أولمبياد الرابع

تمرين 1 x و y عددان حقيقيان موجبان قطعا بين أن $\frac{x}{x^4+y^2}+\frac{y}{y^4+x^2}\leq\frac{1}{xy}$
تمرين 2 ABC مثلث والنقط D و E و F هي على التوالي منتصفات القطع $[BC]$ و $[AC]$ و $[AB]$ بين أن : $\frac{AB+AC+BC}{2}<AD+CE+BF<AB+AC+BC$
تمرين 3 EFG مثلث قائم الزاوية في E بين أن : $EF^4+EG^4<FG^4$
تمرين 4 بين ان : $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{2012}{2013}\times\frac{2014}{2015}<\frac{1}{\sqrt{2016}}$

حل أولمبياد الرابع

تمرين 1

لدينا : $\left(x^2+y\right)^2 \geq 0$

أي : $x^4-2x^2y+y^2 \geq 0$ أي : $x^4+y^2 \geq 2x^2y$ أي : $\dfrac{1}{x^4+y^2} \leq \dfrac{1}{2x^2y}$ أي : $\dfrac{x}{x^4+y^2} \leq \dfrac{x}{2x^2y}$

إذن : $\dfrac{x}{x^4+y^2} \leq \dfrac{1}{2xy}$ (1)

بنفس الطريقة نبين أن : $\dfrac{y}{y^4+x^2} \leq \dfrac{1}{2yx}$ (2)

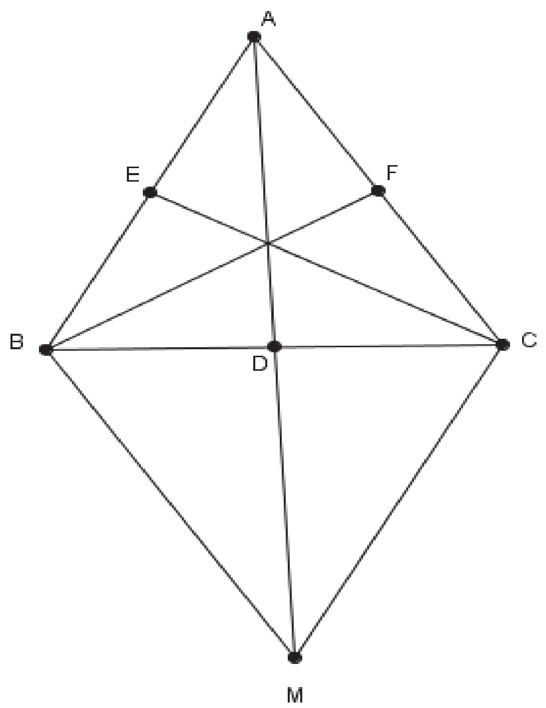
نجمع المتفاوتات 1 و 2 طرف بطرف : $\dfrac{x}{x^4+y^2}+\dfrac{y}{y^4+x^2} \leq \dfrac{1}{2xy}+\dfrac{1}{2yx}$

ومنه : $\dfrac{x}{x^4+y^2}+\dfrac{y}{y^4+x^2} \leq \dfrac{\cancel{2}}{\cancel{2}xy}$

وبالتالي : $\dfrac{x}{x^4+y^2}+\dfrac{y}{y^4+x^2} \leq \dfrac{1}{xy}$

تمرين 2

لتكن M مماثلة A بالنسبة للنقطة D



لدينا D منتصف $[BC]$

إذن C هي مماثلة B بالنسبة للنقطة D

بما أن C و M هما مماثلتي A و B على التوالي بالنسبة للنقطة D

فإن : $AB = CM$ (1)

في المثلث ACM لدينا : $AM < AC + CM$ (2)

من 1 و 2 نستنتج أن : $AM < AC + AB$

نعلم أن $AM = 2AD$ (لأن M مماثلة A بالنسبة للنقطة D يعني D منتصف $[AM]$)

أي $2AD < AC + AB$ (3)

في المثلثان ADC و ADB لدينا : $AC < AD + DC$ (4)

و $AB < AD + DB$ (5)

نجمع المتفاوتتين 4 و 5 طرف بطرف : $AC + AB < AD + DC + AD + DB$

نعلم أن : $BC = BD + DC$

أي : $AC + AB < 2AD + BC$

إذن : $AC + AB - BC < 2AD$ (6)

من 3 و 6 نستمنج أن : $AC + AB - BC < 2AD < AC + AB$ (7)

بنفس الطريقة نبين أن : $AC + BC - AB < 2CE < AC + BC$ (8)

و $AB + BC - AC < 2BF < AB + BC$ (9)

نجمع المتفاوتات 7 و 8 و 9 طرف بطرف :

$$AC + AB - BC + AC + BC - AB + AB + BC - AC < 2AD + 2CE + 2BF < AC + AB + AC + BC + AB + BC$$

أي :

$$AC + \cancel{AB} - \cancel{BC} + \cancel{AC} + \cancel{BC} - \cancel{AB} + AB + BC - \cancel{AC} < 2(AD + CE + BF) < 2AC + 2AB + 2BC$$

أي : $\frac{1}{2}\times(AB + AC + BC) < \frac{1}{\cancel{2}}\times\cancel{2}(AD + CE + BF) < \frac{1}{\cancel{2}}\times\cancel{2}(AC + AB + BC)$

وبالتالي : $\frac{AB + AC + BC}{2} < AD + CE + BF < AB + AC + BC$

تمرين 3

لدينا EFG مثلث قائم الزاوية في E

إذن : $EF^2+EG^2=FG^2$

لنحدد إشارة الفرق $\left(EF^4+EG^4\right)-FG^4$:

$$FG^4-EF^4-EG^4=\left(FG^2\right)^2-EF^4-EG^4=\left(EF^2+EG^2\right)^2-EF^4-EG^4$$
$$=\left(EF^2\right)^2+2EF^2\times EG^2+\left(EG^2\right)^2-EF^4-EG^4$$
$$=\cancel{EF^4}+2EF^2\times EG^2+\cancel{EG^4}-\cancel{EF^4}-\cancel{EG^4}$$
$$=2EF^2\times EG^2>0$$

وبالتالي : $EF^4+EG^4<FG^4$

تمرين 4

نضع : $X=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{2012}{2013}\times\frac{2014}{2015}$ و $Y=\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\ldots\times\frac{2013}{2014}\times\frac{2015}{2016}$

لدينا :

$$\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$$
$$\frac{3}{4}<\frac{4}{5}$$
$$\vdots$$
$$\frac{2012}{2013}<\frac{2013}{2014}$$
$$\frac{2014}{2015}<\frac{2015}{2016}$$

يعني : $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{2012}{2013}\times\frac{2014}{2015}<\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\ldots\times\frac{2013}{2014}\times\frac{2015}{2016}$

يعني : $X<Y$

يعني : $X^2<XY$

يعني : $\sqrt{X^2}=X<\sqrt{XY}$

لنحسب $\sqrt{XY}$:

لدينا : $XY=\frac{1}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\times\frac{\cancel{4}}{\cancel{5}}\times\frac{\cancel{5}}{\cancel{6}}\times\frac{\cancel{6}}{\cancel{7}}\times\ldots\times\frac{\cancel{2012}}{\cancel{2013}}\times\frac{\cancel{2013}}{\cancel{2014}}\times\frac{\cancel{2014}}{\cancel{2015}}\times\frac{\cancel{2015}}{2016}=\frac{1}{2016}$

إذن : $\sqrt{XY}=\sqrt{\frac{1}{2016}}=\frac{1}{\sqrt{2016}}$

وبالتالي : $X=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{2012}{2013}\times\frac{2014}{2015}<\sqrt{XY}=\frac{1}{\sqrt{2016}}$