

أولمبياد الخامس والعشرون

تمرين 1

x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعاً

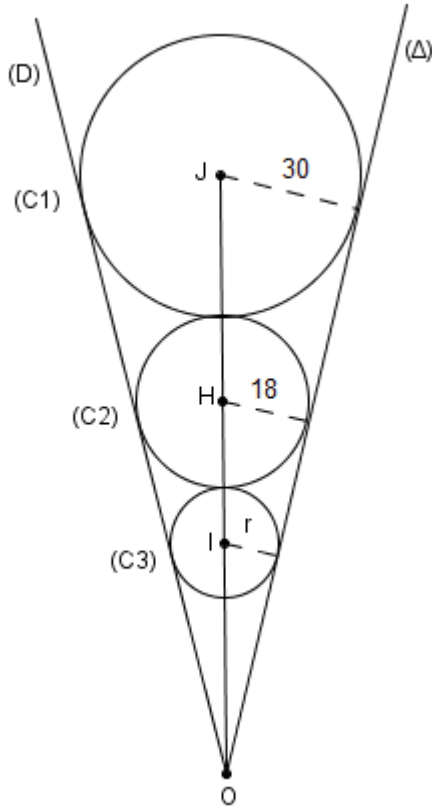
بين أن : $(x+y)(x+z)(y+z) \geq 8xyz$

تمرين 2

نعطي : $1^3 + 2^3 + \dots + 14^3 + 15^3 = 14400$

أحسب $2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + 28^3 + 30^3$

تمرين 3



المستقيمان (D) و (Δ) يتقاطعان في النقطة O

ومماسان للدوائر $C_1(J, 30)$ و $C_2(H, 18)$ و $C_3(I, r)$

والدائرتان C_1 و C_2 متماستان

والدائرتان C_2 و C_3 متماستان

احسب r شعاع الدائرة C_3

تمرين 4

بين أن : $\sqrt{\frac{2016 \times 2015 \times 2014 \times 2013 + 1}{4}} = \frac{4058209}{2}$

حل أولمبياد الخامس والعشرون

تمرين 1

لدينا : $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = (\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 - 2\sqrt{x} \times \sqrt{y} \geq 0$

إذن : $x + y - 2\sqrt{xy} \geq 0$

ومنه : $(1) \quad x + y \geq 2\sqrt{xy}$

بنفس الطريقة نبين أن : $(2) \quad x + z \geq 2\sqrt{xz}$

و $(3) \quad y + z \geq 2\sqrt{yz}$

نضرب المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف :

$$(x + y)(x + z)(y + z) \geq 2\sqrt{xy} \times 2\sqrt{xz} \times 2\sqrt{yz}$$

أي : $(x + y)(x + z)(y + z) \geq 8(\sqrt{x})^2 \times (\sqrt{z})^2 \times (\sqrt{y})^2$

وبالتالي : $(x + y)(x + z)(y + z) \geq 8xyz$

تمرين 2

لدينا :

$$2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + 28^3 + 30^3$$

$$2^3 = (2 \times 1)^3 = 2^3 \times 1^3$$

$$4^3 = (2 \times 2)^3 = 2^3 \times 2^3$$

$$6^3 = (2 \times 3)^3 = 2^3 \times 3^3$$

⋮

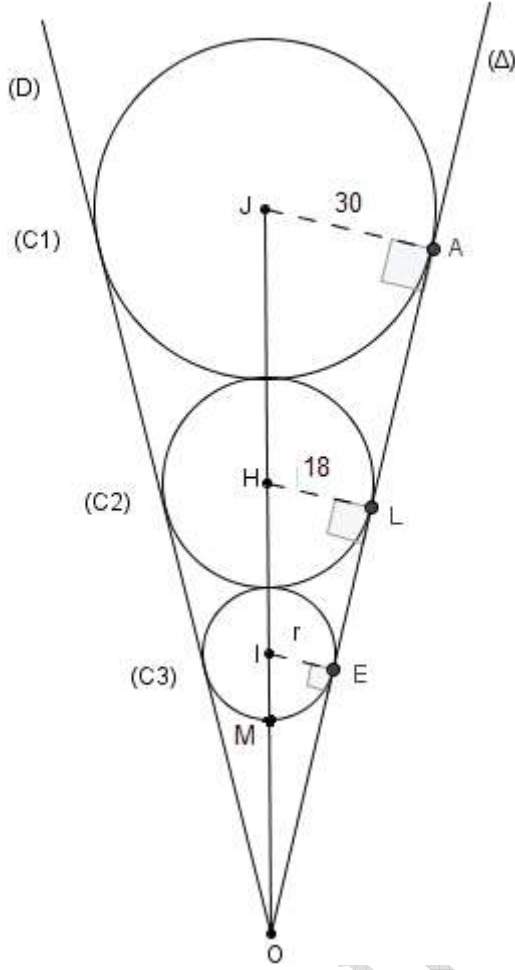
$$28^3 = (14 \times 2)^3 = 14^3 \times 2^3$$

$$30^3 = (15 \times 2)^3 = 15^3 \times 2^3$$

إذن :

$$\begin{aligned} 2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + 28^3 + 30^3 &= 2^3 \times 1^3 + 2^3 \times 2^3 + 2^3 \times 3^3 + \dots + 14^3 \times 2^3 + 15^3 \times 2^3 \\ &= 2^3 (1^3 + 2^3 + \dots + 14^3 + 15^3) \\ &= 8 \times 14400 \end{aligned}$$

تمرين 3



لدينا المستقيمان (D) و (Δ) مماسان للدوائر

(C₁) و (C₂) و (C₃) على التوالي في A و L و E

يعني : (JA) ⊥ (Δ) و (HL) ⊥ (Δ) و (IE) ⊥ (Δ)

يعني : sin IÔE = sin HÔL = sin JÔA

يعني : $\frac{IE}{OI} = \frac{HL}{OH} = \frac{JA}{OJ}$

يعني :

$$\frac{r}{OM+r} = \frac{18}{OM+2r+18} = \frac{30}{OM+2r+2 \times 18+30}$$

$$\text{إذن : } \frac{r}{OM+r} = \frac{18}{OM+2r+18} = \frac{30}{OM+2r+66}$$

$$\text{حسب النتيجة 1 لدينا : } \frac{r}{OM+r} = \frac{18}{OM+2r+18}$$

$$\text{يعني : } r \times OM + 2r^2 + 18r = 18 \times OM + 18r$$

$$\text{يعني : } 2r^2 = 18 \times OM - r \times OM$$

$$\text{يعني : } 2r^2 = OM(18-r)$$

$$\text{إذن : } OM = \frac{2r^2}{18-r} \quad (1)$$

$$\text{حسب النتيجة 1 لدينا : } \frac{18}{OM+2r+18} = \frac{30}{OM+2r+66}$$

$$\text{يعني : } 18 \times OM + 36r + 1188 = 30 \times OM + 60r + 540$$

$$\text{يعني : } 30 \times OM - 18 \times OM + 60r - 36r = 1188 - 540$$

$$\text{إذن : } 12 \times OM + 24r = 648 \quad (2)$$

$$\text{من 1 و 2 نستنتج أن : } 12 \times \left(\frac{2r^2}{18-r} \right) + 24r = 648$$

$$\text{أي : } \frac{24r^2 + 432r - 24r^2}{18-r} = 648$$

$$\text{أي : } 432r = 11664 - 648r$$

$$\text{أي : } 1080r = 11664$$

وبالتالي : $r = \frac{11664}{1080} = 10,8$

تمرين 4

نضع : $x = 2013$

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{2016 \times 2015 \times 2014 \times 2013 + 1}{4}} &= \sqrt{\frac{(x+3) \times (x+2) \times (x+1) \times x + 1}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{x \times (x+3) \times (x+2) \times (x+1) + 1}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{(x^2 + 3x) \times (x^2 + 3x + 2) + 1}{4}}\end{aligned}$$

نضع : $t = x^2 + 3x$

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{2016 \times 2015 \times 2014 \times 2013 + 1}{4}} &= \sqrt{\frac{(x^2 + 3x) \times (x^2 + 3x + 2) + 1}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{t \times (t+2) + 1}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{t^2 + 2t + 1}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{(t+1)^2}{4}} \\ &= \frac{t+1}{2} \\ &= \frac{x^2 + 3x + 1}{2} \\ &= \frac{2013^2 + 3 \times 2013 + 1}{2} \\ &= \frac{4052169 + 6039 + 1}{2} = \frac{4058209}{2}\end{aligned}$$