أولمبياد السادس

تمرين 1

x و y و z أعداد حقيقية موجبة ($x>0$ و $y>0$ و $z>0$)

1- بين أن $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$

2- استنتج أن : $\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}\geq 6$

تمرين 2

x و y و z أعداد حقيقية بحيث : $\begin{cases} x-7y+8z=4 \\ 8x+4y-z=7 \end{cases}$

بين أن : $x^2-y^2+z^2=1$

تمرين 3

في الشكل جانبه لدينا :

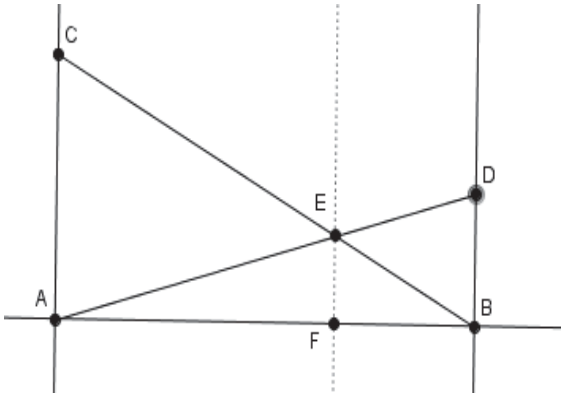
$(AC)//(BD)$ و $AC=8$

و $BD=4$ و E نقطة

تقاطع (BC) و (AD)

و F نقطة من القطعة $[AB]$ بحيث $(EF)//(BD)$

احسب EF



تمرين 4

x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعا و m عدد حقيقي

بحيث : $xyz=1$ و $\frac{2xm}{xy+x+1}+\frac{2ym}{yz+y+1}+\frac{2zm}{xz+z+1}=1$

بين أن : $m=\frac{1}{2}$

حل أولمبياد السادس

تمرين 1

1 – لدينا : $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2=\frac{x^2+y^2}{xy}-2=\frac{x^2-2xy+y^2}{xy}=\frac{(x-y)^2}{xy}\geq 0$

(لأن $(x-y)^2\geq 0$ و $xy>0$)

إذن : $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$

2– حسب السؤال السابق لدينا : $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$ (1)

بنفس الطريقة نبين أن : $\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\geq 2$ (2)

و $\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\geq 2$ (3)

نجمع المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف :

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\geq 2+2+2$$

أي : $\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}\geq 2+2+2$

إذن : $\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}\geq 6$

تمرين 2

نضع : $\begin{cases}x-7y+8z=4 & (1)\\ 8x+4y-z=7 & (2)\end{cases}$

نضرب المعادلة (1) في 2 والمعادلة (2) في 1 : $\begin{cases}x-7y+8z=4 & (\times 2)\\ 8x+4y-z=7 & (\times 1)\end{cases}$

يعني : $\begin{cases}2x-14y+16z=8\\ 8x+4y-z=7\end{cases}$

نجمع المعادلتين المحصل عليهما طرف بطرف : $2x-14y+16z+8x+4y-z=8+7$

يعني : $10x-10y+15z=15$

يعني : $10(x-y)=15(1-z)$

إذن : $x-y=\frac{15}{10}(1-z)=\frac{3}{2}(1-z)$ (3)

نضرب المعادلة (1) في -1 والمعادلة (2) في 2 : $\begin{cases} x-7y+8z=4 & (\times(-1)) \\ 8x+4y-z=7 & (\times 2) \end{cases}$

أي : $\begin{cases} -x+7y-8z=-4 \\ 16x+8y-2z=14 \end{cases}$

نجمع المعادلتين المحصل عليهما طرف بطرف : $-x+7y-8z+16x+8y-2z=-4+14$

يعني : $15x+15y-10z=10$

يعني : $15(x+y)=10(1+z)$

إذن : $x+y=\frac{10}{15}(1+z)=\frac{2}{3}(1+z)$ (4)

نضرب المتساويتان 3 و 4 طرف بطرف : $(x-y)\times(x+y)=\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}(1-z)\times\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}(1+z)$

يعني : $x^2-y^2=1-z^2$

وبالتالي : $x^2-y^2+z^2=1$

تمرين 3

بتطبيق طاليس المباشرة في المثلث ABC :

$\frac{BF}{BA}=\frac{BE}{BC}=\frac{EF}{AC}$ ومنه $\frac{BF}{BA}=\frac{EF}{AC}$ (1)

بتطبيق طاليس المباشرة في المثلث ADB :

$\frac{AF}{AB}=\frac{AE}{AD}=\frac{EF}{DB}$ ومنه $\frac{AF}{AB}=\frac{EF}{DB}$ (2)

نجمع المتساويتان 1 و 2 طرف بطرف نجد :

$$\frac{BF}{BA}+\frac{AF}{AB}=\frac{EF}{AC}+\frac{EF}{DB}$$

يعني : $EF\left(\frac{1}{AC}+\frac{1}{DB}\right)=\frac{BF+AF}{AB}=\frac{AB}{AB}=1$

إذن : $\frac{1}{AC}+\frac{1}{DB}=\frac{1}{EF}$

التطبيق العددي :

$$\frac{1}{EF}=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{4+8}{32}=\frac{12}{32}$$

$$EF=\frac{32}{12}=\frac{8}{3}$$

تمرين 4

بما أن : $xyz=1$ فإن : $yz=\frac{1}{x}$ و $xz=\frac{1}{y}$

لدينا : $\frac{2xm}{xy+x+1}+\frac{2ym}{yz+y+1}+\frac{2zm}{xz+z+1}=1$

يعني : $\frac{2xm}{xy+x+1}+\frac{2ym}{\frac{1}{x}+y+1}+\frac{2zm}{\frac{1}{y}+z+1}=1$

يعني : $\frac{2xm}{xy+x+1}+\frac{2ym}{\frac{1+xy+x}{x}}+\frac{2zm}{\frac{1+yz+y}{y}}=1$

يعني : $\frac{2xm}{xy+x+1}+\frac{2xym}{1+xy+x}+\frac{2yzm}{1+yz+y}=1$

يعني : $\frac{2xm}{xy+x+1}+\frac{2xym}{1+xy+x}+\frac{2yxm}{1+\frac{1}{x}+y}=1$

يعني : $\frac{2xm}{xy+x+1}+\frac{2xym}{1+xy+x}+\frac{2yzm}{\frac{1+xy+x}{x}}=1$

يعني : $\frac{2xm}{xy+x+1}+\frac{2xym}{1+xy+x}+\frac{2xyzm}{1+xy+x}=1$

يعني : $\frac{2xm+2xym+2\times1\times m}{xy+x+1}=1$

يعني : $\frac{2m\left(\cancel{x+xy+1}\right)}{\cancel{xy+x+1}}=1$

يعني : $2m=1$

وبالتالي : $m=\frac{1}{2}$