العمل و الطاقة الحركية الدورانية
خاص بشعبتي الرياضي و التقني رياضي

مفاهيم وتعاريف :

1-تعريف النقطة مادية :

هي كل جسم مادي تكون أبعاده مهملة في دراسته.

تعريف الحركة الدائرية: يكون جسم صلب في حركة دوران حول محور ثابت, إذا كانت كل نقطة من نقاطه في حركة دائرية ممركزةعلى هذا المحور

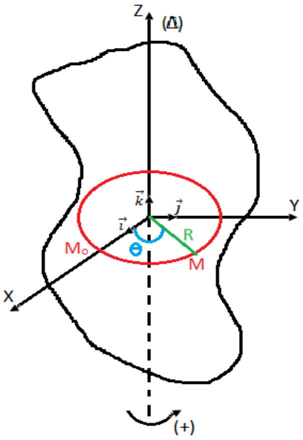
2- مميزات الحركة الدائرية لنقطة مادية:

أ- الفاصلة الزاوية والفاصلة المنحنية :

نختار معلما متعامدا ممنظما $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ بحيث تنطبق $\vec{k}$ مع محور الدوران, وينطبق المستوى $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ مع مستوى مسار النقطة M.

نعتبر المحور OX اتجاها مرجعيا.

تشير علامة (+) إلى المنحى الموجب. وبالتالي يمكن تحديد موقع النقطة M في كل لحظة ب:



الفاصلة المنحنية : $S = \widehat{M_0M}$ (m)

الفاصلة الزاوية : $\theta = (\overrightarrow{OM_0},\overrightarrow{OM})$ ب: (rad)

ملاحظة: الفاصلة المنحنية و الفاصلة الزاوية مقادير جبرية.

ب- العلاقة بين الفاصلة المنحنية S والفاصلة الزاوية θ :

ينتقل جسم نقطي من الموضع M_1 في اللحظة t_1 الى الموضع M_2 في اللحظة t_2 .

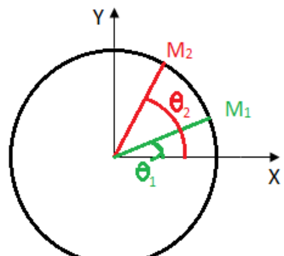
المسافة المقطوعة على المسار بين اللحظتين t_1 و t_2 ممثلة بالقوس $s_2 - s_1 = \Delta s = \widehat{M_1M_2}$

الزاوية الممسوحة بين اللحظتين t_1 و t_2 ممثلة بالقيمة : $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ اذن العلاقة بين الفاصلة المنحنية والفاصلة الزاوية تعطى: $S = R.\theta$

ج- السرعة :

السرعة الخطية المتوسطة V_m	السرعة الزاوية المتوسطة
$V_m = \dfrac{\Delta S}{\Delta t} = \dfrac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1}$ V_m: السرعة الخطية المتوسطة (m/s) ΔS: المسافة المقطوعة بين اللحظتين t_1 و t_2 (m) Δt: المدة الزمنية (s)	$w_m = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} = \dfrac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1}$ w_m: السرعة الخطية المتوسطة (rad/s) $\Delta\theta$: الزاوية الممسوحة بين اللحظتين t_1 و t_2 (rad) Δt: المدة الزمنية (s)

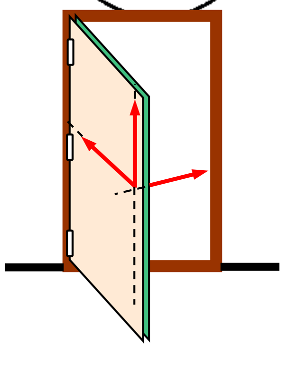
العلاقة بين السرعة المتوسطة و السرعة الزاوية المتوسطة : $v_i = R\omega_i$



* وحدة القياس : نعبر في نظام الوحدات الدولية على الزاوية بالراديان (rd) والزمن بالثانية (s) فتكون وحدة السرعة الزاوية الراديان على الثانية (rd / s) . كما نعبر على طول القوس Δs بالمتر (m) والزمن Δt بالثانية (s) فتكون وحدة السرعة (m / s) .

3- عزم قوة بالنسبة لمحوردوران ثابت :

أ- مفهوم العزم :(نشاط الكتاب المدرسي ص 54) .



أمسك بابا من مقبضه و طبق عليه قوة نحو الأعلى بحيث يكون حامل القوة موازيا لمحور دوران الباب . هل يدور الباب؟

غير الآن اتجاه القوة بحيث يقطع حاملها محور دوران هذا الباب . هل يدور الباب؟

كيف يجب أن يكون اتجاه القوة حتى يكون لها فعل على دوران الباب؟

طبق هذه المرة قوة كيفية F على مقبض الباب بحيث لا يقطع حاملها محور دوران الباب و ليست موازية له. هل لهذه القوة أثر؟ ماذا تستنتج؟ .

نتيجة

حتى يكون لقوة F مطبقة على جسم صلب متحرك حول محور ثابت أثر دوراني على حركته يجب أن لا تكون هذه القوة موازية لمحور الدوران ولا يقطع حاملها هذا المحور.نقول أن لقوة F عزم بالنسبة لهذا المحور اذاكان لها أثر على دوران هذا الجسم. نرمز لعزم قوة بالنسبة لمحور Δ بالرمز $M_{F/\Delta}$

يحسب عزم قوة F بالنسبة لمحور Δبجداء شدة هذه القوة في البعد العمودي بين حامل هذه القوة والمحور. وتكتب عبارة عزم القوة على

الشكل: $M_\Delta(\vec{F}) = \pm F.d$ حيث : d البعد العمودي (m) بين حامل F و Δ و F: شدة القوة (N)

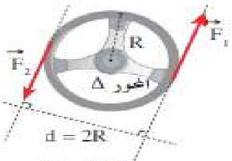
4- مزدوجة قوتين :

أ- تعريف المزدوجة :

المزدوجة مجموعة قوتين بحيث تكون متساويتين في الشدة ومتعاكستين في الاتجاه وحاملهما متوازي ولها عزم غير منعدم.(الشكلين 1-2) .

الشكل -1-

أمثلة: مزدوجة محرك, مزدوجة الكبح, مزدوجة اللف.



الشكل -2-

ب- عزم مزدوجة :

نشاط :

تؤثر مزدوجة قوتين ($\vec{F_1}, \vec{F_2}$) على مقود سيارة نصف قطره R .

1- اختر اتجاه دوران موجب.

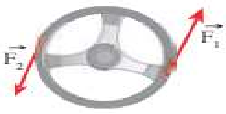
2- أوجد عزم القوة $\vec{F_1}$ بالنسبة لمحور الدوران.

3- أوجد عزم القوة $\vec{F_2}$ بالنسبة لمحور الدوران.

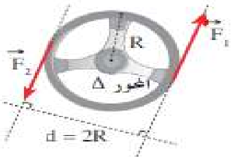
4- أوجد مجموع عزمي القوتين.

5- استنتج عبارة عزم مزدوجة.

تحليل النشاط :



الشكل -1-



الشكل -2-

1- اتجاه دوران موجب موضح بالشكل - 2-

2- عزم القوة $\vec{F_1}$ بالنسبة لمحور الدوران Δ هو $M_{F_1/\Delta} = F_1.R$

3- عزم القوة $\vec{F_2}$ بالنسبة لمحور الدوران Δهو $M_{F_2/\Delta} = F_2.R$

4- مجموع عزمي القوتين:

$$M_C = M_1 + M_2$$

$$M_C = F_1.R + F_2.R$$

بما أن: $F = F_2 = F$ فإن:

$M_C = F(R+R) = F(2R)$ أي أن : $M_{C/\Delta} = Fd$

حيث: d هي المسافة (البعد العمودي) بين حاملي القوتين ($\vec{F_1}, \vec{F_2}$)

الاستنتاج

يرجع حساب عزم مزدوجة قوتين $(\vec{F1}, \vec{F2})$ تؤثر على جسم صلب يدور حول محور Δ إلى حساب المجموع الجبري لـ عزمي القوتين .يتعلق عزم هذه المزدوجة بشدة إحدى القوتين وذراع المزدوجة الذي هوالبعد العمودي بين حاملي القوتين . وتكتب العبارة على الشكل :

$M_C/\Delta = F.d$.

حيث : $F = F_2 = F$: هي شدة احدى قوى المزدوجتين تقدر بالنيوتن:(N) و d :هي المسافة (البعد العمودي بين حامل القوتين) يقدر بالمتر(m).

ملاحظة :

لا يتعلق عزم مزدوجة قوتين موجودتين في المستوي العمودي على محور الدوران Δ لجسم صلب بموضع هذا المحور.

يحسب عزم المزدوجة بجداء شدة إحدى القوتين في البعد العمودي d بين حاملي القوتين : $M_\Delta(\vec{F}) = \pm F.d$

5- عزم عطالة جسم صلب بالنسبة لمحور ثابت: (عمل مخبري).

أ- مركز الكتل :

تعريف : يعرف مركز كتل جملة نقاط مادية كتلة كل منها ..... m_1, m_2, m_3 وموضع كل منها على التوالي .... M_1, M_2, M_3, على أنه مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط M_i المرفقة بالكتل m_i. إذا اعتبرنا موضع مركز الكتل النقطة C يحسب موضعه بالعبارة التالية :

$$m_1\overrightarrow{CM_1} + m_2\overrightarrow{CM_2} + m_3\overrightarrow{CM_3} + \ldots\ldots = \vec{0}$$

بالنسبة لنقطة O نختارها كمبدأ تكتب العلاقة السابقة على الشكل :
$$\overrightarrow{OC} = \frac{\sum m_i \overrightarrow{OM_i}}{\sum m_i}$$

ب- مركز العطالة :

نشاط:

ضع صفيحة من زجاج على طاولة ثم خذ قطعة صابون واغرز فيها ثلاثة أعمدة صغيرة (أعواد ثقاب مثلا) في مواضع مختلفة حيث أحد الأعمدة يكون في مركز القطعة؛ بلل قطعة الصابون ثم ضعها على اللوح الزجاجي وادفعها لتتحرك عليه .

1- هل لكل الأعمدة مسارات متشابهة خلال الحركة ؟

- مسارات الأعمدة غير متشابهة خلال الحركة .

2- ماهو العمود الذي له مسار خاص ؟ وما نوع هذا المسار ؟

- العمود الذي له مسار خاص يقع في مركز القطعة و له مسار مستقيم .

الاستنتاج

في الأجسام الصلبة التي نعتبرها مجموعة نقط مادية , توجد نقطة واحدة لها حركة خاصة (حركة مستقيمة منتظمة إذا كانت الجملة معزولة) ندعوها مركز عطالة الجملة ونرمز لها عادة بالرمز C . إذا كانت الكتلة لا تتعلق بسرعة الجسم كما هو الحال في دراستنا , ينطبق مركز العطالة على مركز الكتل .

ج- عطالة الأجسام الصلبة :

نشاط1:

خذ عربتين متماثلتين وضع عليهما إناءين متماثلين فارغين .

أملأ أحد الإناءين بالرمل والأخر بالصوف .

ادفع بيدك العربة الأولى , ثم ادفع بنفس الكيفية العربة الثانية.ليتحركا بحركة انسحابية .

- ما هي العربة التي أحسست أنها تسارعت حركتها أكثر عند الإقلاع ؟ - العربة المحملة بالصوف .

- ما هي العربة التي أحسست أنها تقاوم أكثر التغير في السرعة ؟ - العربة الثقيلة .

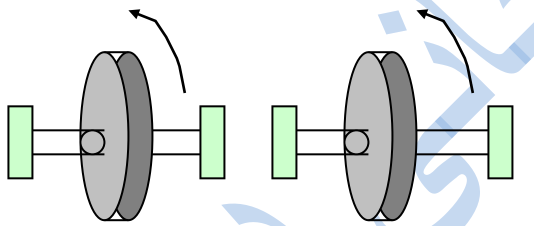
- في رأيك بماذا تتعلق هذه المقاومة للأثر الانسحابي ؟ - تتعلق هذه المقاومة للأثر الانسحابي بالكتلة .

نشاط 2:

1) خذ قرصين متماثلين (نفس القطر ونفس السمك) واحد من خشب والأخر من رصاص مثلا .

اجعل كل قرص يدور حول محور أفقي يمر من مركزه .

طبق على حافة كل قرص وبنفس الكيفية قوة لها قيمة تجعلهما يدوران حول هذين المحورين .



أي قرص يبدي مقاومة أكبر للأثر الدوراني لهذه القوة ؟

القرص الذي يبدي مقاومة أكبر هو القرص الثقيل .

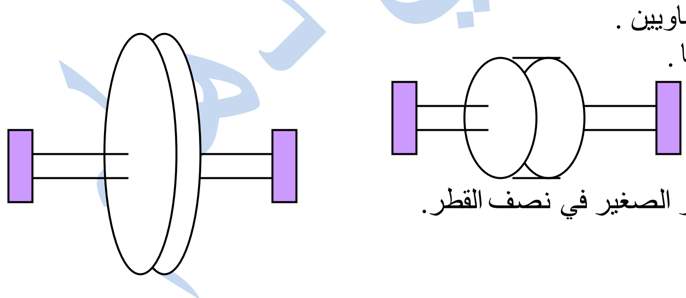
في رأيك بماذا تتعلق هذه المقاومة للأثر الدوراني ؟

تتعلق هذه المقاومة للأثر الدوراني بالكتلة

2) خذ كمية من الجبس امزجه بالماء ثم اقسمه إلى نصفي متساويين .

اصنع بهما قرصين أحدهما قطره R والآخر قطره 2R تقريبا .

طبق على حافة كل قرص وبنفس الكيفية قوة لها نفس الشدة تجعلهما يدوران حول محوريهما.



- أي قرص يبدي مقاومة أكبر للأثر الدوراني للقوة ؟

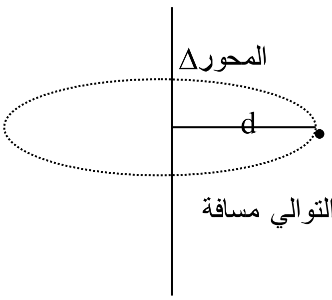
- القرص الذي يبدي مقاومة أكبر للأثر الدوراني لهذه القوة هو الصغير في نصف القطر.

- في رأيك بماذا تتعلق هذه المقاومة للأثر الدوراني ؟

- تتعلق هذه المقاومة للأثر الدوراني بنصف القطر .

نتيجة

تبدي الأجسام الصلبة المتحركة حول محور(Δ) مقاومة للأثر الدوراني للقوة المطبقة عليها ندعوها العطالة الدورانية . تتعلق هذه العطالة في الأجسام الصلبة بكتلة وبنصف قطر الجسم .

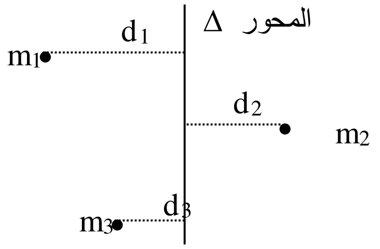


د- عزم عطالة جسم صلب بالنسبة لمحورثابت:

يعرف عزم العطالة $J_{/\Delta}$ بالنسبة للمحور Δ لجسم نقطي كتلته m ويبعد مسافة عمودية d عن هذا المحور بالعبارة التالية : $J_{/\Delta} = md^2$

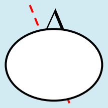
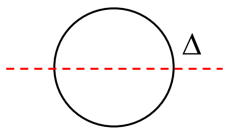
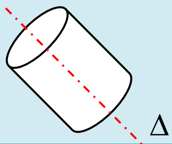
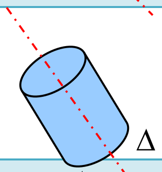
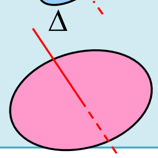
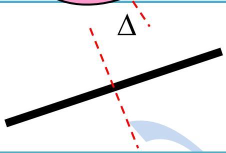
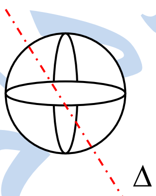
وحدة عزم العطالة في النظام الدولي هي : $kg \cdot m^2$

يحسب عزم عطالة جملة نقاط مادية كتلة كل نقطة m_1 , m_2 , m_3 ... تبعد كل منها عن محور الدوران على التوالي مسافة عمودية d_1 , d_2 , d_3 ... بمجموع عزوم عطالة كل نقطة بالنسبة لنفس المحور : $J_{/\Delta} = \Sigma m_i d_i^2$



عزم عطالة بعض الأجسام الصلبة المتجانسة بالنسبة لمحور مار من مركزها:

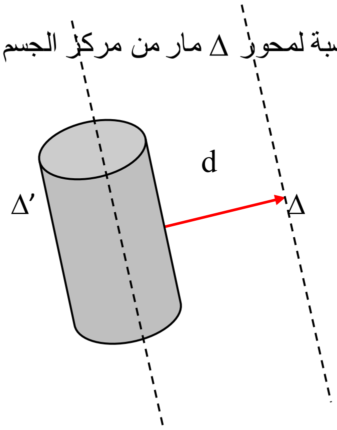
يوضح الجدول التالي عزم عطالة الأجسام بالنسبة لمحور Δ مار من مركز عطالتها :

الجسم	المحور	عزم العطالة	الشكل
حلقة نصف قطرها R وكتلتها M	محور الحلقة	$J_{/\Delta} = MR^2$	
حلقة نصف قطرها R وكتلتها M	محور قطري	$J_{/\Delta} = 1/2\ MR^2$	
أسطوانة مجوفة نصف قطرها R وكتلتها M	محور الأسطوانة	$J_{/\Delta} = MR^2$	
أسطوانة مصمتة نصف قطرها R وكتلتها M	محور الأسطوانة	$J_{/\Delta} = 1/2\ MR^2$	
قرص نصف قطره R وكتلته M	محور القرص	$J_{/\Delta} = 1/2\ MR^2$	
قضيب كتلته M و طوله L .	محور عمودي على القضيب ويمر من منتصفه	$J_{/\Delta} = 1/12\ ML^2$	
كرة مصمتة نصف قطرها R وكتلتها M	محور يمر من مركزها	$J_{/\Delta} = 2/5\ MR^2$	

حالة دوران جسم حول محور Δ ليمر من مركزعطالته :

نظرية هويغنز:

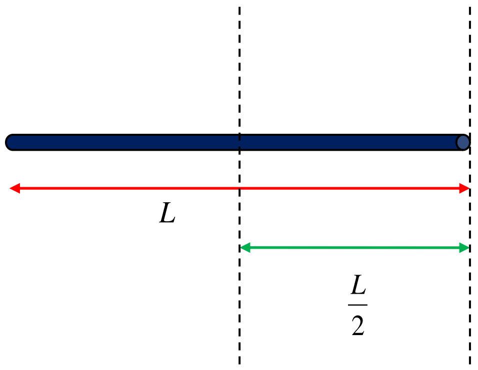
عزم عطالة جسم صلب بالنسبة لمحور(Δ’) لا يمر من مركزه يساوي عزم عطالة هذا الجسم بالنسبة لمحور Δ مار من مركز الجسم و يوازي المحور (Δ’) زائدا جداء كتلة الجسم في مربع المسافة الفاصلة بين هذين المحورين : $J_{/\Delta'} = J_{/\Delta} + Md^2$



تطبيق :

أوجد عزم عطالة ساق طولها L وكتلتها m بالنسبة لمحور Δ' عمودي على مستويها ومار

من أحد طرفيها .



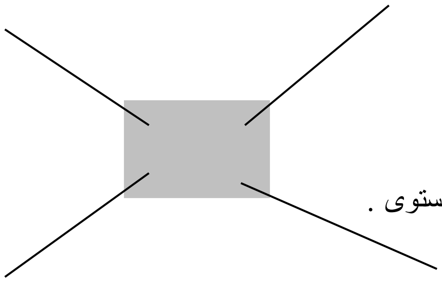
الحل: بتطبيق نظرية هويغنز:

$$J_{/\Delta'} = J_{/\Delta} + md^2$$

$$= \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$J_{/\Delta'} = \frac{1}{2}mL^2$$

6- شروط توازن جسم صلب خاضع لعدة قوى: (عمل مخبري).



نشاط1: خذ جسما خفيفا من فلين أو "بوليستران"

استعن بزميلك وطبقا عليه أربع قوى كيفية بواسطة خيوط مطاطية .

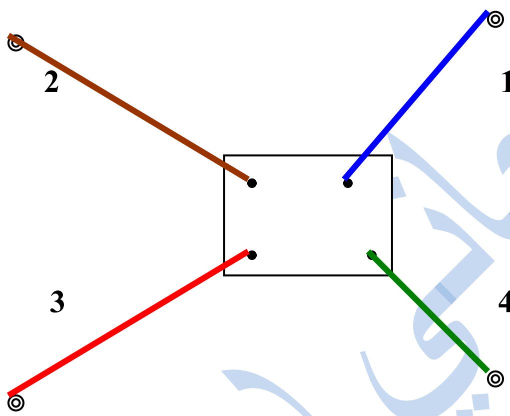
حقق توازن الجسم في وضعية كيفية للأيدي

هل يمكنكما الحصول على توازن حيث لا تكون حوامل القوى في نفس المستوى ؟

نشاط2 : للقيام بالحسابات نقتصر على دراسة أوضاع التوازن التي تكون فيها القوى في نفس المستوى .

خذ ورق مقوى , طبق أربع قوى بواسطة خيوط مطاطية مثبتة بدبابيس على لوح من خشب

عليه ورقة بيضاء تسمح لك بتعيين موضع الجسم والخيوط .



1- علم على الورقة بقلم شكل الجسم وحوامل الخيوط المطاطية ونقاط تثبيتها . رقم المطاطات .

2- استنتج شدة القوى المطبقة على الجسم باستعمال القارورة المعايرة

3- مثل على الورقة أشعة القوى المطبقة على الجسم باختيار سلم .

4- جد المجموع الشعاعي للقوى الأربع . ماذا تلاحظ ؟ - نلاحظ أنه معدوم.

5- احسب عزم كل قوة بالنسبة إلى نقطة كيفية تختارها .

6- احسب المجموع الجبري لهذه العزوم . ماذا تلاحظ ؟ نلاحظ أنه معدوم .

7- استنتج عبارتي شرطي التوازن .

- عبارتي شرط توازن جسم صلب خاضع لعدةقوى تقع في نفس المستوى هما:

* $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{0}$

* $M_{/\Delta} = M_{F1/\Delta} + M_{F2/\Delta} + M_{F3/\Delta} + M_{F4/\Delta} = 0$

8- هل يبقى الجسم في حالة توازن إذا تحقق شرط واحد من شرطي التوازن ؟

9- اقترح طريقة عملية تبين فيها ذلك .

نشاط 3

عوض في التجربة السابقة قوتين بقوة واحدة (عوض المطاطين 1و 2 بمطاط واحد 5) محافظا على نفس وضعية توازن الجسم السابق (المرسوم على الورقة) . لتعيين خصائص هذه القوة نتبع المراحل التالية :

تعيين حامل هذه القوة :

1- ارسم على الورقة المجموع الشعاعي للقوتين المحذوفتين .

2- كيف يجب أن يكون حامل المطاط 5 لتحقيق التوازن ؟

* يجب أن يكون حامل المطاط 5 موازيا لحامل القوة F_5 التي تمثل المجموع الشعاعي للقوتين المحذوفتين .

تعيين نقطة تطبيق هذه القوة :

استعمل شرط التوازن الثاني $\Sigma M_{F/\Delta} = 0$ لتعيين نقطة تثبيت الخيط المطاطي 5 على الجسم حتى يتحقق التوازن السابق . (يخضع الجسم لتأثير الخيوط المطاطية 3 , 4 , 5) .

تعيين شدة هذه القوة :
حقق التوازن المطلوب بسحب المطاط 5 دون تغيير استطالتي المطاطين 3 و 4 .
استنتج شدة وجهة هذه القوة .
مدد على الورقة حوامل القوى الثلاث . ماذا تلاحظ ؟
* عند تمديد حوامل القوى الثلاث نجد أنها تلتقي في نقطة واحدة .
- هل عبارتي شرطي توازن الجسم الصلب تبقى محققة ؟
* نعم .
- استنتج صيغة أخرى لشرطي توازن جسم صلب خاضع لثلاثة قوى غير متوازية .
* $\Sigma\vec{F_i} = \vec{0}$
* أن تكون القوى الثلاثة متقاطعة في نفس النقطة .

نتيجة

يكون جسما صلبا خاضعا لعدة قوى في حالة توازن في معلم عطالي إذا كان :
1- كل القوى المؤثرة عليه تقع في نفس المستوى .
2- المجموع الشعاعي للقوى المطبقة على الجسم معدوم : $\Sigma\vec{F_i} = \vec{0}$
3- المجموع الجبري لعزوم القوى المؤثرة عليه معدوم : $\Sigma M_{F/\Delta} = 0$.

6-عبارة عمل مزدوجة :

عمل قوة ذات عزم ثابت لمزدوجة :

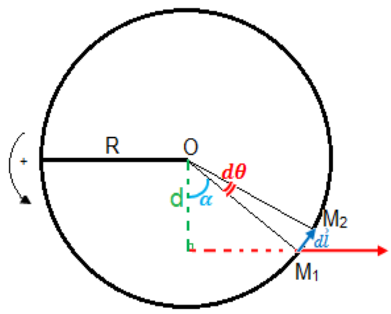
عندما يدور الجسم بزاوية صغيرة $d\theta$, تقطع نقطة تأثير القوة $\vec{F}$ قوسا صغيرا $\widehat{M_1M_2}$ يمكن اعتباره مستقيميا ونعبر عنه ب $\vec{dl}$.
باعتبار أن $\vec{F}$ تقريبا ثابتة, نعبر عن العمل الجزئي ب:

$$\delta W = \vec{F}.\vec{dl} \Longrightarrow \delta W = F.dl.\cos\alpha$$

نعلم أن: $dl = Rd\theta \Longrightarrow \delta W = F.R\cos\alpha.d\theta$

حسب الشكل لدينا: $d = R\cos\alpha$ ولدينا $M_\Delta(\vec{F}) = F.d$

إذن: $\delta W = M_\Delta(\vec{F}).d\theta$



عند دوران الجسم بزاوية $\Delta\theta$, تنجز القوة $\vec{F}$ عملا مساويا لمجموع الأعمال الجزئية :
$W(\vec{F}) = \sum M_\Delta(\vec{F}).d\theta$ بما أن: $M_\Delta(\vec{F}) =$ فإن:

$$W(\vec{F}) = M_\Delta(\vec{F})\sum.d\theta$$

وبالتالي :

$$W(\vec{F}) = M_\Delta(\vec{F}).\Delta\theta$$

بإتباع نفس المنهجية السابقة نبين أن العمل الجزئي لمزدوجة هو: $\delta W = M_\Delta.d$
بالنسبة لدوران بزاوية $\Delta\theta$, يكون عمل المزدوجة هو $W = \sum \delta W_i$
نعلم أن العزم ثابت وبالتالي تعطى عبارة عمل مزدوجة ذات عزم ثابت بالعبارة: $W = M_\Delta.\Delta\theta$

7- الطاقة الحركية لجسم صلب في حركة دوران حول محور ثابت :

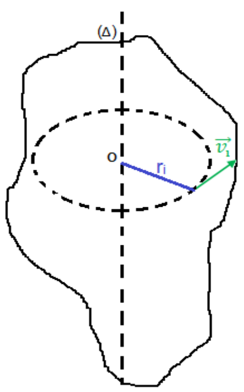
نعتبر جسما صلبا (S) في دوران حول محور ثابت (Δ) بسرعة زاوية ω
كل نقطة من نقاط الجسم (S) تنجز حركة إزاحة بالنسبة لمحور الدوران.

$$E_{c_i} = {}^1\!/_2\, m_i v_i^2$$

نعلم أن: $v_i = r_i.\,\omega \Longrightarrow E_{c_i} = {}^1\!/_2\, m_i r_i^2 \omega^2$

الطاقة الحركية للجسم (S) هي: $E_C = \sum_i E_{C_i}$ اذن: $E_C = {}^1\!/_2\, \omega^2 \sum_i m_i r_i^2$

نضع: $J_\Delta = \sum_i m_i r_i^2$



ومنه تعطى عبارة الطاقة الحركية لجسم في حالة حركة دورانية بالعبارة التالية: $E_c = {}^1\!/_2 J_\Delta \omega^2$ حيث :
J_Δ: عزم عطالة الجسم بالنسبة للمحور (Δ) وحدته في (S.I) هي: $(Kg.m^2)$. وهويتعلق فقط بتوزيع الكتلة المكونة له حول المحور (Δ).