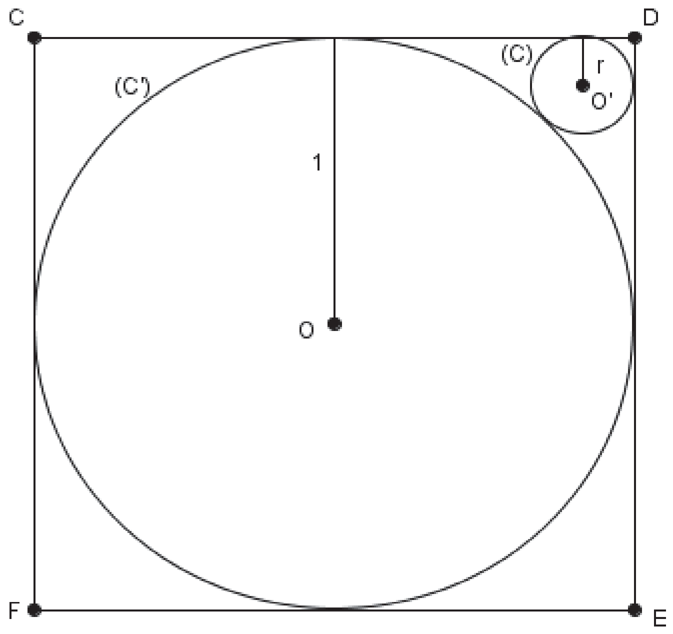
أولمبياد الثاني والعشرون

<u>تمرين 1</u>

x عدد حقيقي بحيث : $x>1$ و $x=\dfrac{\sqrt{2}x^2+\sqrt{2}}{20}$

بين أن : $14x+1=x^2$

<u>تمرين 2</u>



نعتبر الشكل جانبه بحيث :

$CDEF$ مربع طول ضلعه يساوي $2cm$

(C') دائرة مركزها O شعاعها $1cm$

(C) دائرة مركزها O' شعاعها r

بين أن $r=3-2\sqrt{2}$

<u>تمرين 3</u>

x و y و z أعداد حقيقية بحيث : $x+y+z\neq 0$ و $\dfrac{x^2}{y+z}+\dfrac{y^2}{x+z}+\dfrac{z^2}{x+y}=0$

بين أن : $\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{x+z}+\dfrac{z}{x+y}=1$

<u>تمرين 4</u>

EFG مثلث قائم الزاوية في E

بين أن : $EF^3+EG^3<FG^3$

حل أولمبياد الثاني والعشرون

تمرين 1

لدينا : $x=\dfrac{\sqrt{2}x^2+\sqrt{2}}{20}$ يعني : $x^2=\left(\dfrac{\sqrt{2}x^2+\sqrt{2}}{20}\right)^2$ يعني : $x^2=\dfrac{\left(\sqrt{2}x^2+\sqrt{2}\right)^2}{20^2}$

يعني : $x^2=\dfrac{2x^4+4x^2+2}{400}$ يعني : $x^2=\dfrac{\cancel{2}\left(x^4+2x^2+1\right)}{\cancel{2}\times 200}$ يعني : $200x^2=x^4+2x^2+1$

يعني : $196x^2+4x^2=x^4+2x^2+1$ يعني : $196x^2=x^4-2x^2+1$

يعني : $(14x)^2=\left(x^2-1\right)^2$ يعني : $14x=x^2-1$

وبالتالي : $14x+1=x^2$

تمرين 2

لدينا : $\dfrac{x^2}{y+z}+\dfrac{y^2}{x+z}+\dfrac{z^2}{x+y}=0$

يعني : $\dfrac{x^2}{y+z}+\dfrac{y^2}{x+z}+\dfrac{z^2}{x+y}+(x+y+z)=0+(x+y+z)$

يعني : $\left(\dfrac{x^2}{y+z}+x\right)+\left(\dfrac{y^2}{x+z}+y\right)+\left(\dfrac{z^2}{x+y}+z\right)=(x+y+z)$

يعني : $\dfrac{x^2+x(y+z)}{y+z}+\dfrac{y^2+y(x+z)}{x+z}+\dfrac{z^2+z(x+y)}{x+yz}=(x+y+z)$

يعني : $\dfrac{x(x+y+z)}{y+z}+\dfrac{y(x+y+z)}{x+z}+\dfrac{z(x+y+z)}{x+y}=(x+y+z)$

يعني : $(x+y+z)\left(\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{x+z}+\dfrac{z}{x+y}\right)=(x+y+z)$

يعني : $\dfrac{1}{\cancel{x+y+z}}\times\left(\cancel{x+y+z}\right)\left(\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{x+z}+\dfrac{z}{x+y}\right)=\dfrac{1}{\cancel{x+y+z}}\times\left(\cancel{x+y+z}\right)$

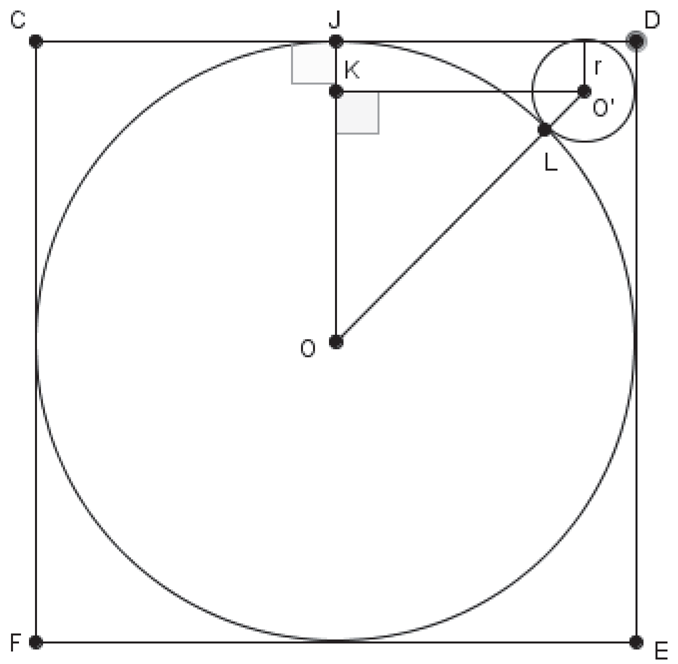
وبالتالي : $\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{x+z}+\dfrac{z}{x+y}=1$

تمرين 3

لدينا : $OO'=OL+LO'$

و $OK=OJ-KJ$ و $KO'=JD-r$

إذن : $OO'=1+r$ و $OK=1-r$



و $KO' = 1 - r$

لدينا المثلث OKO' قائم الزاوية في K

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن :

$$OO'^2 = \mathrm{OK}^2 + \mathrm{O'K}^2$$

أي : $(1+r)^2 = (1-r)^2 + (1-r)^2$

أي : $(1+r)^2 = 2(1-r)^2$

أي : $1+r = \sqrt{2(1-r)^2}$

أي : $1+r = \sqrt{2}(1-r)$ أي :

$r + \sqrt{2}r = \sqrt{2} - 1$ أي : $r(1+\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$

اي :

$$r = \frac{\sqrt{2}-1}{1+\sqrt{2}} \times \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{-(\sqrt{2}-1)^2}{1-2} = (\sqrt{2}-1)^2$$

وبالتالي : $\boxed{r = 2 - 2\sqrt{2} + 1 = 3 - 2\sqrt{2}}$

تمرين 4

لدينا EFG مثلث قائم الزاوية في E

إذن : $EF^2 + EG^2 = FG^2$

لنبين أن : $EF^3 + EG^3 - FG^3 < 0$

$$\begin{aligned} EF^3 + EG^3 - FG^3 &= EF^2 \times EF + EG^2 \times EG - FG^2 \times FG \\ &= EF^2 \times EF + EG^2 \times EG - (EF^2 + EG^2) \times FG \\ &= EF^2 \times EF + EG^2 \times EG - EF^2 \times FG - EG^2 \times FG \\ &= EF^2 \times (EF - FG) + EG^2 \times (EG - FG) < 0 \end{aligned}$$

(لأن $EF < FG$ و $EG < FG$)

وبالتالي : $EF^3 + EG^3 < FG^3$