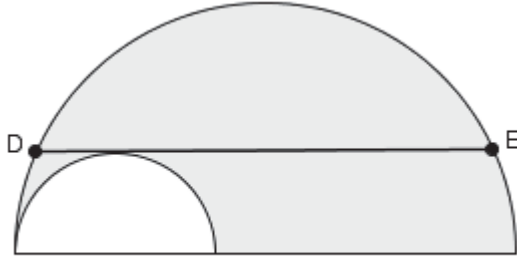


أولمبياد الحادي عشر

تمرين 1



نعتبر الشكل جانبه بحيث :
المستقيم (DE) مماس للدائرة الصغيرة

$$DE = 8\text{cm} \text{ و}$$

احسب S' مساحة المنطقة المظللة

تمرين 2

x و y و z أعداد حقيقية غير منعدمة بحيث : $x + \frac{1}{y} = 10$ و $y + \frac{1}{z} = 11$ و $z + \frac{1}{x} = 12$

$$\text{بين أن : } xyz + \frac{1}{xyz} = 1287$$

تمرين 3

EFG مثلث متساوي الساقين في E و A نقطة من $[FG]$

و $[FD]$ الإرتفاع الموافق للضلع $[EG]$

و النقطتان B و C هما المسقطان العموديان للنقطة A على (EF) و (EG) على التوالي

$$\text{بين أن : } FD = AB + AC$$

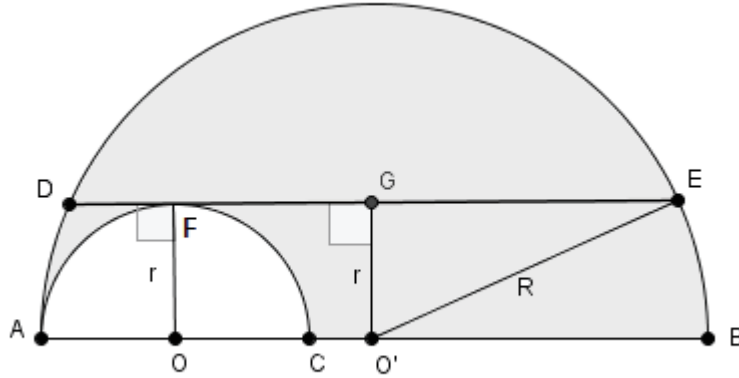
تمرين 4

x و y عددين حقيقيين

$$\text{بين أن : } (x^2 + 1)(y^2 + 1) \geq x(y^2 + 1) + y(x^2 + 1)$$

حل أولمبياد الحادي عشر

تمرين 1



نعتبر النقطة O' مركز الدائرة الكبيرة التي شعاعها R
و النقطة O مركز الدائرة الصغيرة التي شعاعها r

لدينا : $O'E = O'D = R$

إذن $(O'G)$ واسط القطعة $[DE]$

ومنه النقطة G منتصف $[DE]$

أي $GE = GD = 4cm$

لدينا المثلث $O'GE$ قائم الزاوية في G

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن : $O'E^2 = O'G^2 + GE^2$

أي : $R^2 = r^2 + 16$

مساحة المنطقة المظلمة (S') = مساحة نصف الدائرة الكبيرة - مساحة نصف الدائرة الصغيرة

$$\begin{aligned} S' &= \frac{\pi R^2}{2} - \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi(r^2 + 16)}{2} - \frac{\pi r^2}{2} \\ &= \frac{\pi 16}{2} \\ &= 8\pi \end{aligned}$$

تمرين 2

لدينا : $x + \frac{1}{y} = 10$ و $y + \frac{1}{z} = 11$ و $z + \frac{1}{x} = 12$

نجمع المتساويات طرف بطرف إذن : $x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 33$

نضرب المتساويات طرف بطرف : $\left(x + \frac{1}{y}\right) \times \left(y + \frac{1}{z}\right) \times \left(z + \frac{1}{x}\right) = 1320$

يعني : $\left(xy + \frac{x}{z} + 1 + \frac{1}{yz}\right) \times \left(z + \frac{1}{x}\right) = 1320$

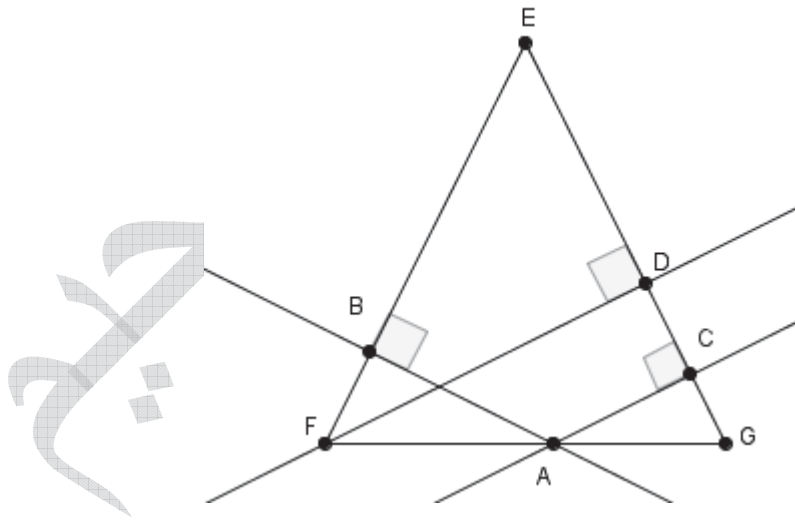
يعني : $xyz + y + x + \frac{1}{z} + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xyz} = 1320$

يعني : $\left(xyz + \frac{1}{xyz}\right) + \left(x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 1320$

يعني : $\left(xyz + \frac{1}{xyz}\right) + 33 = 1320$

وبالتالي : $xyz + \frac{1}{xyz} = 1287$

تمرين 3



لدينا : $S_{EFG} = S_{EFA} + S_{EAG}$

(S_{EFG} : مساحة مثلث EFG ، ، S_{EFA} : مساحة مثلث EFA ، ، S_{EAG} : مساحة مثلث EAG)

$$\frac{EG \times FD}{2} = \frac{AB \times EF}{2} + \frac{AC \times EG}{2} \quad \text{يعني :}$$

$$\frac{EG \times FD}{2} = \frac{AB \times EF + AC \times EG}{2} \quad \text{يعني :}$$

$$(EF = EG \text{ لأن المثلث } EFG \text{ متساوي الساقين في } E) \quad \frac{EG \times FD}{2} = \frac{AB \times EG + AC \times EG}{2} \quad \text{يعني :}$$

$$\frac{EG \times FD}{2} = \frac{EG(AB + AC)}{2} \quad \text{يعني :}$$

$$\frac{\cancel{EG}}{EG} \times \frac{\cancel{EG} \times FD}{\cancel{EG}} = \frac{\cancel{EG}}{EG} \times \frac{\cancel{EG}(AB + AC)}{\cancel{EG}} \quad \text{يعني :}$$

$$FD = AB + AC \quad \text{إذن :}$$

تمرين 4

$$\text{لدينا : } (y-1)^2 = y^2 - 2y + 1 \geq 0 \quad \text{و} \quad (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$\text{يعني : } y^2 + 1 \geq 2y \quad \text{و} \quad x^2 + 1 \geq 2x$$

$$\text{يعني : } \frac{y^2 + 1}{2} \geq y \quad \text{و} \quad \frac{x^2 + 1}{2} \geq x$$

$$\text{يعني : } \frac{(y^2 + 1)}{2}(x^2 + 1) \geq y(x^2 + 1) \quad \text{و} \quad \frac{(x^2 + 1)}{2}(y^2 + 1) \geq x(y^2 + 1)$$

$$\text{نجمع المتفاوتتين طرف بطرف : } \frac{(x^2 + 1)}{2}(y^2 + 1) + \frac{y^2 + 1}{2}(x^2 + 1) \geq x(y^2 + 1) + y(x^2 + 1)$$

$$\text{يعني : } \frac{2(x^2 + 1)}{2} \times (y^2 + 1) \geq x \times (y^2 + 1) + y \times (x^2 + 1)$$

$$\text{إذن : } (x^2 + 1) \times (y^2 + 1) \geq x \times (y^2 + 1) + y \times (x^2 + 1)$$