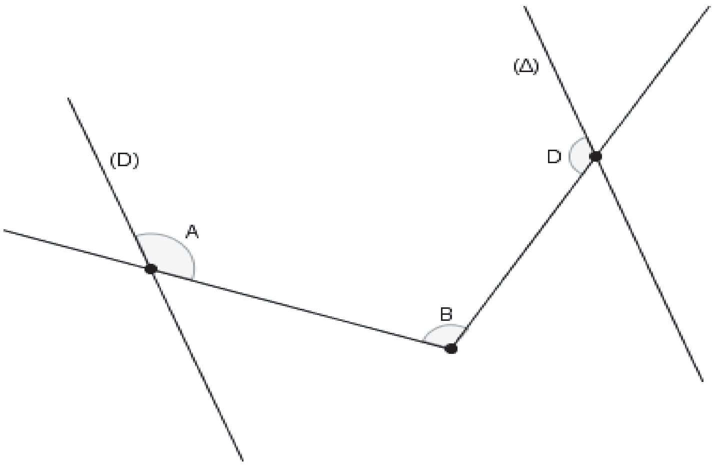
أولمبياد الواحد والعشرون

تمرين 1

x و y و z أعداد حقيقية بحيث : $x>1$ و $y>1$ و $z>1$

بين أن : $xyz+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}>y+x+z+\frac{1}{xyz}$

تمرين 2



نعتبر الشكل جانبه بحيث :

$(D)//(\Delta)$

بين أن : $A+B+D=360^{\circ}$

تمرين 3

x و y و z هي أطوال أضلاع مثلث

بين أن : $(x+z-y)^2<4xz$

تمرين 4

x عدد حقيقي غير منعدم بحيث : $x^2+\frac{1}{x^2}=7$

أحسب : $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$

حل أولمبياد الواحد والعشرون

تمرين 1

بما أن : $y>1$ فإن : $-y<-1$

ومنه : $-\frac{1}{y}>-1$

لدينا : $-\frac{1}{y}>-1$ و $x>1$ يعني : $x+\left(-\frac{1}{y}\right)>1+(-1)$

إذن : $x-\frac{1}{y}>0$ (1)

بنفس الطريقة نبين أن : $y-\frac{1}{z}>0$ (2)

و $z-\frac{1}{x}>0$ (3)

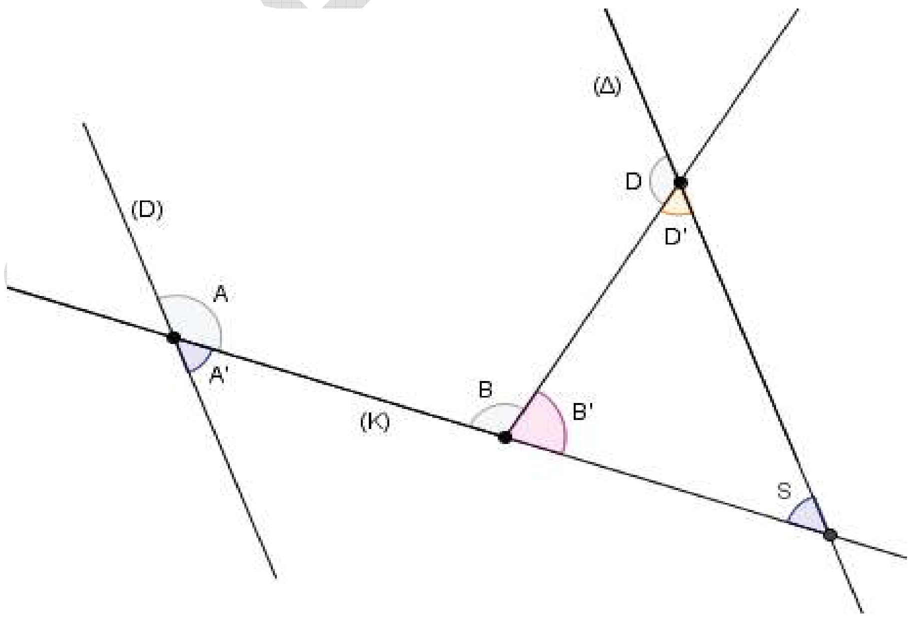
نطرب المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف : $\left(x-\frac{1}{y}\right)\left(y-\frac{1}{z}\right)\left(z-\frac{1}{x}\right)>0$

أي : $\left(xy-\frac{x}{z}-1+\frac{1}{yz}\right)\left(z-\frac{1}{x}\right)>0$ أي : $xyz-y-x+\frac{1}{z}-z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{xyz}>0$

أي : $xyz+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\left(y+x+z+\frac{1}{xyz}\right)>0$

وبالتالي : $xyz+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}>y+x+z+\frac{1}{xyz}$

تمرين 2



بماأن

$(D)//(\Delta)$ و (K) قاطع لهما

فإن $S = A'$

لدينا : $S = A' = 180^\circ - A$

و $B' = 180^\circ - B$

و $D' = 180^\circ - D$

ونعلم أن مجموع زوايا مثلث تساوي 180°

يعني : $S + B' + D' = 180^\circ$

يعني : $180^\circ - A + 180^\circ - B + 180^\circ - D = 180^\circ$

يعني : $A + B + D = 180^\circ + 180^\circ + \cancel{180^\circ} - \cancel{180^\circ}$

وبالتالي : $A + B + D = 360^\circ$

تمرين 3

لنحدد إشارة الفرق $(x+z-y)^2 - 4xz$:

$$\begin{aligned}(x+z-y)^2 - 4xz &= \left((x+z)-y\right)^2 - 4xz \\ &= (x+z)^2 - 2\times(x+z)\times y + y^2 - 4xz \\ &= x^2 + 2xz + z^2 - 2xy + 2yz + y^2 - 4xz \\ &= x^2 + z^2 + y^2 - 2(xy + yz + xz)\end{aligned}$$

لدينا : x و y و z هي أطوال أضلاع مثلث

يعني : $x + y > z$ (متفاوتة مثلثية)

يعني : $z\times(x+y) > z\times z$ ($z > 0$)

إذن : $xz + yz > z^2$ (1)

وبنفس الطريقة نبين أن : $yz + xy > y^2$ (2)

و $xy + xz > x^2$ (3)

نجمع المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف :

$$xz + yz + yz + xy + xy + xz > z^2 + y^2 + x^2$$

أي : $2(xy + yz + xz) > x^2 + y^2 + z^2$

أي : $(x+z-y)^2-4xz=x^2+z^2+y^2-2(xy+yz+xz)\leq 0$

وبالتالي : $(x+z-y)^2<4xz$

تمرين 4

نضع : $y=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$

يعني : $y^2=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=x+2+\frac{1}{x}$

يعني : $y^2-2=x+\frac{1}{x}$

يعني : $(y^2-2)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$

يعني : $(y^2-2)^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}=7+2=9$

يعني : $(y^2-2)^2-9=0$

يعني : $(y^2-2+3)(y^2-2-3)=0$

يعني : $(y^2+1)(y^2-5)=0$

يعني : $y^2+1=0$ أو $y^2-5=0$

يعني : $y^2=-1$ المعادلة ليس لها حل

أو $(y-\sqrt{5})(y+\sqrt{5})=0$

يعني : $y-\sqrt{5}=0$ أو $y+\sqrt{5}=0$

يعني : $y=\sqrt{5}$ أو $y=-\sqrt{5}$

ونعلم أن $y=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}>0$

وبالتالي : $y=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt{5}$