

أولمبياد الثامن عشر

تمرين 1

x و y و z أعداد حقيقية غير منعدمة بحيث : $\frac{y}{x} = \frac{z}{y}$

$$\text{بين أن : } \frac{x^2 - y^2 + z^2}{x^{-2} - y^{-2} - z^{-2}} = y^4$$

تمرين 2

EFG مثلث بحيث : $EF = 8cm$ و $EG = 6cm$

و $FG = 10cm$

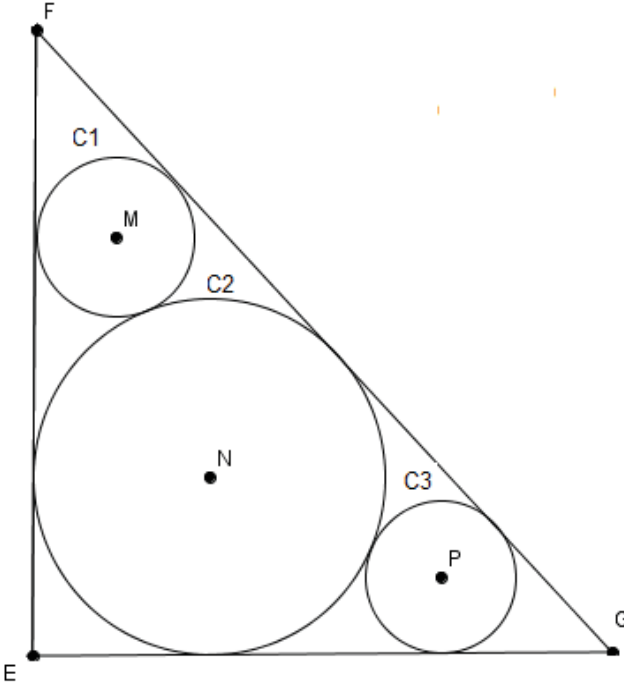
(C_1) و (C_2) و (C_3) ثلاث دوائر توجد داخل

المثلث EFG كما هو مبين في الشكل جانبه

مركزهما على التوالي : M و N و P

1- حدد شعاع الدائرة (C_2)

2- حدد شعاع الدائرة (C_1)



تمرين 3

x و y و z أعداد حقيقية موجبة غير منعدمة

$$\text{بين أن : } \frac{x}{y+z} + \frac{z}{x+y} + \frac{y}{x+z} \geq \frac{3}{2}$$

تمرين 4

x و y عدنان حقيقيان بحيث : $(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1$

بين أن : $x + y = 0$

حل أولمبياد الثامن عشر

تمرين 1

نضع : $\frac{y}{x} = \frac{z}{y} = t$

بما أن : $\frac{y}{x} = \frac{z}{y} = t$ فإن : $y = xt$ و $z = yt$

أي : $y = xt$ و $z = xt^2$

لدينا :

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - y^2 + z^2}{x^{-2} - y^{-2} - z^{-2}} &= \frac{x^2 - (xt)^2 + (xt^2)^2}{x^{-2} - (xt)^{-2} - (xt^2)^{-2}} \\ &= \frac{x^2 - x^2t^2 + x^2t^4}{x^{-2} - x^{-2}t^{-2} - x^{-2}t^{-4}} \\ &= \frac{x^2(1 - t^2 + t^4)}{x^{-2}(1 - t^{-2} - t^{-4})} \\ &= x^2x^2 \frac{1 - t^2 + t^4}{1 - \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^4}} \\ &= x^4 \frac{t^4 - t^2 + 1}{\frac{t^4 - t^2 + 1}{t^4}} \\ &= x^4t^4 \frac{t^4 - t^2 + 1}{t^4 - t^2 + 1} \\ &= (xt)^4 = y^4 \end{aligned}$$

إذن : $\frac{x^2 - y^2 + z^2}{x^{-2} - y^{-2} - z^{-2}} = y^4$

تمرين 2

1- حساب مساحة الدائرة (C_2) :

بما أن (EF) مماس للدائرة (C_2) في النقطة D

فإن $(EF) \perp (DN)$

أي المثلث DNF قائم الزاوية في D

$$\text{إذن : } DE = \frac{4}{2} = 2$$

2- حساب مساحة الدائرة (C_1) :

لدينا المثلث FND قائم الزاوية في D

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن : $FN^2 = DF^2 + DN^2$

$$\text{أي : } FN^2 = (FE - DE)^2 + DN^2$$

$$\text{أي : } FN^2 = (8 - 2)^2 + 2^2$$

$$\text{أي : } FN^2 = 36 + 4 = 40$$

$$\text{ومنه : } FN = 2\sqrt{10}$$

نعتبر النقطة J المسقط العمودي للنقطة M على (DN)

$$\text{لدينا } \hat{CMJ} = 360 - \hat{MJD} - \hat{JDC} - \hat{DCM} = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

بما أن $\hat{CMJ} = \hat{MJD} = \hat{JDC} = \hat{DCM} = 90^\circ$ فإن الرباعي $CMJD$ مستطيل

$$\text{ومنه : } CM = JD$$

$$\text{لدينا : } MN = CM + 2 \text{ و } NJ = DN - DJ = 2 - CM$$

$$\text{في المثلث } FDN \text{ لدينا : } \hat{DFN} + \hat{FDN} + \hat{FND} = 180^\circ$$

$$\text{يعني : } \hat{DFN} = 180^\circ - \hat{FDN} - \hat{FND}$$

$$\text{إذن : } \hat{DFN} = 180^\circ - 90^\circ - \hat{FND} = 90^\circ - \hat{FND} \quad (9)$$

$$\text{في المثلث } MNJ \text{ لدينا : } \hat{NMJ} + \hat{MJN} + \hat{MNJ} = 180^\circ$$

$$\text{يعني : } \hat{NMJ} = 180^\circ - \hat{MJN} - \hat{MNJ}$$

$$\text{إذن : } \hat{NMJ} = 180^\circ - 90^\circ - \hat{FND} = 90^\circ - \hat{FND} \quad (10)$$

$$\text{من 9 و 10 نستنتج أن : } \hat{DFN} = \hat{NMJ}$$

$$\text{أي : } \sin \hat{DFN} = \sin \hat{NMJ}$$

$$\text{أي : } \frac{DN}{FN} = \frac{NJ}{NM}$$

$$\text{أي : } \frac{2}{2\sqrt{10}} = \frac{2 - CM}{CM + 2}$$

$$\text{أي : } 2CM + 4 = 4\sqrt{10} - 2\sqrt{10}CM$$

$$2CM + 2\sqrt{10}CM = 4\sqrt{10} - 4 \quad \text{أي :}$$

$$2CM(1 + \sqrt{10}) = 2(2\sqrt{10} - 2) \quad \text{أي :}$$

$$CM = \frac{2\sqrt{10} - 2}{1 + \sqrt{10}} \quad \text{إذن :}$$

تمرين 3

$$\left(\frac{x+y}{y+z} - 1\right)^2 \geq 0 \quad \text{لدينا :}$$

$$\left(\frac{x+y}{y+z}\right)^2 + 1 \geq 2\frac{x+y}{y+z} \quad \text{يعني :} \quad \left(\frac{x+y}{y+z}\right)^2 - 2\frac{x+y}{y+z} + 1 \geq 0$$

$$\frac{1}{\frac{x+y}{y+z}} \times \left(\left(\frac{x+y}{y+z}\right)^2 + 1\right) \geq \frac{1}{\frac{x+y}{y+z}} \times 2\frac{x+y}{y+z} \quad \text{يعني :}$$

$$\frac{x+y}{y+z} + \frac{1}{\frac{x+y}{y+z}} \geq \frac{1}{\frac{x+y}{y+z}} \times 2\frac{x+y}{y+z} \quad \text{يعني :}$$

$$\text{إذن :} \quad (1) \quad \frac{x+y}{y+z} + \frac{y+z}{x+y} \geq 2$$

$$\text{بنفس الطريقة نبين أن :} \quad (2) \quad \frac{x+z}{y+z} + \frac{y+z}{x+z} \geq 2$$

$$\text{و} \quad (3) \quad \frac{x+y}{x+z} + \frac{x+z}{x+y} \geq 2$$

نجمع المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف :

$$\frac{x+y}{y+z} + \frac{y+z}{x+y} + \frac{x+z}{y+z} + \frac{y+z}{x+z} + \frac{x+y}{x+z} + \frac{x+z}{x+y} \geq 2+2+2$$

$$\text{أي :} \quad \left(\frac{x+y}{y+z} + \frac{x+z}{y+z}\right) + \left(\frac{y+z}{x+y} + \frac{x+z}{x+y}\right) + \left(\frac{y+z}{x+z} + \frac{x+y}{x+z}\right) \geq 2+2+2$$

$$\text{أي :} \quad \frac{2x+y+z}{y+z} + \frac{2z+x+y}{x+y} + \frac{2y+x+z}{x+z} \geq 6$$

$$\text{أي :} \quad \frac{2x}{y+z} + \frac{y+z}{y+z} + \frac{2z}{x+y} + \frac{x+y}{x+y} + \frac{2y}{x+z} + \frac{x+z}{x+z} \geq 6$$

$$\text{أي :} \quad \frac{2x}{y+z} + \frac{2z}{x+y} + \frac{2y}{x+z} + 3 \geq 6 \quad \text{أي} \quad \frac{2x}{y+z} + 1 + \frac{2z}{x+y} + 1 + \frac{2y}{x+z} + 1 \geq 6$$

$$\text{أي :} \quad 2\left(\frac{x}{y+z} + \frac{z}{x+y} + \frac{y}{x+z}\right) \geq 6-3 \quad \text{أي :} \quad \frac{1}{2} \times 2\left(\frac{x}{y+z} + \frac{z}{x+y} + \frac{y}{x+z}\right) \geq \frac{1}{2} \times 3$$

$$\text{وبالتالي :} \quad \frac{x}{y+z} + \frac{z}{x+y} + \frac{y}{x+z} \geq \frac{3}{2}$$

تمرين 4

لدينا : $(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1$

يعني : $\frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \times (x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1$

يعني : $\frac{x^2 - (\sqrt{x^2 + 1})^2}{x - \sqrt{x^2 + 1}} \times (y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1$

يعني : $\frac{x^2 - x^2 - 1}{x - \sqrt{x^2 + 1}} \times (y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1$

يعني : $\frac{-(y + \sqrt{y^2 + 1})}{x - \sqrt{x^2 + 1}} = 1$

يعني : $-y - \sqrt{y^2 + 1} = x - \sqrt{x^2 + 1}$

إذن : $x + y = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{y^2 + 1}$ (1)

لدينا : $(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1$

يعني : $(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) \times \frac{y - \sqrt{y^2 + 1}}{y - \sqrt{y^2 + 1}} = 1$

يعني : $(x + \sqrt{x^2 + 1}) \times \frac{y^2 - (\sqrt{y^2 + 1})^2}{y - \sqrt{y^2 + 1}} = 1$

يعني : $(x + \sqrt{x^2 + 1}) \times \frac{y^2 - y^2 - 1}{y - \sqrt{y^2 + 1}} = 1$

يعني : $\frac{-(x + \sqrt{x^2 + 1})}{y - \sqrt{y^2 + 1}} = 1$

يعني : $-x - \sqrt{x^2 + 1} = y - \sqrt{y^2 + 1}$

إذن : $x + y = \sqrt{y^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 1}$ (2)

نجمع المتساويتان 1 و 2 طرف بطرف : $2(x + y) = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{y^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 1}$

أي : $2(x + y) = 0$

وبالتالي : $x + y = 0$