أولمبياد السابع عشر

تمرين 1

x و y عددان صحيحان طبيعيان متتابعان ($y > x$)

بين أن : $x^2 + y^2 + (xy)^2 = (x^2 + y)^2$

تمرين 2

x و y عددان حقيقيان بحيث : $x > 1$ و $y > 1$

بين أن : $y \quad x-1+x \quad y-1 \le xy$

تمرين 3

نعتبر النقطتين A و O من المستوى

A ● ● O

أنشئ النقطة H مماثلة A بالنسبة للنقطة O و النقطة F مماثلة O بالنسبة للنقطة A

بواسطة البركار فقط (تبرير الإنشاء)

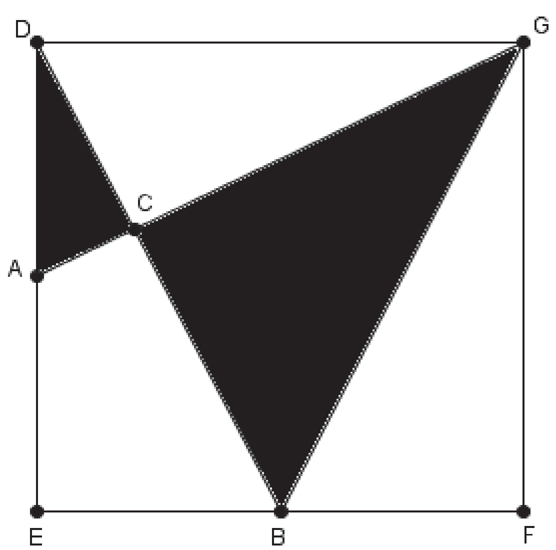
تمرين 4

$DGFE$ مربع بحيث : $DG = 8cm$

النقطتان A و B هما على التوالي

منتصفا $[DE]$ و $[EF]$

احسب مساحة المنطقة المظللة



حل أولمبياد السابع عشر

تمرين 1

بما أن x و y عددان صحيحان طبيعيان متتابعان و $y>x$

فإن $y=x+1$

لدينا :

$$\begin{aligned} x^2+y^2+(xy)^2 &= x^2+y^2+\left(x(x+1)\right)^2 = x^2+y^2+x^2(x+1)^2 \\ &= x^2+y^2+x^2\left(x^2+2x+1\right) \\ &= x^2+y^2+x^4+2x^3+x^2 \\ &= x^4+y^2+2x^2+2x^3 \\ &= x^4+y^2+2x^2(1+x) \\ &= \left(x^2\right)^2+y^2+2x^2y \end{aligned}$$

نعلم أن : $\left(x^2+y\right)^2=\left(x^2\right)^2+y^2+2x^2y$

وبالتالي : $x^2+y^2+(xy)^2=\left(x^2+y\right)^2$

تمرين 2

بما أن $x>1$ فإن $x-1>0$

لدينا : $\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2\geq 0$

يعني : $\left(\sqrt{x-1}\right)^2-2\sqrt{x-1}+1\geq 0$ يعني : $x-\cancel{1}-2\sqrt{x-1}+\cancel{1}\geq 0$

يعني : $-2\sqrt{x-1}\geq -x$ يعني : $\frac{-1}{\cancel{2}}\times\left(-\cancel{2}\sqrt{x-1}\right)\leq\frac{-1}{2}\times(-x)$ يعني : $\sqrt{x-1}\leq\frac{x}{2}$

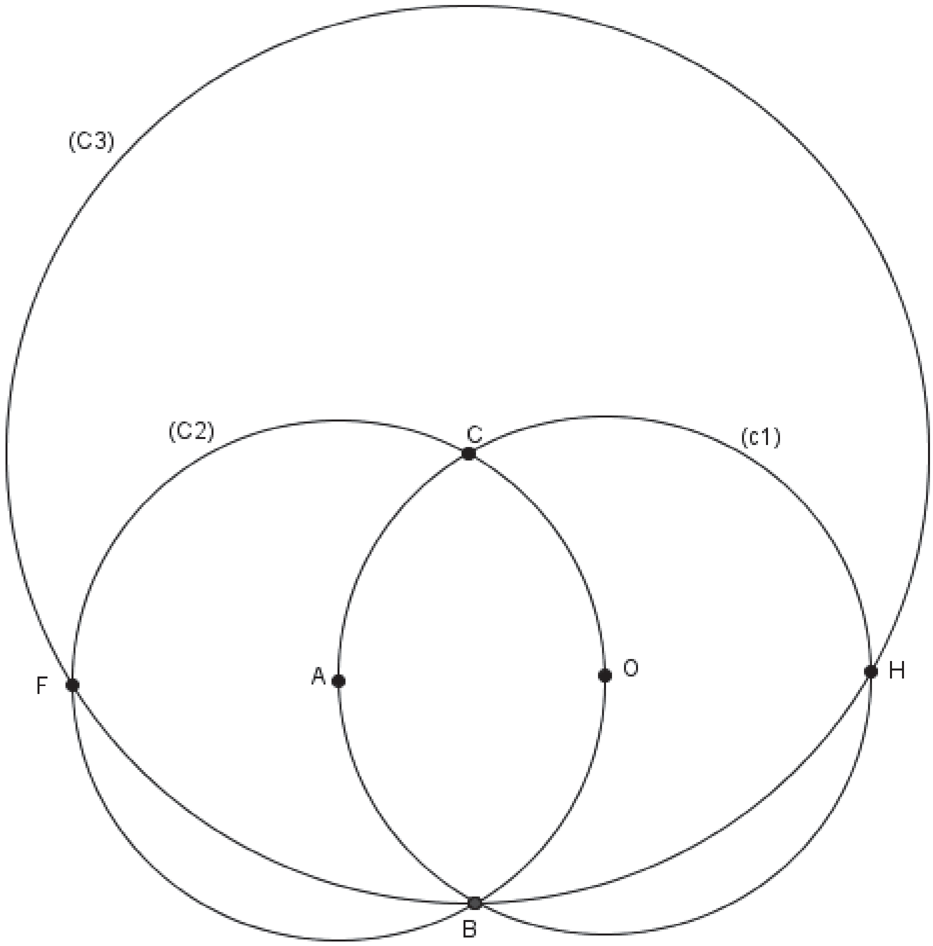
إذن : $y\sqrt{x-1}\leq\frac{xy}{2}$ (1) $(y>1)$

وبنفس الطريقة نبين أن : $x\sqrt{y-1}\leq\frac{xy}{2}$ (2)

نجمع طرفي المتساويتان 1 و 2 طرف بطرف : $y\sqrt{x-1}+x\sqrt{y-1}\leq\frac{\cancel{2}xy}{\cancel{2}}$

وبالتالي : $y\sqrt{x-1}+x\sqrt{y-1}\leq xy$

تمرين 3



– نرسم الدائرة (C_1) التي مركزها O وشعاعها OA

– نرسم الدائرة (C_2) التي مركزها A وشعاعها OA

– الدائرتان (C_1) و (C_2) تتقاطعان في النقطتين C و B

– نرسم الدائرة (C_3) التي مركزها C وشعاعها CB

– الدائرة (C_3) تتقاطع مع (C_1) و (C_2) على التوالي في النقطيتين H و F

وبالتالي النقطة H هي مماثلة A بالنسبة للنقطة O

و النقطة F هي مماثلة O بالنسبة للنقطة A

تمرين 4

حساب S_{ADC} مساحة المثلث ADC :

لدينا: $\begin{cases} DG = DE \\ AD = EB \\ A\hat{D}G = D\hat{E}B \end{cases}$ إذن المثلثان DGA و DEB متقايسان

أي $D\hat{A}G = D\hat{B}E$

بما أن $\begin{cases} D\hat{A}G = D\hat{A}C = D\hat{B}E \\ A\hat{D}C = E\hat{D}B \end{cases}$ فإن المثلثان DAC و DEB متشابهان

ومنه $D\hat{C}A = D\hat{E}B = 90^\circ$ المثلث DAC قائم الزاوية في C إذن $(DC)\perp(AG)$

باستعمال العلاقات المترية في المثلث DGA القائم الزاوية :

$DA^2 = AC\times AG$ و $DC\times AG = DA\times DG$

أي : $AC = \dfrac{DA^2}{AG}$ و $DC = \dfrac{DA\times DG}{AG}$

لدينا $S_{ADC} = \dfrac{DC\times AC}{2}$ يعني : $S_{ADC} = \dfrac{\dfrac{DA\times DG}{AG}\times\dfrac{DA^2}{AG}}{2}$ يعني : $S_{ADC} = \dfrac{DA^3\times DG}{2AG^2}$

بما أن المثلث ADG قائم الزاوية في D فإن $AG^2 = AD^2 + DG^2$

أي : $S_{ADC} = \dfrac{DA^3\times DG}{2\left(AD^2+DG^2\right)}$ أي : $S_{ADC} = \dfrac{4^3\times 8}{2\left(4^2+8^2\right)}$ أي : $S_{ADC} = \dfrac{64\times 4}{2(16+64)}$

يعني : $S_{ADC} = \dfrac{512}{160} = 3.2$

حساب S_{BCG} مساحة المثلث BCG :

لدينا : $S_{DAG} = S_{DAC} + S_{DCG}$ و $S_{DBG} = S_{BCG} + S_{DCG}$

نطرح المتساويتان طرف بطرف : $S_{DAG} - S_{DBG} = S_{DAC} + \cancel{S_{DCG}} - S_{BCG} - \cancel{S_{DCG}}$

أي : $S_{DAG} - S_{DBG} = S_{DAC} - S_{BCG}$ أي : $S_{BCG} = S_{DAC} + S_{DBG} - S_{DAG}$

أي : $S_{BCG} = 5 + \dfrac{DE\times DG}{2} - \dfrac{DA\times DG}{2}$ أي : $S_{BCG} = 5 + \dfrac{8\times 8}{2} - \dfrac{4\times 8}{2}$

أي : $S_{BCG} = 5+32-16$ إذن : $S_{BCG} = 21$

<u>حساب مساحة المنطقة المظللة :</u>

مساحة المنطقة المظللة = مساحة المثلث ADC + مساحة المثلث BCG

$S_{ADC} + S_{BCG} = 3.2 + 21 = 24.2$