

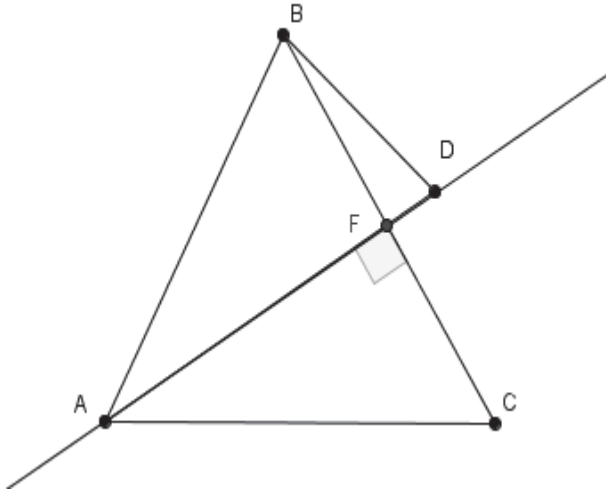
أولمبياد الأول

تمرين 1

x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعاً

بين أن : $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq x + y + z$

تمرين 2



نعتبر الشكل جانبه بحيث : $BA = BC$

و $BA = AD$ و $(AD) \perp (BC)$

احسب : $\hat{BAC} + \hat{ADB}$

تمرين 3

EFG مثلث متساوي الأضلاع والنقطة P داخله

ارتفاع المثلث EFG المار من E يقطع (FG) في النقطة D

بين أن : $PB + PC + PA = ED$

تمرين 4

x و y و z و w أعداد حقيقية موجبة قطعاً بحيث : $\frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{w}$

بين أن : $\sqrt{\frac{x^5 + y^2 z^2 + x^3 z^2}{y^4 z + w^4 + y^2 z w^2}} = \frac{x}{w}$

حل أولمبياد الأول

تمرين 1

لدينا : $(x-y)^2 \geq 0$

يعني : $x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$ يعني : $x^2 + y^2 \geq 2xy$ يعني : $\frac{x^2 + y^2}{y} \geq \frac{2xy}{y}$

إذن : $\frac{x^2}{y} + y \geq 2x$ (1)

وبنفس الطريقة نبين أن : $\frac{y^2}{z} + z \geq 2y$ (2)

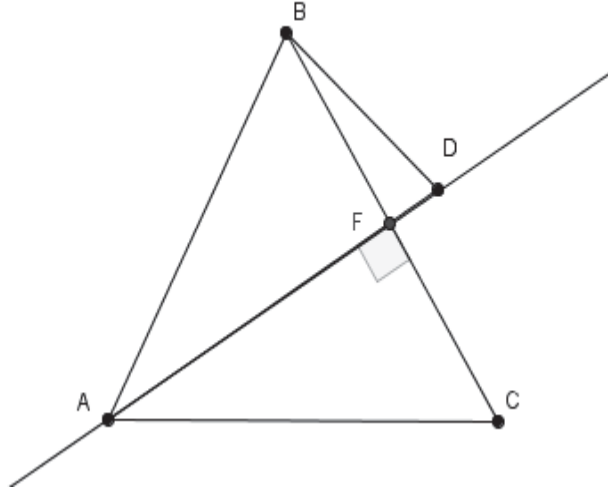
و $\frac{z^2}{x} + x \geq 2z$ (3)

نجمع المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف : $\frac{x^2}{y} + y + \frac{y^2}{z} + z + \frac{z^2}{x} + x \geq 2x + 2y + 2z$

أي : $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} + (x + y + z) - (x + y + z) \geq 2(x + y + z) - (x + y + z)$

وبالتالي : $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq x + y + z$

تمرين 2



لدينا : $BA = AD$ و $BA = BC$

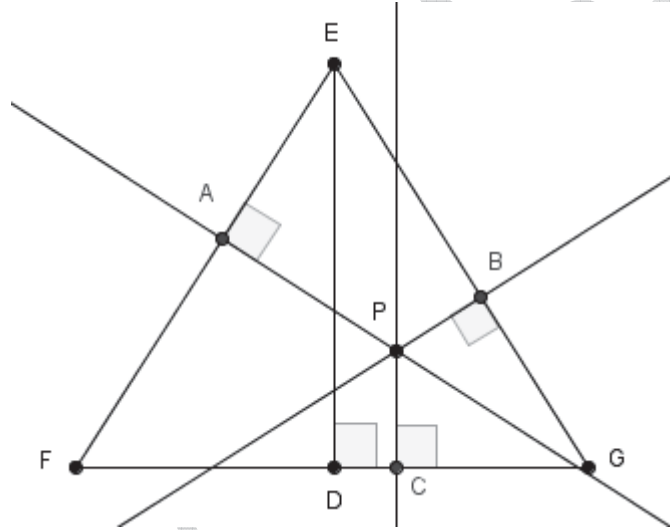
إذن المثلثان ABC و ABD متساويا الساقين في B و A على التوالي

ومنه $\hat{B}AC = \hat{B}CA$ و $\hat{A}BD = \hat{A}DB$

بما أن المثلثات BAF و AFC و BFD هي قائمة الزاوية كلها في F

فإن : $F\hat{B}D + B\hat{D}A = 90^\circ$ و $B\hat{A}F + A\hat{B}C = 90^\circ$ و $F\hat{A}C + A\hat{C}B = 90^\circ$
 نجمع المتساويات الثلاثة طرف بطرف : $F\hat{A}C + A\hat{C}B + B\hat{A}F + A\hat{B}C + F\hat{B}D + B\hat{D}A = 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ$
 أي : $(F\hat{A}C + B\hat{A}F) + A\hat{C}B + (A\hat{B}C + F\hat{B}D) + B\hat{D}A = 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ$
 نعلم أن : $A\hat{B}D = A\hat{B}C + F\hat{B}D$ و $B\hat{A}C = F\hat{A}C + B\hat{A}F$
 أي : $B\hat{A}C + A\hat{C}B + A\hat{B}D + B\hat{D}A = 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ$
 أي : $2B\hat{A}C + 2B\hat{D}A = 270^\circ$ لأن $B\hat{A}C = B\hat{C}A$ و $A\hat{B}D = A\hat{D}B$
 أي : $2(B\hat{A}C + B\hat{D}A) = 270^\circ$
 وبالتالي : $B\hat{A}C + B\hat{D}A = 135^\circ$

تمرين 3



نحسب مساحة المثلث EFG بطريقتين مختلفتين :

الطريقة الأولى : $(1) \quad S_{EFG} = \frac{ED \times FG}{2}$

الطريقة الثانية :

لدينا :

$$\begin{aligned} S_{EFG} &= S_{PEG} + S_{PFG} + S_{PEF} \\ &= \frac{PB \times EG}{2} + \frac{PC \times FG}{2} + \frac{PA \times EF}{2} \\ &= \frac{PB \times EG + PC \times FG + PA \times EF}{2} \end{aligned}$$

نعلم أن $FG = EG = EF$

إذن : $S_{EFG} = \frac{PB \times FG + PC \times FG + PA \times FG}{2}$

ومنه : $(2) \quad S_{EFG} = \frac{FG(PB + PC + PA)}{2}$

من 1 و 2 نستنتج أن : $\frac{FG(PB + PC + PA)}{2} = \frac{ED \times FG}{2}$

أي : $\frac{2}{FG} \times \frac{FG(PB + PC + PA)}{2} = \frac{2}{FG} \times \frac{ED \times FG}{2}$

وبالتالي : $PB + PC + PA = ED$

تمرين 4

نضع : $\frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{w} = k$

يعني : $x = yk$ و $y = zk$ و $z = kw$

يعني : $x = yk$ و $y = (kw)k$ و $z = kw$

إذن : $x = (wk^2)k = k^3w$ و $y = wk^2$ و $z = kw$

لنبين أن : $\sqrt{\frac{x^5 + y^2z^2 + x^3z^2}{y^4z + w^4 + y^2zw^2}} - \frac{x}{w} = 0$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{x^5 + y^2z^2 + x^3z^2}{y^4z + w^4 + y^2zw^2}} - \frac{x}{w} &= \sqrt{\frac{(k^3w)^5 + (wk^2)^2(kw)^2 + (k^3w)^3(kw)^2}{(wk^2)^4(kw) + w^4 + (wk^2)^2(kw)w^2}} - \frac{wk^3}{w} \\ &= \sqrt{\frac{k^{15}w^5 + k^4w^2k^2w^2 + k^9w^3k^2w^2}{k^8w^4kw + w^4 + k^4w^2kw^2}} - k^3 \\ &= \sqrt{\frac{k^{15}w^5 + k^6w^4 + k^{11}w^5}{k^9w^5 + w^4 + k^5w^5}} - k^3 \\ &= \sqrt{\frac{k^6w^4(\cancel{k^9w} + 1 + k^5w)}{w^4(\cancel{k^9w} + 1 + k^5w)}} - k^3 \\ &= \sqrt{k^6} - k^3 = \sqrt{(k^3)^2} - k^3 = k^3 - k^3 = 0 \end{aligned}$$

وبالتالي : $\sqrt{\frac{x^5 + y^2z^2 + x^3z^2}{y^4z + w^4 + y^2zw^2}} = \frac{x}{w}$