

أولمبياد العشرون

تمرين 1

x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعا بحيث : $x+y+z=3$

بين أن : $\frac{\sqrt{x}}{y+z} + \frac{\sqrt{y}}{x+z} + \frac{\sqrt{z}}{x+y} \geq \frac{3}{2}$

تمرين 2

احسب $A = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}} + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$

تمرين 3

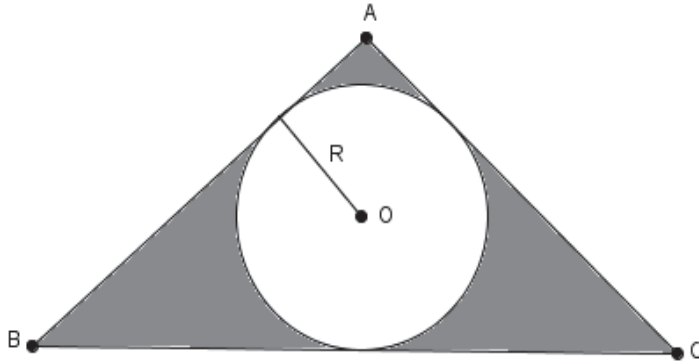
$u-1$ و v و w أعداد حقيقية

بين أن : $(u+v+w)^2 \leq 3(u^2+v^2+w^2)$

x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعا بحيث : $x+y+z=1$

بين أن : $\sqrt{6x+1} + \sqrt{6y+1} + \sqrt{6z+1} \leq 3\sqrt{3}$ (استعمل السؤال 1)

تمرين 4



ABC مثلث بحيث : $AB=13cm$

و $BC=15cm$ و $AC=14cm$

النقطة O هي مركز الدائرة المحاطة

بالمثلث ABC التي شعاعها R

احسب مساحة المنطقة المظللة

حل أولمبياد العشرون

تمرين 1

لدينا : $(\sqrt{x}-1)^2 \geq 0$

يعني : $(-\sqrt{x}-2 \leq 0) \quad (\sqrt{x}-1)^2 \times (-\sqrt{x}-2) \leq 0 \times (-\sqrt{x}-2)$

يعني : $(x-2\sqrt{x}+1) \times (-\sqrt{x}-2) \leq 0$ يعني : $-x\sqrt{x}-2\cancel{x}+2\cancel{x}+4\sqrt{x}-\sqrt{x}-2 \leq 0$

يعني : $-x\sqrt{x}+3\sqrt{x}-2 \leq 0$ يعني : $\sqrt{x}(3-x) \leq 2$ يعني : $\frac{1}{\sqrt{x}(3-x)} \geq \frac{1}{2}$

يعني : $(\sqrt{x})^2 \times \frac{1}{\sqrt{x}(3-x)} \geq (\sqrt{x})^2 \times \frac{1}{2}$ إذن : $\frac{\sqrt{x}}{y+z} \geq \frac{x}{2}$ (1)

بنفس الطريقة نبين أن : $\frac{\sqrt{y}}{x+z} \geq \frac{y}{2}$ (2)

و $\frac{\sqrt{z}}{x+y} \geq \frac{z}{2}$ (3)

نجمع المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف : $\frac{\sqrt{x}}{y+z} + \frac{\sqrt{y}}{x+z} + \frac{\sqrt{z}}{x+y} \geq \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2}$

أي : $\frac{\sqrt{x}}{y+z} + \frac{\sqrt{y}}{x+z} + \frac{\sqrt{z}}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{2}$

وبالتالي : $\frac{\sqrt{x}}{y+z} + \frac{\sqrt{y}}{x+z} + \frac{\sqrt{z}}{x+y} \geq \frac{3}{2}$

تمرين 2

نضرب في المرافق

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}} + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} \\
 &= \frac{1}{1+\sqrt{2}} \times \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} \times \frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{\sqrt{3}-\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}} \times \frac{\sqrt{98}-\sqrt{99}}{\sqrt{98}-\sqrt{99}} + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} \times \frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{\sqrt{99}-\sqrt{100}} \\
 &= \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{3-4} + \dots + \frac{\sqrt{98}-\sqrt{99}}{98-99} + \frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{99-100} \\
 &= \frac{1-\sqrt{2}}{1} - \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{1} - \dots - \frac{\sqrt{98}-\sqrt{99}}{1} + \frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{1} \\
 &= -1 + \sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3} + \sqrt{4} - \dots - \sqrt{98} + \sqrt{99} - \sqrt{99} + \sqrt{100} \\
 &= -1 + \sqrt{100} = -1 + 10 = 9
 \end{aligned}$$

تمرين 3

1- لنحدد إشارة الفرق : $3(u^2 + v^2 + w^2) - (u + v + w)^2$

لنحدد إشارة الفرق

لدينا :

$$\begin{aligned} 3(u^2 + v^2 + w^2) - (u + v + w)^2 &= 3u^2 + 3v^2 + 3w^2 - ((u + v) + w)^2 \\ &= 3u^2 + 3v^2 + 3w^2 - (u + v)^2 - 2 \times (u + v) \times w - w^2 \\ &= 3u^2 + 3v^2 + 3w^2 - u^2 - 2uv - v^2 - 2uw - 2vw - w^2 \\ &= 2u^2 + 2v^2 + 2w^2 - 2uv - 2uw - 2vw \\ &= u^2 - 2uv + v^2 + u^2 - 2uw + w^2 + v^2 - 2vw + w^2 \\ &= (u - v)^2 + (u - w)^2 + (v - w)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

إذن : $(u + v + w)^2 \leq 3(u^2 + v^2 + w^2)$

2- نضع : $u = \sqrt{6x+1}$ و $v = \sqrt{6y+1}$ و $w = \sqrt{6z+1}$

حسب السؤال 1 : $(\sqrt{6x+1} + \sqrt{6y+1} + \sqrt{6z+1})^2 \leq 3(6x+1 + 6y+1 + 6z+1)$

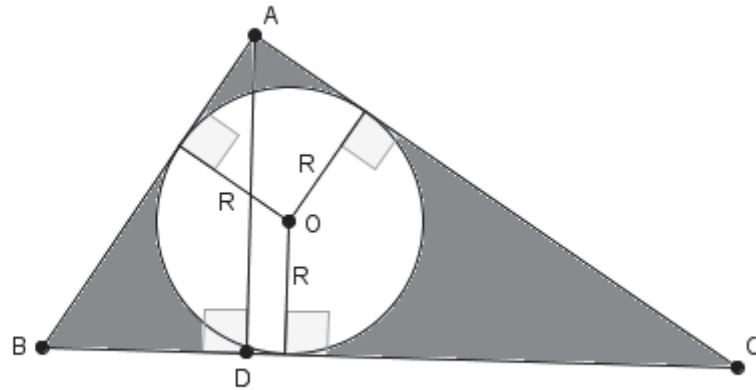
يعني : $(\sqrt{6x+1} + \sqrt{6y+1} + \sqrt{6z+1})^2 \leq 3(6(x+y+z) + 3)$

يعني : $(\sqrt{6x+1} + \sqrt{6y+1} + \sqrt{6z+1})^2 \leq 3(6 \times 1 + 3) = 27$ ($x + y + z = 1$)

يعني : $\sqrt{(\sqrt{6x+1} + \sqrt{6y+1} + \sqrt{6z+1})^2} \leq \sqrt{27}$

وبالتالي : $\sqrt{6x+1} + \sqrt{6y+1} + \sqrt{6z+1} \leq 3\sqrt{3}$

تمرين 4



لدينا المثلث ADB قائم الزاوية في D

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن : $AB^2 = AD^2 + DB^2$

ومنه : $AD^2 = AB^2 - DB^2$ (1)

لدينا المثلث ADC قائم الزاوية في D

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن : $AC^2 = AD^2 + DC^2$

ومنه : $AD^2 = AC^2 - DC^2$ (2)

من 1 و 2 نستنتج ان : $AD^2 = AB^2 - DB^2 = AC^2 - DC^2$

أي : $DB^2 - DC^2 = AB^2 - AC^2$ أي : $(DB - DC)(DB + DC) = AB^2 - AC^2$

أي : $(DB - DC)AC = AB^2 - AC^2$ أي : $(DB - DC) \times 15 = 13^2 - 14^2$

أي : $DB - DC = \frac{169 - 196}{15}$ أي : $DB - DC = -1,8$ إذن : $DC = DB + 1,8$

لدينا : $BD + DC = 15$

يعني : $BD + (DB + 1,8) = 15$ يعني : $2BD = 15 - 1,8$ إذن : $BD = 6,6$

لدينا : $AD^2 = AB^2 - DB^2$ أي : $AD^2 = 13^2 - 6,6^2$ أي : $AD = \sqrt{169 - 43,56}$

إذن : $AD = 11,2$

لدينا : $S_{ABC} = S_{AOB} + S_{OBC} + S_{AOC}$

يعني : $84 = \frac{13 \times R}{2} + \frac{15 \times R}{2} + \frac{14 \times R}{2}$ يعني : $84 = R \left(\frac{13}{2} + \frac{15}{2} + \frac{14}{2} \right)$ يعني : $84 = R \times 21$

إذن : $R = 4cm$

لدينا : مساحة المنطقة المظلة = مساحة المثلث ABC - مساحة الدائرة

يعني :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times AD \times BC - \pi R^2 &= \frac{1}{2} \times 11,2 \times 15 - 3,14 \times 4^2 \\ &= 84 - 50,24 \\ &= 33,76cm^2 \end{aligned}$$

وبالتالي مساحة المنطقة المظلة هي : $33,76cm^2$