

أولمبياد الثالث

تمرين 1

x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعاً

$$\text{بين أن } \frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x} \geq x + y + z$$

تمرين 2

AHB مثلث بحيث : $\hat{ABH} = 120^\circ$

و (BC) هو منتصف الزاوية $\hat{ABH}$ ($C \in [HA]$)

المستقيم المار من H والموازي للمستقيم (CB) يقطع المستقيم (AB) في النقطة D .

$$\text{بين أن : } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$$

تمرين 3

x و y و z أعداد حقيقية غير منعدمة بحيث : $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$$\text{بين أن : } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$$

تمرين 4

ABC مثلث و النقطة D منتصف $[BC]$

و (AE) الارتفاع الموافق للضلع $[BC]$ ($E \in (BC)$)

و النقطتان F و G هما المسقطان العموديان على التوالي للنقطتين B و C على (AD)

$$\text{بين أن } CG = BF$$

حل أولمبياد الثالث

تمرين 1

لتكن a و b و c أعداد حقيقية موجبة قطعا بحيث: $a = xy$ و $b = yz$ و $c = xz$

لدينا : $(a-b)^2 \geq 0$ و $(b-c)^2 \geq 0$ و $(c-a)^2 \geq 0$

أي : $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$ أي : $a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ac + a^2 \geq 0$

أي : $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac \geq 0$ أي : $2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ac)$

أي : $\frac{1}{2\sqrt{abc}} \times 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq \frac{1}{2\sqrt{abc}} \times 2(ab + bc + ac)$

أي : $\frac{a^2}{\sqrt{abc}} + \frac{b^2}{\sqrt{abc}} + \frac{c^2}{\sqrt{abc}} \geq \frac{ab}{\sqrt{abc}} + \frac{bc}{\sqrt{abc}} + \frac{ac}{\sqrt{abc}}$

أي : $\frac{a^2}{\sqrt{abc}} + \frac{b^2}{\sqrt{abc}} + \frac{c^2}{\sqrt{abc}} \geq \frac{\sqrt{a^2b^2}}{\sqrt{abc}} + \frac{\sqrt{b^2c^2}}{\sqrt{abc}} + \frac{\sqrt{a^2c^2}}{\sqrt{abc}}$

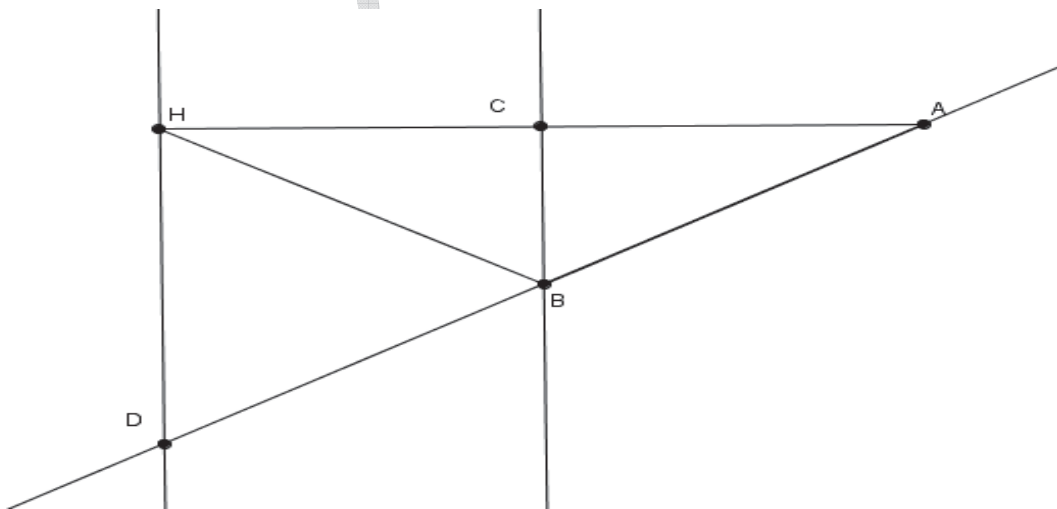
أي : $\frac{a^2}{\sqrt{abc}} + \frac{b^2}{\sqrt{abc}} + \frac{c^2}{\sqrt{abc}} \geq \sqrt{\frac{ab}{c}} + \sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{ac}{b}}$

أي : $\frac{x^2y^2}{\sqrt{x^2y^2z^2}} + \frac{y^2z^2}{\sqrt{x^2y^2z^2}} + \frac{x^2z^2}{\sqrt{x^2y^2z^2}} \geq \sqrt{\frac{xy^2z}{xz}} + \sqrt{\frac{yz^2x}{xy}} + \sqrt{\frac{x^2yz}{yz}}$

أي : $\frac{x^2y^2}{xyz} + \frac{y^2z^2}{xyz} + \frac{x^2z^2}{xyz} \geq \sqrt{y^2} + \sqrt{z^2} + \sqrt{x^2}$

وبالتالي : $\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} \geq y + z + x$

تمرين 2



بما أن (BC) هو منصف الزاوية $A\hat{B}H$

$$\text{فإن : } \hat{ABC} = \hat{HBC} = \frac{\hat{ABH}}{2} = \frac{120}{2} = 60$$

$$\text{ولدينا } \hat{DBA} = \hat{HBD} + \hat{ABH}$$

$$\text{إذن : } (1) \quad \hat{HBD} = \hat{DBA} - \hat{ABH} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

بما أن المستقيمان (CB) و (HD) متوازيان و (HB) قاطع لهما

$$\text{فإن : } (2) \quad \hat{BHD} = \hat{HBC} = 60^\circ$$

$$\text{ولدينا : } \hat{HDB} + \hat{DHB} + \hat{HBD} = 180$$

$$\text{أي } \hat{HDB} = 180 - (\hat{DHB} + \hat{HBD})$$

$$\text{ومنه } (3) \quad \hat{HDB} = 180^\circ - (60^\circ + 60^\circ) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

من 1 و 2 و 3 نستنتج أن المثلث HDB متساوي الأضلاع

$$\text{ومنه } HD = HB = DB$$

لدينا (HD) // (CB)

$$\text{حسب مبرهنة طاليس المباشرة إذن : } \frac{AH}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{DH}{CB}$$

$$\text{أي : } \frac{AD}{AB} = \frac{DH}{CB}$$

$$\text{أي : } \frac{AB + BD}{AB} = \frac{BH}{CB} \quad (AD = AB + BD \text{ و } HD = HB = DB)$$

$$\text{أي : } \frac{AB + BH}{AB \times BH} = \frac{1}{CB}$$

$$\text{أي : } \frac{\frac{AB}{AB \times BH} + \frac{BH}{AB \times BH}}{1} = \frac{1}{CB}$$

$$\text{وبالتالي : } \frac{1}{BH} + \frac{1}{AB} = \frac{1}{CB}$$

تمرين 3

$$\text{لدينا : } (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\text{أي : } (x + y)^2 + 2(x + y)z + z^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

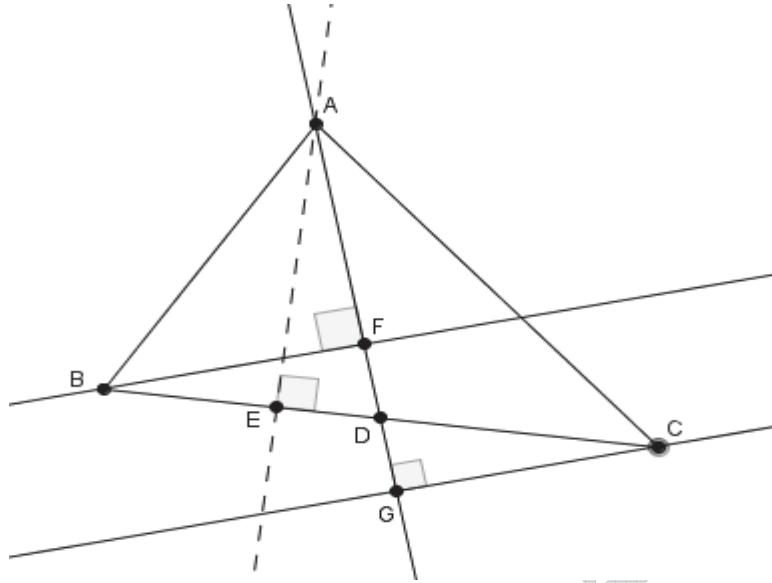
$$\text{أي : } x^2 + 2xy + y^2 + 2(x + y)z + z^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\text{أي : } 2(xy + xz + yz) = 0 \quad \text{أي } 2xy + 2(x + y)z = 0$$

$$\text{أي : } \frac{xy}{xyz} + \frac{xz}{xyz} + \frac{yz}{xyz} = 0 \quad \text{أي } \frac{1}{xyz} \times (xy + xz + yz) = 0 \times \frac{1}{2xyz}$$

وبالتالي : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$

تمرين 4



نحسب مساحة المثلثين ABD و ACD بطريقتين مختلفتين

الطريقة الأولى :

لدينا : $S_{ABD} = \frac{AE \times BD}{2}$ و $S_{ACD} = \frac{AE \times CD}{2}$

(S_{ABD} هي مساحة المثلث ABD و S_{ACD} هي مساحة المثلث ACD)

نعلم أن $BD = CD$

إذن $S_{ABD} = S_{ACD}$

الطريقة الثانية :

لدينا : $S_{ABD} = \frac{AD \times BF}{2}$ و $S_{ACD} = \frac{AD \times CG}{2}$

بما أن $S_{ABD} = S_{ACD}$

فإن : $\frac{AD \times BF}{2} = \frac{AD \times CG}{2}$

يعني : $\frac{\cancel{AD}}{\cancel{AD}} \times \frac{\cancel{AD} \times BF}{\cancel{AD}} = \frac{\cancel{AD}}{\cancel{AD}} \times \frac{\cancel{AD} \times CG}{\cancel{AD}}$

وبالتالي : $BF = CG$