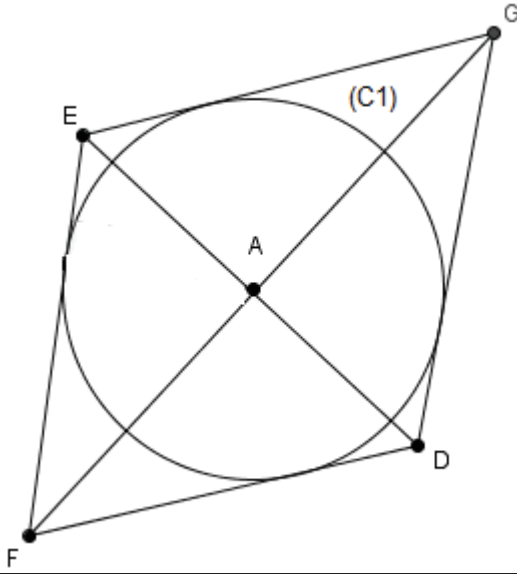


أولمبياد التاسع عشر

تمرين 1

x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعا بحيث : $x + 2y + 3z \geq 20$
بين أن : $x + y + z + \frac{3}{x} + \frac{9}{2y} + \frac{4}{z} \geq 13$

تمرين 2



$EGDF$ معين مركزه A محيطه $P = 241 \text{ cm}$ ومساحته $S = 10 \text{ cm}^2$ كما هو مبين في الشكل جانبه.
الدائرة (C_1) هي مماسة لأضلاع المعين
احسب مساحة الدائرة (C_1)

تمرين 3

x و y و z أعداد حقيقية منعدمة بحيث : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$
بين أن : $(y + x + z)^2 = y^2 + x^2 + z^2$

تمرين 4

x و y عدنان حقيقيان بحيث : $x \neq y$ و $x^2 = 2016 + y$ و $y^2 = 2016 + x$
احسب xy

حل أولمبياد التاسع عشر

تمرين 1

لدينا :

$$\begin{aligned} x+y+z+\frac{3}{x}+\frac{9}{2y}+\frac{4}{z} &= \frac{4x}{4}+\frac{2y}{2}+\frac{4z}{4}+\frac{3}{x}+\frac{9}{2y}+\frac{4}{z} \\ &= \frac{3x+x}{4}+\frac{y+y}{2}+\frac{3z+z}{4}+\frac{3}{x}+\frac{9}{2y}+\frac{4}{z} \\ &= \frac{3x}{4}+\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{y}{2}+\frac{3z}{4}+\frac{z}{4}+\frac{3}{x}+\frac{9}{2y}+\frac{4}{z} \end{aligned}$$

إذن : $x+y+z+\frac{3}{x}+\frac{9}{2y}+\frac{4}{z} = \left(\frac{3x}{4}+\frac{3}{x}\right) + \left(\frac{y}{2}+\frac{9}{2y}\right) + \left(\frac{z}{4}+\frac{4}{z}\right) + \frac{x+2y+3z}{4}$ (1)

لدينا : $\left(\sqrt{\frac{3x}{4}}+\sqrt{\frac{3}{x}}\right)^2 \geq 0$

يعني : $\left(\sqrt{\frac{3x}{4}}\right)^2 + 2\sqrt{\frac{3x}{4}} \times \sqrt{\frac{3}{x}} + \left(\sqrt{\frac{3}{x}}\right)^2 \geq 0$

يعني : $\frac{3x}{4} + 2\sqrt{\frac{3x}{4}} \times \sqrt{\frac{3}{x}} + \frac{3}{x} \geq 0$

إذن : $\frac{3x}{4} + \frac{3}{x} \geq 2\sqrt{\frac{3x}{4}} \times \sqrt{\frac{3}{x}}$ (2)

بنفس الطريقة نبين أن : $\frac{y}{2} + \frac{9}{2y} \geq 2\sqrt{\frac{y}{2}} \times \sqrt{\frac{9}{2y}}$ (3)

و $\frac{z}{4} + \frac{4}{z} \geq 2\sqrt{\frac{z}{4}} \times \sqrt{\frac{4}{z}}$ (4)

نجمع المتفاوتات 2 و 3 و 4 طرف بطرف :

$$\begin{aligned} \left(\frac{3x}{4}+\frac{3}{x}\right) + \left(\frac{y}{2}+\frac{9}{2y}\right) + \left(\frac{z}{4}+\frac{4}{z}\right) &\geq 2\sqrt{\frac{3x}{4}} \times \sqrt{\frac{3}{x}} + 2\sqrt{\frac{y}{2}} \times \sqrt{\frac{9}{2y}} + 2\sqrt{\frac{3z}{4}} \times \sqrt{\frac{4}{z}} \\ &= 2\sqrt{\frac{3\cancel{x}}{4}} \times \frac{3}{\cancel{x}} + 2\sqrt{\frac{\cancel{y}}{2}} \times \frac{9}{2\cancel{y}} + 2\sqrt{\frac{\cancel{z}}{4}} \times \frac{4}{\cancel{z}} \\ &= 2 \times \frac{3}{2} + 2 \times \frac{3}{2} + 2 \end{aligned}$$

ومنه : $\left(\frac{3x}{4}+\frac{3}{x}\right) + \left(\frac{y}{2}+\frac{9}{2y}\right) + \left(\frac{z}{4}+\frac{4}{z}\right) \geq 8$ (5)

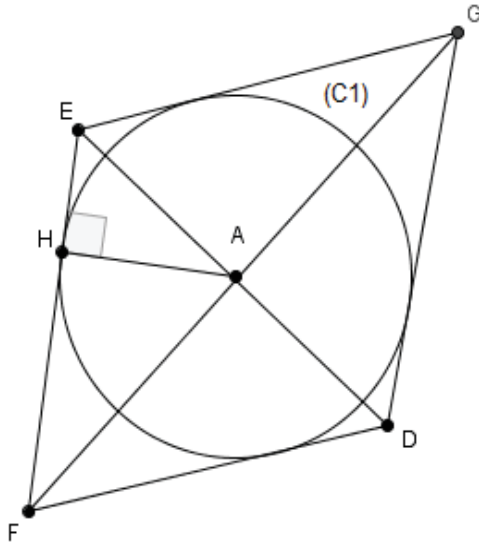
ونعلم أن : $x+2y+3z \geq 20$ (6)

من 1 و 5 و 6 نستنتج أن :

$$x+y+z+\frac{3}{x}+\frac{9}{2y}+\frac{4}{z}=\left(\frac{3x}{4}+\frac{3}{x}\right)+\left(\frac{y}{2}+\frac{9}{2y}\right)+\left(\frac{z}{4}+\frac{4}{z}\right)+\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{3z}{4} \geq 8+\frac{20}{4}$$

وبالتالي : $x+y+z+\frac{3}{x}+\frac{9}{2y}+\frac{4}{z} \geq 13$

تمرين 2



لدينا : $P = 4 \times EG = 2\sqrt{41}$

إذن : $EG = \frac{2\sqrt{41}}{4} = \frac{\sqrt{41}}{2}$

ولدينا : $S_{EGDF} = \frac{1}{2} \times ED \times FG = 10$

(S_{EGDF} : مساحة المعين $EGDF$)

إذن : $ED \times FG = 10 \times 2 = 20$ (1)

نعتبر H نقطة التماس بين الدائرة (C_1)

والمستقيم (EF)

إذن : $(EF) \perp (AH)$

أي : $[AH]$ ارتفاع في المثلث EAF القائم الزاوية في A

أي : $AH \times EF = AE \times AF$ (علاقة مترية)

$$AH = \frac{ED \times FG}{4 \times \frac{\sqrt{41}}{2}} \quad \text{أي} \quad AH = \frac{\frac{ED}{2} \times \frac{FG}{2}}{EF} \quad \text{أي} \quad AH = \frac{AE \times AF}{EF}$$

إذن : $AH = \frac{ED \times FG}{2\sqrt{41}}$ (2)

من 1 و 2 نستنتج أن : $AH = \frac{20}{2\sqrt{41}}$ ومنه : $AH = \frac{10}{\sqrt{41}} \times \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{41}} = \frac{10\sqrt{41}}{41}$

مساحة الدائرة (C_1) : $S_{(C_1)} = \pi \times AH^2$

وبالتالي : $S_{(C_1)} = 3.14 \times \left(\frac{10\sqrt{41}}{41}\right)^2 = 7.65 \text{ cm}^2$

تمرين 3

لدينا : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$

يعني : $xyz \times \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = xyz \times 0$ يعني : $\frac{xyz}{x} + \frac{xyz}{y} + \frac{xyz}{z} = 0$

يعني : $yz + xz + xy = 0$ يعني : $yz + xz = -xy$

يعني : $z(y+x) = -xy$

يعني : $y+x = \frac{-xy}{z}$ يعني : $y+x+z = \frac{-xy}{z} + z$

يعني : $(y+x+z)^2 = \left(\frac{-xy}{z} + z \right)^2$

يعني : $(y+x+z)^2 = \left(\frac{xy}{z} \right)^2 - 2xy + z^2$

$\left(\frac{-xy}{z} \right)^2 = \left(\frac{xy}{z} \right)^2 = (y+x)^2$

يعني : $(y+x+z)^2 = (y+x)^2 - 2xy + z^2$

يعني : $(y+x+z)^2 = y^2 + \cancel{2xy} + x^2 - \cancel{2xy} + z^2$

إذن : $(y+x+z)^2 = y^2 + x^2 + z^2$

تمرين 4

لدينا : $x^2 = 2016 + y$ و $y^2 = 2016 + x$

يعني : $x^2 - y^2 = 2016 + y - 2016 - x$

يعني : $(x-y)(x+y) = -(x-y)$

يعني : $x+y = \frac{-(x-y)}{x-y} = -1$ ($x \neq y$)

يعني : $(x+y)^2 = (-1)^2$

يعني : $x^2 + 2xy + y^2 = 1$

يعني : $y + 2016 + 2xy + x + 2016 = 1$

يعني : $(x+y) + 2032 + 2xy = 1$

يعني : $-1 + 2032 + 2xy = 1$ ($x+y = -1$)

يعني : $2xy = -2030$

وبالتالي : $xy = -2015$