعي

أي $0\le U_n<3$

ونبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$

أي نبرهن أن $0\le U_{n+1}<3$

- لدينا $0\le U_n<3$

و f دالة متزايدة على $[0,+\infty[$ ومنه

$$f(0)\le f(U_n)<f(3)$$

لدينا $f(0)=2\geq 0$ و $f(3)=3$

إذن $\boxed{0\le U_{n+1}<3}$

ومنه الخاصية محققة من أجل $n+1$

الخلاصة:

من أجل كل عدد طبيعي n: $0\le U_n<3$

ب) دراسة اتجاه تغير (U_n)

$$U_{n+1}-U_n=\frac{4U_n+6}{U_n+3}-U_n$$

$$=\frac{4U_n+6-U_n^2-3U}{U_n+3}$$

$$U_{n+1}-U_n=\frac{-U_n^2+U_n+6}{U_n+3}$$

دراسة إشارة $(-U_n^2+U_n+6)$ نضع $U_n=X$

حساب Δ: $\Delta=1^2-4(6)(-1)$

$\boxed{\Delta=25}$

ومنه $X_1=\frac{-1-5}{-2}=3$

$X_2=\frac{-1+5}{-2}=-2$

X	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$-X^2+X+6$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- بما أن $0\le U_n<3$ فإن $-U_n^2+U_n+6>0$

ومنه $U_{n+1}-U_n>0$ إذن (U_n) متتالية متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

- التقارب:

لدينا (U_n) متتالية متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى $U_n<3$ فهي متقاربة.

③ $V_n=\frac{U_n-3}{U_n+2}$

- نبين أن (V_n) هندسية:

$$V_{n+1}=\frac{U_{n+1}-3}{U_{n+1}+2}$$

$$=\frac{\frac{4U+6}{U_n+3}-3}{\frac{4U_n+6}{U_n+3}+2}$$

$$=\frac{\frac{4U_n+6-3U_n-9}{U_n+3}}{\frac{4U_n+6+2U_n+6}{U_n+3}}$$

$$=\frac{U_n-3}{6U_n+12}$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{U_n-3}{U_n+2}\right)$$

$$V_{n+1}=\frac{1}{6}V_n$$

ومنه (V_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{6}$ وحدها الأول $V_0=\frac{-3}{2}$

عبارة V_n بدلالة n:

$$V_n = -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

- استنتاج عبارة U_n بدلالة n.

لدينا $V_n = \frac{U_n-3}{U_n+2}$ ومنه $V_n(U_n+2)=(U_n-3)$

أي $V_nU_n+2V_n=U_n-3$

ومنه $V_nU_n-U_n=-2V_n-3$

أي $U_n(V_n-1)=-2V_n-3$

إذن $U_n=\frac{-2V_n-3}{V_n-1}$

$$U_n=\frac{3\left(\frac{1}{6}\right)^n-3}{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^n-1}$$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{3\left(\frac{1}{6}\right)^n-3}{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^n-1} = 3$$

لأن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n=0$

- حساب S_n:

$$S_n=\frac{5}{U_0+2}+\frac{5}{U_1+2}+\frac{5}{U_2+2}+\dots+\frac{5}{U_n+2}$$

لدينا $V_n=\frac{U_n-3}{U_n+2}$ أي $V_n=\frac{U_n+2-5}{U_n+2}$

$$=\frac{U_n+2}{U_n+2}-\frac{5}{U_n+2}$$

ومنه $V_n=1-\frac{5}{U_n+2}$

أي $V_n-1=-\frac{5}{U_n+2}$

إذن $\frac{5}{U_n+2}=1-V_n$

ومنه

$$S_n=1-V_0+1-V_1+1-V_2+\dots+1-V_n$$

$$=(1+1+1\dots+1)-(V_0+V_1+\dots+V_n)$$

$$=n+1-\left(V_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)\right)$$

ومنه

$$S_n=n+1-\left(-\frac{3}{2}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{6}}\right)\right)$$

$$=n+1+\frac{3}{2}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}}{\frac{5}{6}}\right)$$

$$\boxed{S_n=n+1+\frac{9}{5}\left(1-\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}\right)}$$

التمرين الرابع:

I) $g(x)=1+4xe^{2x}$

1. دراسة اتجاه تغيرات الدالة g:

- المشتقة:

g دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$g'(x)=4e^{2x}+2e^{2x}(4x)$$

$$=(4+8x)e^{2x}$$

$$g'(x)=4(2x+1)e^{2x}$$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $(2x+1)$ (لأن $e^{2x}>0$)

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$1-\frac{2}{e}$	$\nearrow$	

إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

بما أن القيمة الحدية الصغرى $g\left(-\frac{1}{2}\right)>0$

فإن $g(x)>0$ على $\mathbb{R}$.

II) $f(x)=x+1+(2x-1)e^{2x}$

1- حساب النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x+1+(2x-1)e^{2x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x+1+(2x-1)e^{2x}=-\infty$$

لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1)e^{2x}=0$

2- التحقق أن $f'(x) = g(x)$

f دالة قابلة للإشتقاق على $]-\infty,+\infty[$ ولدينا:

$$f'(x) = 1+2e^{2x} + 2e^{2x}(2x-1)$$
$$= 1+2e^{2x}+4xe^{2x}-2e^{2x}$$
$$f'(x) = 1+4xe^{2x}$$

ومنه $f'(x)=g(x)$

- استنتاج إشارة $f'(x)$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

بما أن $g(x)>0$ فإن $f'(x)>0$ ومنه دالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3) - تبين أن $(D): y=x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $(-\infty)$

لدينا $f(x)-(x+1) = (2x+1)e^{2x}$

و $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)] = \lim\limits_{x\to-\infty}(2x+1)e^{2x}$
$= \lim\limits_{x\to-\infty} 2xe^{2x}+e^{2x}$
$=0$

ومنه المستقيم (D) ذو المعادلة $y=x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $(-\infty)$.

- دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) مع (D) بدراسة إشارة الفرق

$f(x)-(x+1)$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$(2x+1)$	−	0	+
e^{2x}		+	
$(2x-1)e^{2x}$	−	0	+
الوضع النسبي	(C_f) يقع تحت (D)	(C_f) يقطع (D)	(C_f) فوق (D)

$(C_f)\cap(D) = \left\{A\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)\right\}$

ج) تبيين أن (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (D)

$(T)//(D)$ معناه $f'(x_0)=1$

$f'(x)=1$ معناه $g(x)=1$

أي $1+4xe^{2x}=1$

أي $4xe^{2x}=0$

أي $\boxed{x=0}$

كتابة معادلة المماس عند النقطة $x=0$

$(T): y=f'(0)(x-0)+f(0)$

$(T): y=x$

4- تبين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف

لدينا $f''(x)=g'(x)$

و ~~$g'(x)$~~

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	−	0	+

f'' تنعدم عند $x=-\frac{1}{2}$ وتغير إشارتها.

ومنه النقطة $I\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-2e^{-1}\right)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f).

7. بيّن أن $\int_0^1 (2x-1)e^{2x}dx = 1$

نضع: $\begin{cases} u(x)=2x-1 \\ v'(x)=e^{2x} \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} u'(x)=2 \\ v(x)=\frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

$$\int_0^1 (2x-1)e^{2x}dx = \left[\frac{1}{2}(2x-1)e^{2x}\right]_0^1 - \int_0^1 2\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}(2x-1)e^{2x}\right]_0^1 - \int_0^1 e^{2x}dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}(2x-1)e^{2x}\right]_0^1 - \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{2}(2-1)e^{2}\right) - \left(\frac{1}{2}(-1)e^{0}\right) - \left(\frac{1}{2}e^{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 (2x-1)e^{2x}dx = 1$$

7. حساب مساحة الحيز المحصور بين (C_f) والمماس (T) والمستقيمين $x=0$, $x=1$

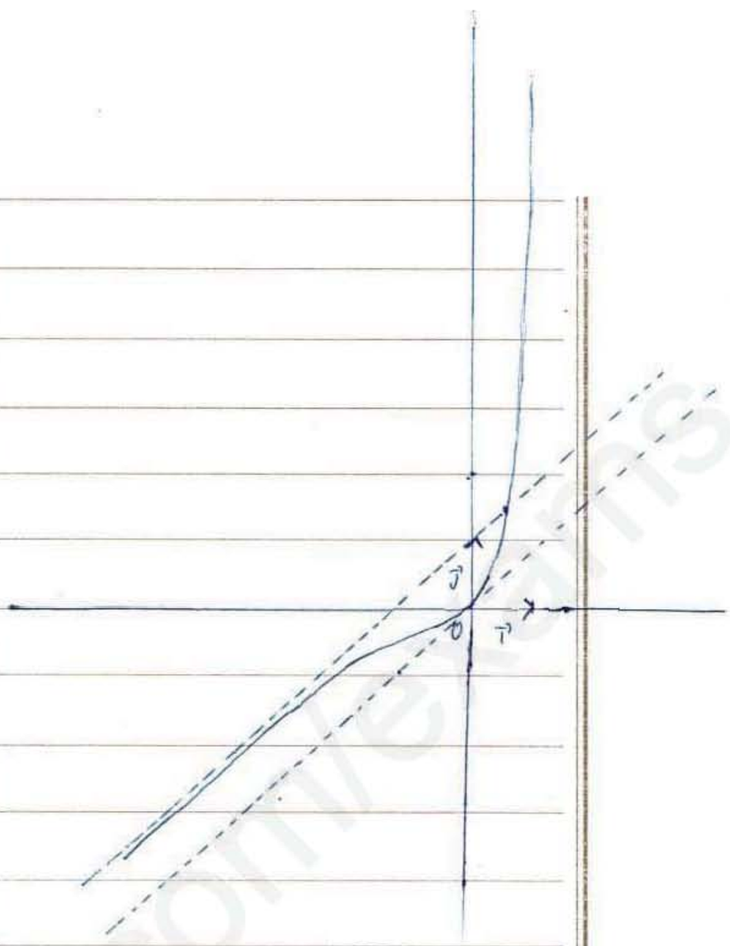
$$A = \int_0^1 f(x) - x\,dx = \int_0^1 (2x-1)e^{2x} + 1\,dx$$

$$= \int_0^1 (2x-1)e^{2x}dx + \int_0^1 1\,dx$$

$$= 1 + [x]_0^1$$

$$= 1 + 1$$

$$\boxed{A = 2\,cm^2}$$



. المناقشة البيانية،

$(2x-1)e^{2x} = m-1$

ومنه $(2x-1)e^{2x} + 1 = m$

إذن $(2x-1)e^{2x} + 1 + x = x + m$

ومنه $f(x) = x + m \ldots(*)$

حلول المعادلة $(*)$ هي فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيمات (Δ_m) الموازية لـ (D) و (T) ، $(\Delta_m): y = m + 1$

من أجل $m \in]-\infty, 0[$ المعادلة $(*)$ لا تقبل حلول

من أجل $m = 0$ المعادلة $(*)$ تقبل حل وحيد

من أجل $m \in]0, 1[$ المعادلة $(*)$ تقبل حلين متمايزين

من أجل $m \in [1, +\infty[$ المعادلة $(*)$ تقبل حل وحيد

الموضوع الثاني :

التمرين الأول :

إثبات أن النقط تعين مستو

لدينا $\vec{AB}\begin{pmatrix}-4\\-4\\4\end{pmatrix}$ ، $\vec{AC}\begin{pmatrix}-1\\-4\\-2\end{pmatrix}$

$$\frac{-4}{-1} \neq \frac{-4}{-4}$$

ومنه لا يوجد عدد حقيقي k بحيث $\vec{AB}=k\vec{AC}$

إذن الشعاعان $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مرتبطين خطيا ومنه النقط A ، B ، C ليست على استقامة فهي تعين مستو.

- تعيين معادلة ديكارتية لـ (ABC)

نضع $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي لـ (ABC)

معناه $\begin{cases}\vec{n}\cdot\vec{AB}=0\\ \vec{n}\cdot\vec{AC}=0\end{cases}$

أي $\begin{cases}-4a-4b+4c=0 \ \dots (1)\\ -a-4b-2c=0 \ \dots (2)\end{cases}$

بطرح (2) من (1) نجد

$-3a+6c=0$

أي $-3a=-6c$

ومنه $\boxed{a=2c}$

بوضع $\boxed{c=1}$ نجد $\boxed{a=2}$

بالتعويض في (2) نجد

$-2-4b-2=0$

أي $-4-4b=0$ ومنه $\boxed{b=-1}$

ومنه $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي لـ (ABC)

ومنه معادلة الديكارتية لـ (ABC) من الشكل

$2x-y+z+d=0$

تعين قيمة d :

لدينا $C(0,-2,-3)\in(ABC)$

معناه $2-3+d=0$ أي $d=1$

ومنه المعادلة الديكارتية لـ (ABC) هي

$(ABC):\ 2x-y+z+1=0$

2- تبين أن (ABC) و (P) متعامدان

لدينا $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ ناظمي لـ (ABC)

و $\vec{n'}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ ناظمي لـ (P)

$\vec{n}\cdot\vec{n'}=2(1)+(-1)(1)+1(-1)=0$

ومنه $\vec{n}$ يعامد $\vec{n'}$ إذن (ABC) يعامد (P)

3- تعين تمثيل وسيطي لـ (Δ) مستقيم تقاطع (P) و (ABC)

$$(\Delta):\begin{cases}2x-y+z+1=0 \ \dots (1)\\ x+y-z+2=0 \ \dots (2)\end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد $3x+3=0$ أي $\boxed{x=-1}$

بالتعويض في (1) نجد

$-2-y+z+1=0$

أي $-1-y+z=0$

بوضع $\boxed{z=t}$ نجد $-1-y+t=0$

أي $\boxed{y=t-1}$

ومنه التمثيل الوسيطي لـ (Δ) هو

$$(\Delta):\begin{cases}x=-1\\ y=t-1\\ z=t\end{cases} ;\ t\in\mathbb{R}$$

- تعين إحداثيات H المسقط العمودي لـ (C) على (P).

أولا: تعين تمثيل وسيطي للمستقيم (D) العمودي على (P) والذي يشمل C

بما أن (D) عمودي على (P) فإن $\vec{n'}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ يعتبر شعاع توجيه لـ (D) ومنه التمثيل الوسيطي لـ (D) هو :

$$(D):\begin{cases}x=\alpha\\ y=\alpha-2\\ z=-\alpha-3\end{cases} ,\ \alpha\in\mathbb{R}$$

تعيين تقاطع (D) مع (P)

لتكن $M(\alpha, \alpha-2, -\alpha-3)$ نقطة من (D)

$M \in (P)$ معناه

$\alpha + \alpha - 2 - (-\alpha - 3) + 2 = 0$

أي $3\alpha + 3 = 0$

إذن $\boxed{\alpha = -1}$

ومنه إحداثيات H المسقط العمودي لـ C على (P) هي

$H(-1, -3, -2)$

- حساب المسافة بين C و (Δ)

بما أن (P) يعامد (ABC) و (Δ) مستقيم تقاطعهما فإن

$d(C,(\Delta)) = d(C,(P)) = CH$

$d(C,(P)) = \dfrac{|-2-(-3)+2|}{\sqrt{1^2+1^2+(1)^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

$CH = \sqrt{(-1)^2 + (-3+2)^2 + (-2+3)^2} = \sqrt{3}$

ومنه $d(A,(\Delta)) = \sqrt{3}$

6. تعيين إحداثيات G مرجح الجملة

$\{(A,1), (B,-1), (C,2)\}$.

$x_G = \dfrac{x_A - x_B + 2x_C}{2} = \dfrac{1-3+2(0)}{2} = -1$

$y_G = \dfrac{y_A - y_B + 2y_C}{2} = \dfrac{2+2+2(-2)}{2} = 0$

$z_G = \dfrac{z_A + z_B + 2z_C}{2} = \dfrac{-1-3+2(-3)}{2} = -5$

إذن

$G(-1, 0, -5)$

7. تعيين طبيعة (S):

$(S): \|\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = 4$

لدينا G مرجح الجملة

$\{(A,1), (B,-1), (C,2)\}$.

ومنه حسب الخاصية المميزة لمرجح ثلاث نقط

$\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC} = 2\vec{MG}$

أي $\|\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = \|2\vec{MG}\|$

إذن $\|\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = 2MG$

ومنه $\|\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = 4$

تكافئ $2MG = 4$

أي $MG = 2$

ومنه (S) هي سطح كرة مركزها G ونصف قطرها 2.

التمرين الثاني:

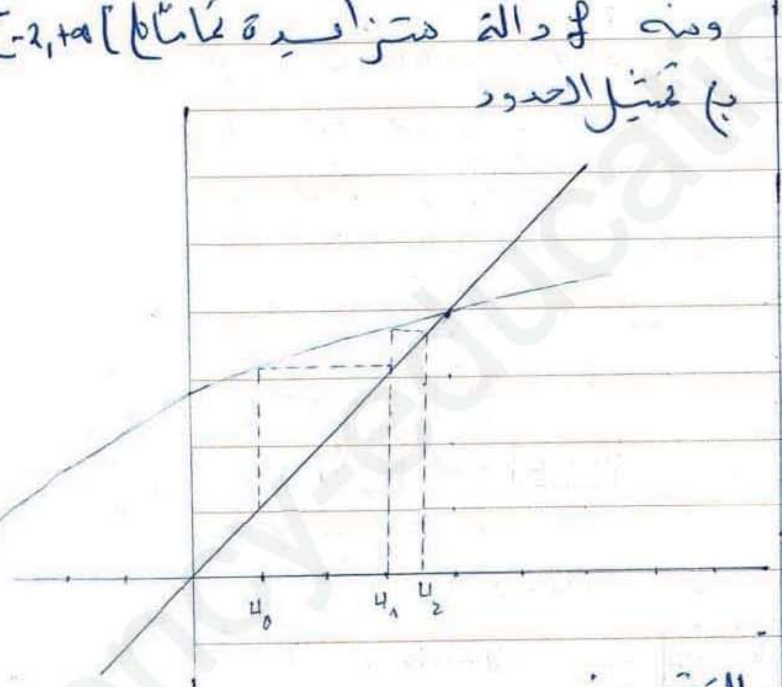
1) دراسة اتجاه تغير الدالة f على $[-2, +\infty[$

لدينا f دالة قابلة للاشتقاق على $]-2, +\infty[$ ودالتها المشتقة هي:

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}} > 0$

ومنه f دالة متزايدة تماما على $[-2, +\infty[$

ب) تمثيل الحدود



التخمين

لدينا $u_0 < u_1 < u_2$ ومنه (u_n) متتالية متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ ومتقاربة نحو 2

2) نضع

$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$

- البرهان بالتراجع أن $0<U_n<2$

- لدينا . التحقق من أجل $n=0$:

لدينا $U_0=\frac{1}{2}$ و $0<\frac{1}{2}<2$

إذن $0<U_0<2$ محققة

نفرض صحة الخاصية من أجل n ، أي $0<U_n<2$

ونبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي $0<U_{n+1}<2$

لدينا $0<U_n<2$ و f دالة متزايدة على $]-2,+\infty[$ ومنه

$$f(0)<f(U_n)<f(2)$$

أي $\sqrt{2}<U_{n+1}<2$

بما أن $\sqrt{2}>0$ فإن $0<U_{n+1}<2$

ومنه الخاصية محققة من أجل $n+1$

الخلاصة :

من أجل كل n طبيعي : $0<U_n<2$.

ج) تبيين أن $U_{n+1}-U_n=\frac{-U_n^2+U_n+2}{\sqrt{U_n+2}+U_n}$

لدينا $U_{n+1}-U_n=\sqrt{U_n+2}-U_n$

$$=\frac{(\sqrt{U_n+2}-U_n)(\sqrt{U_n+2}+U_n)}{\sqrt{U_n+2}+U_n}$$

$$=\frac{(\sqrt{U_n+2})^2-U_n^2}{\sqrt{U_n+2}+U_n}$$

$$=\frac{U_n+2-U_n^2}{\sqrt{U_n+2}+U_n}$$

$$U_{n+1}-U_n=\frac{-U_n^2+U_n+2}{\sqrt{U_n+2}+U_n}$$

دراسة اتجاه تغير (U_n)

دراسة إشارة $(-U_n^2+U_n+2)$

بوضع $x=U_n$ نجد $-x^2+x+2$

حساب Δ :

$\Delta=(1)^2-4(2)(-1)=9$

ومنه $x_1=\frac{-1-3}{-2}=2$

$x_2=\frac{-1+3}{-2}=-1$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$-x^2+x+2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

بما أن $0<U_n<2$ فإن $-U_n^2+U_n+2>0$

ومنه $U_{n+1}-U_n>0$ إذن (U_n) متتالية متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

دراسة تقارب (U_n)

لدينا (U_n) متتالية متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى $(U_n<2)$ فهي متقاربة.

3. تبيين أن $0<2-U_{n+1}<\frac{1}{2}(2-U_n)$

لدينا $0<U_{n+1}<2$ ومنه $2-U_{n+1}>0$

ولدينا $2-U_{n+1}=2-\sqrt{U_n+2}$

$$=\frac{(2-\sqrt{U_n+2})(2+\sqrt{U_n+2})}{(2+\sqrt{U_n+2})}$$

$$=\frac{4-(U_n+2)}{2+\sqrt{U_n+2}}$$

$$=\frac{4-U_n-2}{2+\sqrt{U_n+2}}$$

$$2-U_{n+1}=\frac{2-U_n}{2+\sqrt{U_n+2}}$$

لدينا $U_{n+1}>0$ ومنه $\sqrt{U_n+2}>0$

أي $2+\sqrt{U_n+2}>2$

ومنه $\frac{1}{2+\sqrt{U_n+2}}<\frac{1}{2}$

بما أن $U_n<2$ فإن $2-U_n>0$ إذن

$$\frac{1(2-U_n)}{2+\sqrt{U_n+2}}<\frac{1}{2}(2-U_n)$$

أي $\boxed{0<2-U_{n+1}<\frac{1}{2}(2-U_n)}$

استنتاج أن

$0 < 2-U_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n$

لدينا $0 < 2-U_n < \frac{1}{2}(2-U_{n-1})$

و $(2-U_{n-1}) < \frac{1}{2}(2-U_{n-2})$

$\vdots$

$(2-U_1) < \frac{1}{2}(2-U_0)$

ومنه $0 < 2-U_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n(2-U_0)$

أي $0 < 2-U_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n\left(2-\frac{1}{2}\right)$

$0 < 2-U_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{3}{2}\right)$

$0 < 2-U_n < 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

لدينا $0 < 2-U_n < 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

ومنه

$\lim\limits_{n\to+\infty} 0 < \lim\limits_{n\to+\infty}(2-U_n) < \lim\limits_{n\to+\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

أي $0 < \lim\limits_{n\to+\infty}(2-U_n) < 0$

إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} 2-U_n = 0$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 2$

التمرين ③:

① تعين الجذرين التربيعيين لـ $z = -3+12i\sqrt{3}$

نضع $w = x+iy$ جذر لـ z معناه

$w^2 = z$

لدينا $w^2 = x^2-y^2+2xyi$

$|w^2| = |w|^2 = x^2+y^2$

$|z| = \sqrt{(-3)^2+(12\sqrt{3})^2} = 21$

معناه $w^2 = z$

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 21 & \text{①} \\ x^2-y^2 = -3 & \text{②} \\ 2xy = 12\sqrt{3} & \text{③} \end{cases}$$

نجمع ② مع ① نجد $2x^2 = 18$

أي $x^2 = 9$

ومنه إما $x=3$ أو $x=-3$

من أجل $x=3$ بالتعويض في ③ نجد

$2(3)y = 12\sqrt{3}$

أي $y = 2\sqrt{3}$

من أجل $x=-3$ نجد $2(-3)y = 12\sqrt{3}$

ومنه $y = -2\sqrt{3}$

إذن الجذران التربيعيان لـ $z = -3+12i\sqrt{3}$

هما $w_1 = 3+2\sqrt{3}i$ ، $w_2 = -3-2\sqrt{3}i$

- بين أن B ، C، E تنتمي إلى دائرة مركزها A

لدينا $z_A = \sqrt{3}i$, $z_B = -\sqrt{3}i$

$AB = |z_B - z_A| = |-\sqrt{3}i - \sqrt{3}i| = |-2\sqrt{3}i| = 2\sqrt{3}$

$AC = |z_C - z_A| = |3+2i\sqrt{3}-\sqrt{3}i| = |3+i\sqrt{3}| = \sqrt{3^2+\sqrt{3}^2}$

$= \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$\boxed{AC = 2\sqrt{3}}$

$AE = |-3+2i\sqrt{3}-\sqrt{3}i| = |-3+i\sqrt{3}|$

$= \sqrt{(-3)^2+\sqrt{3}^2}$

$= \sqrt{12}$

$AE = 2\sqrt{3}$

لدينا $AB = AC = AE = 2\sqrt{3}$

ومنه B ، C، E تنتمي إلى الدائرة مركزها A

ونصف قطرها $r = 2\sqrt{3}$

- تبين أن $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = \frac{3+2i\sqrt{3}+i\sqrt{3}}{-3+2i\sqrt{3}+i\sqrt{3}}$

$= \frac{3+3i\sqrt{3}}{-3+3i\sqrt{3}}$

$= \frac{3(1+i\sqrt{3})}{3(-1+i\sqrt{3})}$

$= \frac{1+i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}}$

$$\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = \frac{1+i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}}$$

$$= \frac{(1+i\sqrt{3})(-1-i\sqrt{3})}{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{-1-i\sqrt{3}-i\sqrt{3}+3}{4}$$

$$= \frac{2-2i\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

لدينا $\left|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$$

نضع $\theta = Arg\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

ومنه $\theta = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

إذن

$$\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

- نعين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}\right)^n$ حقيقي سالب

$\left(\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}\right)^n$ حقيقي سالب معناه

$$Arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}\right)^n = \pi + 2k\pi$$

أي $Arg\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^n = \pi + 2k\pi$

ومنه $Arg\left(e^{-i\frac{n\pi}{3}}\right) = \pi + 2k\pi$

إذن $-\frac{n\pi}{3} = \pi + 2k\pi$

$$\boxed{n = -3 - 6k}$$

مع k عدد صحيح نسبي سالب غير معدوم

نبين أنه يوجد دوران يحول E إلى C ومركزه B.

$\begin{cases} r(B) = B \\ r(E) = C \end{cases}$ معناه $\begin{cases} z_B = az_B + b \\ z_C = az_E + b \end{cases}$

بالطرح نجد

$$z_C - z_B = a(z_E - z_B)$$

إذن

$$a = \frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}$$

$$a = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

بما أن $|a| = 1$ فإن r دوران ، وزاويته $-\frac{\pi}{3}$

نعين عبارته المركبة

لدينا $a = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

ومنه $b = z_B - az_B$

$$= z_B(1-a)$$

$$= (-\sqrt{3}i)\left(1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= (-\sqrt{3}i)\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{2}$$

العبارة المركبة للدوران r هي

$$z' = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

4) نعتبر (Γ) حيث $|\bar{z} + 3 + 2i\sqrt{3}| = |z_B|$

نعين طبيعة (Γ) .

$|\bar{z} + 3 + 2i\sqrt{3}| = |z_B|$ معناه $|\overline{z + 3 - 2i\sqrt{3}}| = |z_B|$

أي $|z + 3 - 2i\sqrt{3}| = \sqrt{3}$

$$|z - (-3 + 2i\sqrt{3})| = \sqrt{3}$$

$$|z - z_E| = \sqrt{3}$$

$$EM = \sqrt{3}$$

ومنه (Γ) هي دائرة مركزها E ونصف قطرها $\sqrt{3}$.

طبيعة (Γ') ، (Γ') هي صورة (Γ) بواسطة الدوران r

ومنه (Γ') هي دائرة مركزها $r(E) = C$ ونصف قطرها $r = \sqrt{3}$.

التمرين الرابع:

$g(x)=x+1-2\ln x$

حساب نهايتي g:

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} g(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x+1-2\ln x$

$=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2\ln x}{x}\right)$

$=+\infty$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}=0$

- دراسة إتجاه تغيرات الدالة g.

g قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ ولدينا:

$g'(x)=1-\frac{2}{x}$

$=\frac{x-2}{x}$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $(x-2)$

جدول تغيرات g:

x	0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$3-2\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

إستنتاج إشارة $g(x)$:

بما أن $g(2)=3-2\ln 2>0$ قيمة حدية صغرى

فإن $g(x)>0$ على $]0,+\infty[$

x	0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	

II) $f(x)=x+\ln x-(\ln x)^2$

حساب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)=\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x+\ln x-(\ln x)^2$

$=\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x+\ln x(1-\ln x)=-\infty$

التفسير الهندسي:

بما أن $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)=-\infty$ فإن (C_f) يقبل المستقيم ذو المعادلة $x=0$ كمستقيم مقارب موازي لمحور التراتيب.

تبين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x+\ln x-(\ln x)^2$

$=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{\ln x}{x}-\frac{(\ln x)^2}{x}\right)$

$=+\infty$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}=0$

② تبين أن $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$

f دالة قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ ولدينا:

$f'(x)=1+\frac{1}{x}-\frac{2\ln x}{x}$

$f'(x)=\frac{x+1-2\ln x}{x}$

ومنه $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$

3- دراسة إتجاه تغيرات الدالة f

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

ومنه $f'(x)>0$ إذا f دالة متزايدة تماما على $]0,+\infty[$.

4- جدول تغيرات الدالة f.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4 - دراسة إشارة العبارة $\ln x-(\ln x)^2$

$\ln x-(\ln x)^2=0$ معناه $\ln x(1-\ln x)=0$

إما $(\ln x=0)$ أو $(1-\ln x=0)$

أي $x=1$ أو $x=e$

x	0	1	e	$+\infty$
$\ln x-(\ln x)^2$	$-$	0 $+$	0	$-$

إستنتاج الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ)

المعرف بـ: $y=x$.

$f(x)-x=\ln x-(\ln x)^2$

x	0 ... 1	1 ... e	e ... $+\infty$
$\ln x-(\ln x)^2$	$-$	$+$	$-$
الوضع النسبي	(C_f) يقع تحت (Δ)	(C_f) يقع فوق (Δ)	(C_f) يقع تحت (Δ)
	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	

$(C_f)\cap(\Delta)=\{A(1,1),B(e,e)\}$.

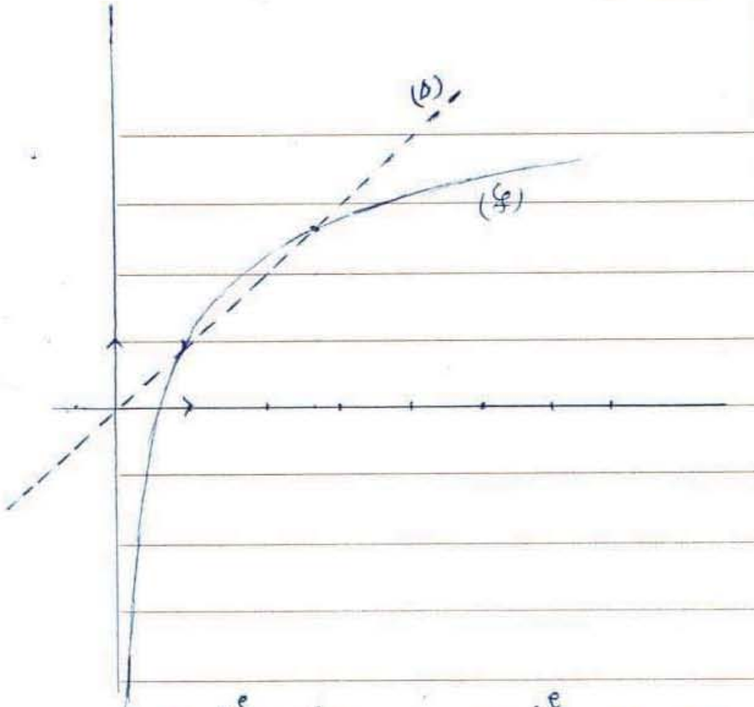
تبيين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,6<\alpha<0,7$.

f دالة مستمرة ومتزايدة على $]0,+\infty[$ وبالخصوص على $]0,6;0,7[$ و

$\begin{cases} f(0,7)= \\ f(0,6)= \end{cases}$ أي $f(0,7)\cdot f(0,6)<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد α وحيد في المجال $]0,6;0,7[$ بحيث $f(\alpha)=0$

الرسم:



III) $I=\int_1^e \ln x\,dx$ ، $J=\int_1^e (\ln x)^2dx$

تبين أن $J=e-2I$

بوضع $\begin{cases} u(x)=(\ln x)^2 \\ v'(x)=1 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} u'(x)=\frac{2\ln x}{x} \\ v(x)=x \end{cases}$

$$J=\int_1^e(\ln x)^2dx=\left[x(\ln x)^2\right]_1^e-\int_1^e x\left(\frac{2\ln x}{x}\right)dx$$

$$=\left[x(\ln x)^2\right]_1^e-\int_1^e 2\ln x\,dx$$

$$=e(\ln e)^2-1(\ln 1)^2-2\int_1^e \ln x\,dx$$

$$\boxed{J=e-2I}$$

- تحقق أن $x\mapsto x\ln x-x$ دالة أصلية لـ $x\mapsto \ln x$

نضع $h(x)=x\ln x-x$: h دالة قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ولدينا

$h'(x)=1\ln x+\frac{1}{x}x-1=\ln x$

ومنه $x\mapsto x\ln x-x$ دالة أصلية لـ $x\mapsto\ln x$

بحساب مساحة الحيز

$$A=\int_1^e f(x)-x\,dx=\int_1^e \ln x-(\ln x)^2dx$$

$$=\int_1^e \ln x-\int_1^e(\ln x)^2dx$$

$$=\left[x\ln x-x\right]_1^e-\left(e-2\left[x\ln x-x\right]_1^e\right)$$

$$=e-e+1-e+2(e-e)-2(-1)$$

$$A=3-e\ ua$$