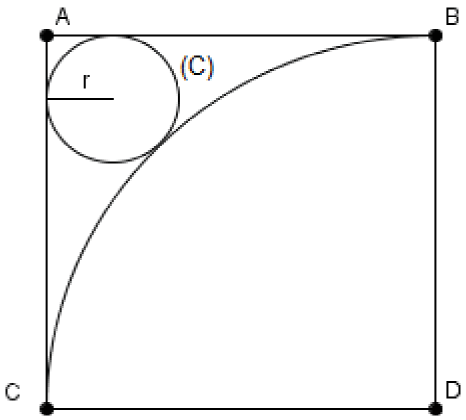
أولمبياد السادس عشر

تمرين 1

x و y و z أعداد حقيقية موجبة غير منعدمة بحيث : $x+y+z=1$

بين أن : $\frac{x(1-x)}{yz}+\frac{y(1-y)}{xz}+\frac{z(1-z)}{xy}\geq 6$

تمرين 2



نعتبر الشكل جانبه بحيث :

$ABDC$ مربع و $BD=R$ و r هو شعاع الدائرة (C)

بين أن : $r=R\left(3-2\sqrt{2}\right)$

تمرين 3

حل المعادلة : $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-2}}+\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=8$

تمرين 4

x و y عددان حقيقيان موجبان غير منعدمان

بين أن : $\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}\geq\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

حل أولمبياد السادس عشر

تمرين 1

لدينا : $(x-y)^2 \geq 0$

يعني : $x^2-2xy+y^2 \geq 0$

يعني : $x^2+y^2 \geq 2xy$

يعني : $z\times(x^2+y^2) \geq z\times 2xy$

إذن : $z(x^2+y^2) \geq 2xyz$ (1)

بنفس الطريقة نبين أن : $y(x^2+z^2) \geq 2xyz$ (2)

و $x(y^2+z^2) \geq 2xyz$ (3)

نجمع المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف :

$$z(x^2+y^2)+y(x^2+z^2)+x(y^2+z^2) \geq 2xyz+2xyz+2xyz$$

أي : $zx^2+zy^2+yx^2+yz^2+xy^2+xz^2 \geq 6xyz$

أي : $x^2(y+z)+y^2(x+z)+z^2(y+x) \geq 6xyz$

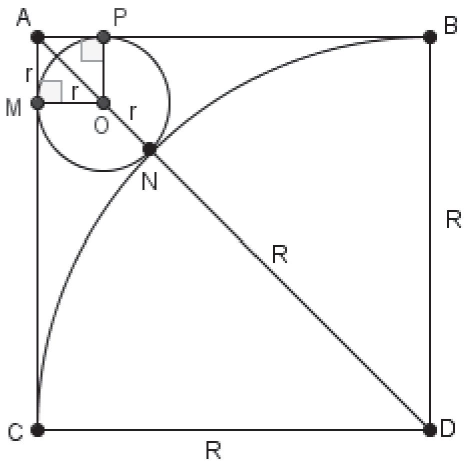
ونعلم أن : $x+y+z=1$ يعني : $x+y=1-z$ و $x+z=1-y$ و $y+z=1-x$

أي : $x^2(y+z)+y^2(x+z)+z^2(y+x)=x^2(1-x)+y^2(1-y)+z^2(1-z) \geq 6xyz$

أي : $\frac{1}{xyz}\times\left(x^2(1-x)+y^2(1-y)+z^2(1-z)\right) \geq \frac{1}{\cancel{xyz}}\times 6\cancel{xyz}$

أي : $\frac{x^2(1-x)}{xyz}+\frac{y^2(1-y)}{xyz}+\frac{z^2(1-z)}{xyz} \geq 6$

وبالتالي : $\frac{x(1-x)}{yz}+\frac{y(1-y)}{xz}+\frac{z(1-z)}{xy} \geq 6$



تمرين 2

لدينا (AM) و (AP) مماسا للدائرة (C)

إذن : $(AM)\perp(OM)$ و $(AP)\perp(OP)$

ومنه $A\hat{M}O = A\hat{P}O = 90^\circ$

لدينا : $P\hat{O}M = 360 - A\hat{M}O - A\hat{P}O - M\hat{A}P$

إذن : $P\hat{O}M = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

بما أن $P\hat{O}M = A\hat{M}O = A\hat{P}O = M\hat{A}P = 90^\circ$ و $OP = OM$

فإن الرباعي $AMOP$ مربع

حساب AO :

لدينا المثلث AMO قائم الزاوية في M

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن : $AO^2 = AM^2 + MO^2$

اي : $AO^2 = r^2 + r^2 = 2r^2$

ومنه : $AO = \sqrt{r^2 2} = r\sqrt{2}$

حساب AD :

لدينا المثلث ABD قائم الزاوية في D

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن : $AD^2 = AB^2 + BD^2$

اي : $AD^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$

ومنه : $AD = \sqrt{R^2 2} = R\sqrt{2}$

حساب r :

لدينا : $AD = AO + ON + ND$

يعني : $R\sqrt{2} = r\sqrt{2} + r + R$

يعني : $R\sqrt{2} - R = r\sqrt{2} + r$

يعني : $R\left(\sqrt{2}-1\right) = r\left(\sqrt{2}+1\right)$

يعني : $r = \dfrac{R\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{2}+1}$

يعني :

$$r=\frac{R\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{2}+1}\times\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}$$
$$=\frac{R\left(\sqrt{2}-1\right)^{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^{2}-1^{2}}$$
$$=\frac{R\left(2-2\sqrt{2}+1\right)}{1}$$
$$=R\left(3-2\sqrt{2}\right)$$

وبالتالي : $r=R\left(3-2\sqrt{2}\right)$

تمرين 3

لدينا : $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-2}}+\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=8$

يعني : $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-2}}\times\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-2}}+\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}\times\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}=8$

يعني : $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-2}}{x-(x-2)}+\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{x+2-x}=8$

يعني : $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-2}}{2}+\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{2}=8$

يعني : $\frac{\cancel{\sqrt{x}}-\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}-\cancel{\sqrt{x}}}{2}=8$

يعني : $-\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}=8$

يعني : $\left(-\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}\right)^{2}=8^{2}$

يعني : $x-\cancel{2}-2\sqrt{(x-2)(x+2)}+x+\cancel{2}=64$

يعني : $2x-2\sqrt{x^{2}-4}=64$

يعني : $2\left(x-\sqrt{x^{2}-4}\right)=64$

يعني : $x-\sqrt{x^{2}-4}=32$

يعني : $-\sqrt{x^{2}-4}=32-x$

يعني : $\left(-\sqrt{x^{2}-4}\right)^{2}=(32-x)^{2}$

يعني : $\cancel{x^2}-4=1024-64x+\cancel{x^2}$

يعني : $64x=4+1024$

يعني : $64x=1028$

وبالتالي : $x=\dfrac{1028}{64}=\dfrac{257}{16}$

تمرين 4

لدينا :

$$\begin{aligned}
\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)&=\frac{x^2+y^2}{y^2x^2}-\frac{y+x}{xy}\\
&=\frac{x^3+y^3}{y^2x^2}-\frac{xy}{xy}\times\frac{y+x}{xy}\\
&=\frac{x^3+y^3}{y^2x^2}-\frac{xy^2+x^2y}{x^2y^2}\\
&=\frac{x^3+y^3-xy^2-x^2y}{x^2y^2}\\
&=\frac{x^2(x-y)-y^2(x-y)}{x^2y^2}\\
&=\frac{(x-y)(x^2-y^2)}{x^2y^2}\\
&=\frac{(x-y)(x-y)(x+y)}{x^2y^2}\\
&=\frac{(x-y)^2(x+y)}{x^2y^2}\geq 0
\end{aligned}$$

لأن $(x-y)^2\geq 0$ و $(x+y)>0$ و $x^2y^2>0$ ($x>0$ و $y>0$)

إذن : $\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{y}{x^2}\geq\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$